

Universität Hamburg
Department Mathematik

Homogene 3-Zellen Netzwerke

Seminar über Dynamische Systeme
Prof. Dr. Reiner Lauterbach

Vorgetragen von Babette Bode

4 Einleitung

In diesem Abschnitt werden die Netzwerke mit Steady-State-Bifurkationen untersucht. Diese wurden bereits im dritten Kapitel von Boris Aleksandrov eingeführt und klassifiziert. Die Klassifizierung erfolgte nach den Eigenwerten der Adjazenzmatrix des jeweiligen Netzwerkes. Dabei werden vier verschiedene Gruppen untersucht:

(S1) einfache Eigenwerte: Netzwerke 1, 5, 9, 10, 11, 13, 15-17, 20-23, 25, 26, 29-34

(S2) doppelte Eigenwerte und zwei Eigenvektoren: Netzwerke 4, 7, 8

(S3) doppelte Eigenwerte und ein Eigenvektor: Netzwerke 3, 6, 11, 27, 28

(S4) doppelter Eigenwert und ein Eigenvektor in Δ : Netzwerk 12

Die Analyse bezieht sich auf den Bifurkationstyp, sowie die Anzahl bzw. die Stabilität der neu entstandenen Lösungszweige.

Ich werde in diesem Vortrag zuerst einige allgemeine Dinge zur Bifurkationstheorie einführen. Danach werden die Voraussetzungen zur Bifurkationsanalyse der Netzwerke diskutiert und an einem Beispiel gezeigt.

Die Propositionen 3.1 und 3.3, auf die ich später verweise, sind in Boris Aleksandrows Skript zu finden.

4.1 Allgemeines

Die Netzwerke werden (wie in den vorherigen Kapiteln) durch die Funktion $f = f(u, v, w)$ beschrieben. Jedoch wird nun noch ein reeller Parameter eingeführt. Dies ergibt

$$f = f(u, v, w, \lambda),$$

wobei gilt:

$$f(u, v, w, \lambda) = f(u, w, v, \lambda).$$

Diese Gleichung impliziert, dass einige partielle Ableitungen in $(0, 0)$ übereinstimmen, z.B. $f_v(0) = f_w(0)$.

Allgemein kann das 3-Zellensystem durch

$$\dot{X} = F(X, \lambda)$$

beschrieben werden, wobei $X = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^k)^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um zu überprüfen ob Verzweigungen auftreten, untersucht man die Lösungsmenge von $F(X, \lambda) = 0$:

$$S_\lambda = \{(X, \lambda) : F(X, \lambda) = 0\}.$$

$(X_0, \lambda_0) \in S_\lambda$ ist ein *Bifurkationspunkt*, falls es zwei Folgen (X_k, λ_k) und (Y_k, λ_k) gibt, die beide für $k \rightarrow \infty$ gegen (X_0, λ_0) konvergieren.

Häufig tritt eine Pitchfork-Bifurkation (Abb. 1) oder eine transkritische Bifurkation auf (Abb. 2). Dabei ist die Stabilität der auftretenden Lösungszweige von Interesse.

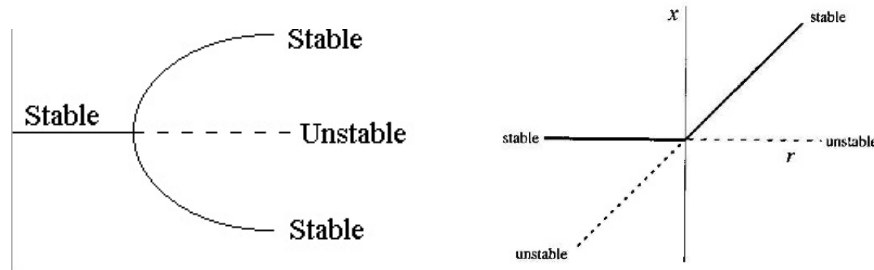


Abbildung 1: Pitchfork-Bifurkation (l.), transkritische Bifurkation (r.)

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die synchroniebrechenden codim1-steady-state Bifurkationen immer vom trivialen Lösungszweig aus auftreten. Die Existenz muss jedoch erst begründet werden:

4.2 Existenz des trivialen Lösungszweiges

Für alle Netzwerke abgesehen von Netzwerk 11 existiert ein trivialer Lösungszweig. Um dies zu zeigen, betrachtet man das 3-Zellensystem als $\dot{X} = F(X, \lambda)$. Man nimmt an, dass dieses System eine codim1-steady-state Verzweigung von einem synchronen Gleichgewicht bei $\lambda = 0$ hat. Dieses kann oBdA affin-linear in den Ursprung verschoben werden. Somit hat die Jacobimatrix $J = (DF)_{(0,0)}$ Null als Eigenwert.

Aus Proposition 3.3 folgt, dass sich E^c (center subspace) von J und Δ nur im Ursprung schneiden (dies gilt nicht für Netzwerk 12 und müsste somit gesondert betrachtet werden). Somit ist die Jacobimatrix J eingeschränkt auf den synchronieerhaltenden Unterraum Δ nicht-singulär. Der Satz über implizite Funktionen kann angewandt werden, d.h. es gibt einen eindeutigen Lösungszweig. Diesen kann man affin-linear in $X = 0$ verschieben, so dass gilt: $F(0, \lambda) = 0$.

Im folgenden werden die Voraussetzungen zur Stabilitätsanalyse diskutiert.

4.3 Stabilität

Wie in den vorherigen Kapiteln wollen wir das 3-Zellensystem nur für $k = 1$ betrachten. Es ist möglich von der Analyse der linearisierten Stabilität von Gleichgewichtspunkten für $k = 1$ auf $k > 1$ zu schließen. Dies muss jedoch erst gezeigt werden:

Die Eigenwerte der $(3k) \times (3k)$ Jacobimatrix J entsprechen den Eigenwerten der drei $k \times k$

Blockmatrizen (siehe Proposition 3.1). Die Eigenwerte hängen nur von der linearisierten internen Dynamik bzw. von der linearisierten Kopplungsdynamik ab und sind im jeweiligen Block beliebig. Falls ein Eigenwert in mehreren Blöcken vorkommt (und somit eine Verzweigung aufgrund eines mehrfachen Eigenwertes auftritt), ist dies unabhängig von der Größe der Blöcke. Vielfachheiten vom Eigenwert sind somit für beliebiges k gegeben. Bei Bifurkationen untersucht man das Verhalten vom kritischen Eigenwert entlang des Lösungszweiges. Diese Analyse ist für alle k gleich. Die Stabilität wird durch das Vorzeichen der Realteile der nichtkritischen Eigenwerte der Jacobimatrix im Verzweigungspunkt bestimmt.

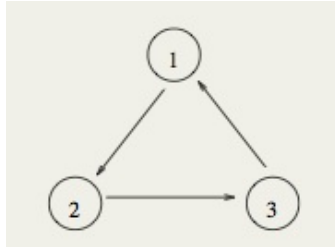
Somit ist es ausreichend, $k = 1$ zu betrachten.

Bemerkung: Im Fall $k = 1$ können Besonderheiten auftreten, die für $k > 1$ nicht von Bedeutung sind (und hier nicht weiter diskutiert werden).

4.4 Veränderungen in den unterschiedlichen Zellen

Die Struktur eines Netzwerkes kann zu fluss-invarianten Polydiagonalen führen. In diesem Fall tritt partielle Synchronie in einigen Zellen auf (zur Erinnerung: es werden synchroniebrechende codim-1 steady-state Bifurkationen betrachtet).

Dazu ein *Beispiel: der unidirektionale Ring*



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_3) \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, x_1) \\ \dot{x}_3 &= f(x_3, x_2) \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^k$$

Der synchronieerhaltende Unterraum $\Delta = \{x_1 = x_2 = x_3\}$ ist fluss-invariant.

Bei synchroniebrechenden Verzweigungen können Unterschiede in den einzelnen Zellen auftreten. Die "Rate", in der die synchroniebrechende Lösung vom Gleichgewicht abweicht, muss für jede der drei Zelle betrachtet werden.

In unserem Fall der homogenen 3-Zellen-Netzwerke mit Eigenschaft **(S1)**, **(S2)** oder **(S3)** können wir das synchrone Gleichgewicht immer in $(0, 0)$ annehmen.

Beispiel 1: transkritischer Lösungszweig

Sei $X(\lambda) = \lambda Cp + \mathcal{O}(\lambda^2)$, wobei $p \in \mathbb{R}^3$ ein kritischer Eigenvektor der Jacobimatrix ist und $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, die von der Dgl. abhängt.

$p = (p_1, p_2, p_3)^t$ ist nur vom Netzwerk und der Art der Verzweigung abhängig.

1. Fall: $p_j \neq 0, j = 1, 2, 3$: Dann ist die Abweichungsrate der verzweigenden von der synchronen Lösung in Zelle j von der Ordnung λ .
2. Fall: $p_j = 0$: Die Abweichungsrate ist entweder von der Ordnung λ^2 oder Null. Dies kann auftreten, wenn der Unterraum $p_j = 0$ fluss-invariant ist.

Beispiel 2: Pitchfork-Verzweigung

Der Lösungszweig für diesen Bifurkationstyp kann durch $X(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} Cp + \mathcal{O}(\lambda)$, λ, C, p wie in *Beispiel 1*, beschrieben werden.

1. Fall: Für $p_j \neq 0$ erhält man eine Abweichungsrate der Ordnung $\lambda^{\frac{1}{2}}$.
2. Fall: Für $p_j = 0$ ist die Abweichungsrate entweder von der Ordnung λ oder Null (siehe Bsp 1).

Bevor wir uns dem Beispielnetzwerk widmen, wird im nächsten Abschnitt die Liapunov-Schmidt-Reduktion kurz erläutert.

4.5 Liapunov-Schmidt-Reduktion

Die Liapunov-Schmidt-Reduktion ist eine Methode zur Reduktion der Dimension des zu untersuchenden Systems. Sie kann genutzt werden, um ein unendlich-dimensionales System auf ein endlich-dimensionales zu reduzieren oder - wie in diesem Fall - um ein endlich-dimensionales auf ein ein-dimensionales System zu führen.

Sei $F(X, \lambda) = 0$. $(\star)$

Falls die Jacobimatrix $L = (dF)_{(0,0)}$ vollen Rang ($= n$) hat, lässt sich $(\star)$ mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen eindeutig lösen und es tritt keine Verzweigung auf.

Also nehmen wir an: $rk(dF)_{(0,0)} = n - 1$.

Der Urbild- bzw. Bildraum werden gesplittet: $\mathbb{R}^n = \ker L \oplus M$ und $\mathbb{R}^n = N \oplus \text{range} L$, wobei $\dim \text{range}(L) = n - 1$ und $\dim \ker(L) = 1$ bzw. $\dim M = n - 1$ und $\dim N = 1$.

Nun werden mittels der Zerlegung zwei Projektionen definiert, so dass $(\star)$ in ein äquivalentes System umgeschrieben werden kann:

$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{range}(L)$, wobei $\ker E = N$.

$(I - E) : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{range}(N)$, $\ker(I - E) = \text{range}(L)$ (Komplementärprojektion).

Sei nun $u \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $u = 0 \iff Eu = 0$ und $(I - E)u = 0 \Rightarrow (\star)$ ist äquivalent

$$\text{zu } \begin{cases} EF(X, \lambda) = 0 & (1) \\ (I - E)F(X, \lambda) = 0 & (2) \end{cases}.$$

(1) kann für $(n - 1)$ der Variablen von X gelöst werden. Einsetzen in (2) ergibt die noch fehlende.

Das reduzierte System lässt sich schreiben als $K(y, \lambda) = \langle v_0^*, F(yv_0, \lambda) \rangle$,

wobei $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $v_0 \in \ker L$ und $v_0^* \in (\text{range } L)^\perp$, beide ungleich Null. K hat nach Voraussetzung die gleichen Nullstellen wie $F(X, \lambda)$. Die entsprechenden Ableitungen lassen sich direkt berechnen.

4.6 (S1)

In dieser Klasse ist der kritische Eigenwert einfach. Es entsteht ein eindeutiger Lösungszweig, der entweder transkritisch ist (ohne Symmetrie) oder eine Pitchfork-Bifurkation (mit $\mathbb{Z}_2$ -Symmetrie).

Eine Tabelle mit allen Netzwerken aus (S1) und den auftretenden Verzweigungen ist im Anhang zu finden.

Mittels Liapunov-Schmidt-Reduktion wird das System von Dgl. des 3-Zellen-Netzwerks zu $K(y, \lambda) = 0$, wobei $y \in \mathbb{R}$, $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens zwei Mal stetig differenzierbar, $K_y(0) = 0$ und $K(0, \lambda) = 0$, da $X = 0$ eine Lösung ist $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Wir wollen $K(y, \lambda) = 0$ lösen für (y, λ) nah an $(0, 0)$.

Die Ableitungen lassen sich nach der Liapunov-Schmidt-Reduktion wie folgt berechnen:

$$K_{yy}(0) = \langle v_0^*, d^2 F(v_0, v_0) \rangle$$

$$K_{y\lambda}(0) = \langle v_0^*, dF_\lambda(v_0) \rangle$$

wobei $v_0 \in \ker J$ und $v_0^* \in (\text{range } J)^\perp$.

Nun wird ein Beispiel für eine transkritische Bifurkation betrachtet.

Generische Eigenschaften für das Auftreten von transkritischen Lösungszweigen sind:

$$K_{yy}(0) \neq 0 \neq K_{y\lambda}(0).$$

Dies gilt auch für das nichtreduzierte System, d.h. $f_{yy}(0) \neq 0 \neq f_{y\lambda}(0)$.

Beispiel: Netzwerk 1



Die Adjazenzmatrix A ist gegeben durch: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = \pm 1$. λ_2 entspricht der Valenz des Netzwerkes. Der entsprechende Eigenvektor liegt somit im synchronieerhaltenden Unterraum Δ . Daher ist dieser Eigenwert für die Betrachtung von synchroniebrechenden Verzweigungen nicht von Interesse.

Die zugehörige Jacobimatrix berechnet sich wie folgt:

$$J = Q \otimes I + R \otimes A = f_u \cdot I + R \otimes A = \begin{pmatrix} f_u & f_v & 0 \\ f_v & f_u & 0 \\ 0 & f_v & f_u \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte lassen sich mit Proposition 3.1 schnell berechnen:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= f_u + 0 \cdot f_v = f_u \\ \mu_2 &= f_u + 1 \cdot f_v = f_u + f_v \\ \mu_3 &= f_u - 1 \cdot f_v = f_u - f_v\end{aligned}$$

Dabei ist μ_2 nicht von Bedeutung für eine synchroniebrechende Verzweigung, da er zum synchronieerhaltenden Eigenwert von A_1 gehört.

Für die transkritische Bifurkation ist $f_u(0)$ der kritische Eigenwert.

Berechnung von $K_{y\lambda}(0)$ und $K_{yy}(0)$ mittels der oben angegebenen Gleichungen, wobei $v_0 = (0, 0, 1)^\perp$ und $v_0^* = (-1, 0, 1)^\perp$:

$$K_{y\lambda}(0) = \langle v_0^*, dF_\lambda(v_0) \rangle = \langle (-1, 0, 1)^\perp, (0, 0, f_{u\lambda})^\perp \rangle = f_{u\lambda} \neq 0$$

$$K_{yy}(0) = -d^2 F_1(v_0, v_0) + d^2 F_3(v_0, v_0).$$

Nach Definition ist $d^2 F_l(p, q) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 F_l}{\partial x_i \partial x_j}(0) p_i q_j$.

$$\Rightarrow K_{yy}(0) = f_{uu}(0) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ In Netzwerk 1 gibt es eine transkritische Bifurkation.

4.7 Anhang

Table 3. Coupled cell systems for networks in figure 5 that can have S1 bifurcations. Generically the solutions on the pitchfork and transcritical grow, respectively, with standard rate of $\lambda^{1/2}$ and λ . If the eigenvector has a 0 component and the corresponding cell is identically 0, then that component is denoted by 0^* . Otherwise the component grows with rate λ and λ^2 when the branch is pitchfork and transcritical, respectively.

Net	Eigenvalues	Eigenvectors	Bifurcation type	Synchrony
1	$f_u(0)$	$(0^*, 0^*, 1)$	transcritical	$x_1 = x_2$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, -1, 1)$	pitchfork	$x_1 = x_3$
5	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, -2, 1)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0)$	$(-1, 1, 1)$	pitchfork	$x_2 = x_3$
9	$f_u(0) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_v(0)$	$(0^*, 2, -1 + \sqrt{5})$	transcritical	—
	$f_u(0) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} f_v(0)$	$(0^*, 2, -1 - \sqrt{5})$	transcritical	—
10	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, -2, 1)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0) + f_v(0)$	$(1, 0, -1)$	pitchfork	
12	$f_u(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
13	$f_u(0)$	$(0^*, 0^*, 1)$	transcritical	$x_1 = x_2$
	$f_u(0) - 2f_v(0)$	$(1, -1, 0)$	pitchfork	
15	$f_u(0) - 2f_v(0)$	$(1, 1, -1)$	transcritical	$x_1 = x_2$
	$f_u(0)$	$(1, -1, 0)$	pitchfork	
16	$f_u(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, 1, -2)$	transcritical	$x_1 = x_2$
17	$f_u(0)$	$(-1, 1, 0)$	transcritical	
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, -2, 1)$	transcritical	$x_1 = x_3$
20	$f_u(0) + f_v(0)$	$(1, 0^*, 0^*)$	transcritical	$x_2 = x_3$
	$f_u(0) - 2f_v(0)$	$(1, -3, 3)$	pitchfork	
21	$f_u(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, 4, -2)$	transcritical	
22	$f_u(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(-1, 2, 2)$	transcritical	$x_2 = x_3$
23	$f_u(0) - \frac{1-\sqrt{5}}{2} f_v(0)$	$\left(1, \frac{\sqrt{5}-3}{2}, 2\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)$	transcritical	—
	$f_u(0) - \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_v(0)$	$\left(1, -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, 2\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)$	transcritical	—
25	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(1, 1, -2)$	transcritical	$x_1 = x_2$
26	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(-2, 1, 4)$	transcritical	
29	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 1)$	transcritical	$x_2 = x_3$
	$f_u(0) - f_v(0)$	$(0^*, 1, -1)$	pitchfork	
30	$f_u(0) + \sqrt{2}f_v(0)$	$(0^*, 1, \sqrt{2})$	transcritical	—
	$f_u(0) - \sqrt{2}f_v(0)$	$(0^*, 1, -\sqrt{2})$	transcritical	—
31	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 1)$	transcritical	$x_2 = x_3$
	$f_u(0)$	$(0^*, 0^*, 1)$	transcritical	$x_1 = x_2$
32	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 2)$	transcritical	
	$f_u(0)$	$(0^*, 0^*, 1)$	transcritical	$x_1 = x_2$
33	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0)$	$(0^*, 0^*, 1)$	transcritical	$x_1 = x_2$
34	$f_u(0) + f_v(0)$	$(0^*, 1, 0^*)$	transcritical	$x_1 = x_3$
	$f_u(0)$	$(0^*, -1, 1)$	transcritical	