

# **Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

Reiner Lauterbach  
Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg  
Wintersemester 2004/2005  
Basierend auf der Vorlesung von  
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

## Kapitel 5: Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

### 5.1 Extremwerte, Mittelwertsätze, Satz von Taylor

#### Lokale Extremwerte

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset V$ ,  $V$  normierter Vektorraum),  $x_0 \in D$ .

1)  $f(x)$  hat in  $x_0$  ein **globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall x \in D : f(x) \leq f(x_0)$$

2)  $f(x)$  hat in  $x_0$  ein **strenges globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall x \in D \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$$

3)  $f(x)$  hat in  $x_0$  ein **lokales Maximum**, falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit:

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

4)  $f(x)$  hat in  $x_0$  ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein  $\varepsilon$  gibt mit:

$$\forall x \in D : 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

**Satz: (Kriterium für lokale Extrema I)**

Besitzt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0 \in [a, b]$  ein lokales Extremum und ist  $f(x)$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt:

$$a < x_0 < b \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

$$x_0 = a \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \geq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

$$x_0 = b \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \leq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

**Bemerkung:** Die Punkte  $x_0$  mit  $f'(x_0) = 0$  heißen **stationäre Punkte**.

Die Bedingung  $f'(x_0) = 0$  ist lediglich eine **notwendige Bedingung** für ein Extremum. Randpunkte sowie Punkte, an denen  $f(x)$  nicht differenzierbar ist, werden mit der notwendigen Bedingung nicht erfasst.

**Beispiel:**

Betrachte die Funktion  $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$  auf dem Intervall  $(0, 1)$ . Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

**Stationäre Punkte:**  $2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : & -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : & -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : & 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : & \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

Globale Minima bei  $x = \pm 1, 0$  mit Funktionswert  $f(x) = 0$ .

Globales Maximum bei  $x = \sqrt{2/3}$  mit Funktionswert  $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$   
( $-\sqrt{2/3} \notin D$ ).

**1) Satz von Rolle**

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ , so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$$

**2) Erster Mittelwertsatz**

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ , so gilt:

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**3) Zweiter Mittelwertsatz**

Sind die Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$  und gilt  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so gilt:

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## Monotone Funktionen

Für eine auf  $[a, b]$  differenzierbare Funktion gilt:

$$\forall x : f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ monoton wachsend}$$

$$\forall x : f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton wachsend}$$

$$\forall x : f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ monoton fallend}$$

$$\forall x : f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton fallend}$$

**Beispiel:** Die Ableitung der Funktion  $f(x) = x - \ln(x + 1)$ ,  
 $-1 < x < \infty$ , lautet

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Damit ist  $f$  auf  $(-1, 0)$  monoton fallend, auf  $(0, \infty)$  monoton wachsend.  
Insbesondere gilt für alle  $x \neq 0$

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) < x \quad (\forall x \in (-1, \infty), x \neq 0)$$

**Definition: (Landau–Symbole)** Für eine Funktion  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $0 \in D \cap D'$ , und  $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = O(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists C, \varepsilon > 0 : \forall 0 < |h| < \varepsilon :$$

$$\left( h \in D \Rightarrow \left\| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right\| \leq C \right)$$

**Bedeutung:**

$\varphi(h) = o(h^k)$ :  $\varphi(h)$  konvergiert für  $h \rightarrow 0$  schneller gegen Null als  $h^k$

$\varphi(h) = O(h^k)$ :  $\varphi(h)$  konvergiert für  $h \rightarrow 0$  wenigstens so schnell gegen Null wie  $h^k$

**Ableitung:** Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

**Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom, Satz von Taylor:**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^n$ –Funktion und  $x_0 \in (a, b)$ .

**Frage:** Wie kann man  $f(x)$  in der Nähe von  $x_0$  approximieren?

**Erste Antwort:**  $f$  ist differenzierbar, also gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

**Zweite Antwort:**

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + o((x - x_0)^2)$$

Denn es gilt ebenfalls:

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Integration über  $[x_0, x]$  liefert die zweite Antwort.

**Satz von Taylor:** (Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^n$ –Funktion und  $x_0 \in (a, b)$ .

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) **Taylor–Polynom**

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Den Punkt  $x_0$  nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Ist  $f$  eine  $C^{n+1}$ –Funktion, so gilt die **Restgliedformel (Lagrange)**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0)$$

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (|\xi - x_0| < |x - x_0|)$$

**Bemerkung:** Andere Darstellungen für das Restglied:

1) Integraldarstellung des Restglieds:

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2) Restgliedformel von Cauchy:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n$$

mit  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $\theta \in (0, 1)$

3) Restgliedformel von Schlömilch:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ .