

Musterbildung im visuellen Kortex

Vortrag vom 17.11.2012

Vortragende: Sandra Häberer (Matrikelnr.: 6221118)

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Veröffentlichung von Martin Golubitsky, Lie June Shia und Andrei Török vom 28.04.2004 „Symmetry and pattern formation on the visual cortex“. Martin Golubitsky erlangte 1970 seinen Abschluss in Mathematik am Metropolitan Institute of Technology, 1983-2008 forschte er als Professor an der Universität Houston, seitdem ist er an der Ohio State University tätig. Dort ist er Direktor des mathematischen biowissenschaftlichen Instituts. Seine Arbeit auf dem Feld der nichtlinearen dynamischen Systeme und der der Bifurkationstheorie ist überwiegend auf die Anwendung in der Biologie ausgerichtet. Auf diesem Gebiet war er an mehr als 100 Veröffentlichungen beteiligt.

Die mathematische Auseinandersetzung mit dem Themenfeld der visuellen Halluzinationen erfolgt in drei Schritten: Modellannahmen über den visuellen Kortex, die Prozedur der Musterbildung auf dem visuellen Kortex und der Methode, um das Muster als visuelle Halluzination zu interpretieren. Im folgenden werden wir einige Grundannahmen über den visuellen Kortex treffen und Konsequenzen für die Musterbildung ziehen.

2. Geschichte

Hier eine Einbettung der Veröffentlichung von Golubitsky et al. in den Kontext der Arbeiten zum Themenbereich der visuellen Halluzinationen:

1966: H. Klüver. Mescal and Mechanisms of Hallucinations. University of Chicago Press, Chicago.

Aus dieser Arbeit stammt eine erste Klassifikation der Halluzinationen in Waben, Spinnweben, Trichter, Tunnel und Spiralen

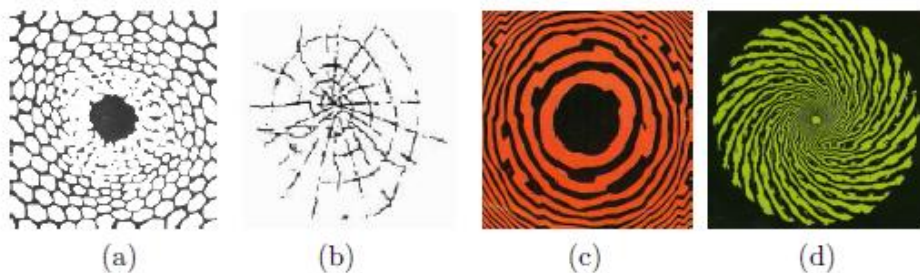


Fig. 1. (a) Honeycomb by marihuana; [8] (b) cobweb petroglyph; [20] (c) tunnel [21], (d) spiral by LSD [21].

2001: P.C. Bressloff, J.D. Cowan, M. Golubitsky, and P.J. Thomas: Nonlinearity 14, S.739–775.

Erste Berücksichtigung der Sensitivität eines Neurons für eine bestimmte Richtung und der Wirkung von Anisotropie

2003: M. Golubitsky, L-J. Shiau and A. Török, SIAM J.: Appl. Dynam. Sys. 2, S. 97–143.

Die Betrachtung von zeitabhängigen Lösungen liefert die Erklärung für tunnelnde und pulsierende Bilder

3. Grundbegriffe zum Modell des visuellen Kortex

Die retino-kortikale Karte:

Um genaueres darüber auszusagen, welches Aktivitätsmuster welches visuelle Bild erzeugt, treffen wir einige Grundannahmen zur Abbildung der Koordinaten auf der Retina und der Koordinaten im visuellen Kortex:

- Benachbarte Punkte auf der Retina werden in benachbarten Regionen auf dem visuellen Kortex Aktivität erzeugen.
- Aktive Regionen im visuellen Kortex werden als aktive Punkte auf der planaren Ebene betrachtet, diese wird von der rechten (in der linken Gehirnhälfte) Hälfte des Bildes erzeugt.
- Sei das Paar (r, θ) die Breite und Länge eines Punktes auf der Halbkugel der Retina. Wir erhalten die Koordinatentransformation (r, θ) zu den Standardkoordinaten in der Ebene gegeben durch $x = \frac{1}{\varepsilon} \log\left(\frac{r}{\omega}\right)$, $y = \frac{1}{\varepsilon} \theta$, wobei ε, ω Konstanten sind. Aufgrund der Eigenschaften dieser Koordinatentransformation reduziert sich die Betrachtung der visuellen Muster in Bild 1 auf die Betrachtung von Streifen und Quadraten als Muster auf dem visuellen Kortex.

Hypercolumn:

Unter einer Hypercolumn verstehen wir eine Gruppierung von Neuronen um einen Punkt x , in der für jede Richtung φ ein sensitives Neuron enthalten ist.

Anisotropie:

Die Neuronen einer Hypercolumn sind alle miteinander verbunden (lokal). Die Stärke der Verbindung von Neuronen verschiedener Hypercolumns hängt von ihrer Orientierung ab und ist selektiv (lateral).

Isotropie:

Die laterale Verbindung der Neuronen hängt ausschließlich von ihrer Orientierung ab.

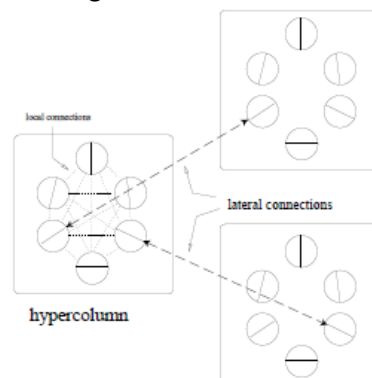


Fig. 2. Illustration of isotropic local and anisotropic lateral connection patterns.

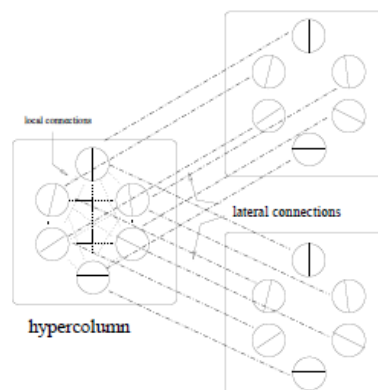


Fig. 3. Illustration of isotropic local and isotropic lateral connection patterns.

4. Grundbegriffe – Musterbildung

Die Aktivitätsvariable:

- (i) nach Ermentrout-Cowan: $a(x)$ gibt das Spannungspotential der Neuronen an einem Punkt x an
(ii) nach Bressloff et al.: a ist zusätzlich abhängig von der Orientierung φ , wobei gilt
 $a(x, \varphi + \pi) = a(x, \varphi)$ und $a(x, \cdot)$ eine Funktion auf dem Kreis ist. a liefert das Bild, in dem die aktivste Richtung der jeweiligen Hypercolumn gezeigt wird.

Die Euklidische Gruppe:

ist die Menge aller Funktionen auf dem n -dim. Vektorraum V , sodass $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$, wobei P, Q Punkte aus V sind. $E(2)$ enthält damit die Translation T_y , Rotation R_θ und die Reflexion κ . Unter Berücksichtigung der Orientierung operiert $E(2)$ auf $\mathbb{R}^2 \times S^1$ über die shift-twist-action:

$$T_y(x, \varphi) = (x + y, \varphi); R_\theta(x, \varphi) = (R_\theta(x), \varphi + \theta); \mu_\kappa(x, \varphi) = (\kappa(x), -\varphi)$$

5. Beschreibung von Mustern mittels Differentialgleichungen

Ein Muster auf dem visuellen Kortex kann nun durch die Aktivität a an einem Punkt x zum Zeitpunkt t beschrieben werden:

- (1) $\frac{\delta a(x, t)}{\delta t} = -a(x, t) + \int_{\mathbb{R}^2} \omega(|x - x'|) f(a(x', t)) dx'$, wobei ω eine Gewichtsfunktion und f die Feuerrate eines Neurons in Aktivitätszustand a beschreibt.

$f(a) = \frac{f_0}{1 + e^{-\eta(a - \kappa)}}$, wobei η die maximale Aktivität und κ den Schwellenwert minimaler Aktivität, die wahrgenommen werden kann, beschreibt.

Angenommen (1) besitzt die Fixpunktlösung $\forall x, t : a(x, t) = a_0$. Werden nun die Parameter wie η und κ z.B. durch die Wirkung von Drogen verändert, kann sich die Lösung $a(x, t)$ destabilisieren.

$a(x, t)$ stellen wir als Linearisierung dar $a(x, t) = a_0 + e^{\lambda t} a(x)$. Hiermit erhalten wir aus (1):

$$\lambda a(x) = -a(x) + f'(a_0) \int_{\mathbb{R}^2} \omega(|x - x'|) a(x') dx'. \text{ Diese ist erfüllt für } a(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{R}^2.$$

Wir hatten bereits festgestellt, dass eine zusätzliche Betrachtung der Orientierung sinnvoll ist. In diesem Fall lässt sich a als Linearkombination schreiben:

- (2) $a(x) = \sum_{n=1}^N (z_n e^{ik_n x} + z_n^* e^{-ik_n x})$, wobei z_n komplexe Zahlen sind. Um jedoch nicht unendlich viele Lösungen betrachten zu müssen, schränken wir die Lösungen folgendermaßen ein:

a) Wir betrachten die Lösungen auf dem Gitter $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda \omega_1 + \mu \omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$

b) Wir beschränken uns auf die gitter-erhaltenden Funktionen aus $\mathbb{D}^4 = \langle \frac{R_\pi}{4}, \kappa \rangle$, die das Gitter erhalten. Damit ist die Summe in (2) mit $N=2$ endlich.

Durch die Berücksichtigung der Anisotropie erhalten wir je zwei Lösungen für die Muster Streifen und Quadrate.

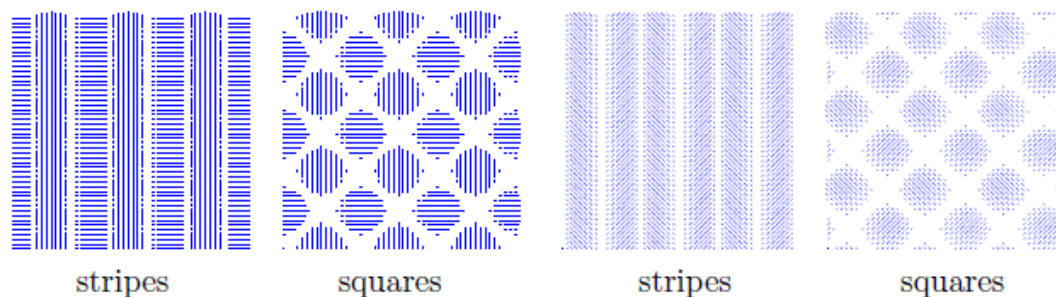


Fig. 5. Direction fields: scalar eigenfunctions (left) and pseudoscalar eigenfunctions (right)

Unter der Annahme von Anisotropie ist für die Aktivität a in Abhängigkeit von der Orientierung φ zu betrachten. Hierzu definieren wir:

$a(x, \varphi) = u(\varphi) e^{ikx} + \text{c.c.}$ heiße skalar, falls u eine gerade Funktion (+) ist.

$a(x, \varphi) = u(\varphi) e^{ikx} + \text{c.c.}$ heiße pseudoskalar, falls u eine ungerade Funktion (-) ist.

Genauer hat (2) dann die Form $a(x) = \sum_{n=1}^N (z_n u^\pm(\theta - \theta_n) e^{ik_n x} + z_n^* u^\pm(\theta - \theta_n) e^{-ik_n x})$

Weitere Lösungen unter Wirkung von Anisotropie ergeben sich bei der Wahl anderer Fixpunkträume:

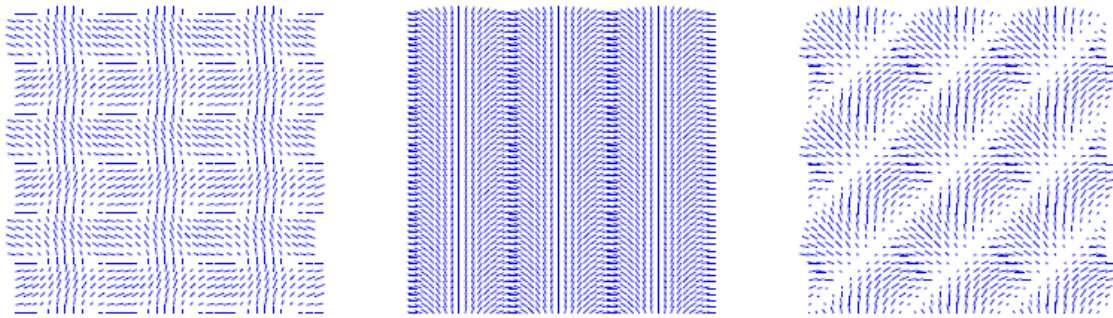


Fig. 6. Direction fields of new planforms in isotropic model: (left) axial planform Σ_2 ; (center) axial planform Σ_4 ; (right) rotating wave Σ_5 (direction of movement is up and to the left).

6. Quellen:

Grundlage dieser Auseinandersetzung und Quelle aller Abbildungen

Martin Golubitsky, Lie June Shia, Andrei Török: SYMMETRY AND PATTERN FORMATION ON THE VISUAL CORTEX, Chapter 1; 28.08.2004

weiterhin

http://www.scholarpedia.org/article/Models_of_visual_hallucinations am 16.01.13 um 18:28