Seminar über Gewöhnliche Differentialgleichungen WS 02/03
Prof. Dr. R. Lauterbach
Katja Wiebracht, 12.02.2003

# Hyperbolische Mengen

Ganz allgemein gesprochen sind hyperbolische Mengen Mengen, in denen jeder Punkt mit einer stabilen und einer instabilen Richtung ausgestattet ist. Aber bevor wir dies präzise definieren können braucht es noch etwas Vorarbeit.

Für eine Abbildung A: $R^n \to R^n$ und für einen reellen Eigenwert $l$ von A sei $E_l$ der Eigenraum zu diesem Eigenwert.
Weiter sei $E_{l,\bar{l}}$ für ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $l$ und $\bar{l}$ gleich dem Durchschnitt von $R^n$ mit der direkten Summe der entsprechend definierten Eigenräume $E_l$ und $E_{\bar{l}}$ für die Fortsetzung von A auf $C^n$, d. h. $E_{l,\bar{l}} = R^n \cap E_l \oplus E_{\bar{l}}$.

$$E^s = E^s(A) = \bigoplus_{|l|<1} E_l \oplus \bigoplus_{|l|<1} E_{l,\bar{l}} \qquad (\textit{kontrahierender Unterraum}) \tag{1.1}$$

$$E^u = E^u(A) = \bigoplus_{|l|>1} E_l \oplus \bigoplus_{|l|>1} E_{l,\bar{l}} \qquad (\textit{expandierender Unterraum}) \tag{1.2}$$

Die Eigenräume $E^s$ und $E^u$ sind invariant unter A, und A ist offenbar genau dann hyperbolisch, falls gilt: $R^n = E^s \oplus E^u$

**1.1 Definition**
Sei $0 \leq l < m$.

(a) Von einer Folge invertierbarer linearer Abbildungen

$$L_m : R^n \to R^n, \quad m \in Z, \tag{1.3}$$

sagt man, sie gestatte ein $(l, m)$ -***Splitting***, falls für alle $m \in Z$ eine Zerlegung

$$R^n = E^s_m \oplus E^u_m \tag{1.4}$$

existiert mit

$$L_m E^s_m = E^s_{m+1}, \quad L_m E^u_m = E^u_{m+1} \tag{1.5}$$

und

$$\left\| L_m\big|_{E^s_m} \right\| \leq l, \quad \left\| L^{-1}_m\big|_{E^u_{m+1}} \right\| \leq m^{-1} \tag{1.6}$$

(b) Wir sagen die Folge $(L_m)_{m \in Z}$ gestatte ein ***exponetielles*** $(l, m)$ -***Splitting***, falls sie ein $(l, m)$ -Splitting gestattet und falls zusätzlich gilt:

$$l < 1 \text{ und } \dim E^s_m \geq 1 \tag{1.7}$$

oder

$$m > 1 \text{ und } \dim E^u_m \geq 1. \tag{1.8}$$

(c) Wir nennen die Folge $(L_m)_{m\in Z}$ ***hyperbolisch*** (oder ***gleichmäßig hyperbolisch***), falls sie ein $(l, m)$-Splitting gestattet mit $l < 1 < m$.

**Bemerkung**

$E^s_m$ (bzw. $E^u_m$) ist isomorph zu $R^k \times \{0\}$ (bzw. $\{0\} \times R^{n-k}$).

**1.2 Definition**

$M$ sei eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Menge, $f: U \to M$ sei ein $C^1$-Diffeomorphismus auf sein Bild, und $\Lambda \subseteq U$ sei eine kompakte $f$-invariante Menge. Man nennt $\Lambda$ eine ***hyperbolische Menge***, falls eine Riemannsche Metrik auf $U$ existiert und $l < 1 < m$ so, daß für jeden Punkt $x \in \Lambda$ die Folge der Ableitungen

$$D_{f^n(x)} f : T_{f^n(x)} M \to T_{f^{n+1}(x)} M \text{, n} \in Z, \tag{1.9}$$

ein $(l, m)$-Splitting gestattet.

**Bemerkung**

Wir bezeichnen das hyperbolische Splitting in einem Punkt $x \in \Lambda$ mit $E^s_x \oplus E^u_x$.

**1.3 Beispiele**

*(a) Hyperbolischer Fixpunkt*

Es gelte $f(p) = p$ für $p \in M$, und $D_p f$ ist eine hyperbolische Abbildung. Dann ist $D_p f$ ein Isomorphismus von $T_p M$ auf sich selbst. Mit

$$E^s_p = E^s(D_p f), \; E^u_p = E^u(D_p f) \tag{1.10}$$

ist dann

$$T_p M = E^s_p \oplus E^u_p \tag{1.11}$$

ein $(l, m)$-Splitting, wobei $l$ gleich dem Supremum aller Eigenwerte von $D_p f$ kleiner als 1 und $m$ entsprechend gleich dem Infimum aller Eigenwerte größer als 1 gewählt wird. (Die Normabschätzungen (1.6) beziehen sich auf irgendeine Riemannsche Norm auf $T_p M$).

(b) *Hyperbolischer periodischer Orbit*

$p \in M$ ist ein hyperbolischer periodischer Punkt von $f$ der Periode n, falls

$$D_p f^n : T_p M \to T_p M \tag{1.12}$$

eine hyperbolische lineare Abbildung ist, d. h., alle Eigenwerte von $D_p f^n$ haben Absolutbetrag ungleich 1. $O_f(p)$ sei der Orbit von $p$ und $U = U(O_f(p))$ eine zusammenhängende offene Umgebung von $O_f(p)$. Da $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, existiert eine Riemann-Metrik auf $M$ und damit auch auf $U$, die auf jedem Tangentialraum $T_p M$, $p \in U$, eine Vektornorm $\|\cdot\|_p$ mit einer zugeordneten Matrixnorm induziert.

Für $x \in O_f(p)$ betrachten wir die Folge der linearen Abbildungen

$$D_{f^n(x)} f : T_{f^n(x)} M \to T_{f^{n+1}(x)} M \text{, n} \in \text{Z.} \tag{1.13}$$

Es gilt

$$T_x M \xrightarrow{D_x f} T_{f(x)} M \xrightarrow{D_{f(x)} f} T_{f^2(x)} M \to \ldots \xrightarrow{D_{f^{n-1}(x)} f} T_x M \text{ .} \tag{1.14}$$

Sei $D_x f^n := D_{f^{n-1}(x)} f \circ D_{f^{n-2}(x)} f \circ \ldots \circ D_{f(x)} f \circ D_x f$ . (1.15)

Wir behaupten zunächst, daß die Eigenwerte von $D_p f^n$ und $D_x f^n$ für alle $x \in O_f(p)$ dieselben sind. Dazu sei $u \in T_p M$ und $\lambda \in$ R ein Eigenwert von $D_p f^n$ so, daß gilt

$$D_p f^n(u) = D_{f^{n-1}(p)} f \circ \ldots \circ D_p f(u) = \lambda u \text{ .} \tag{1.16}$$

$f : U \to M$ ist ein Diffeomorphismus, also sind alle Tangentialabbildungen $D_{f^k(p)} f$ Isomorphismen. Dann existiert genau ein $v \in T_{f^{n-1}(p)} M$ mit

$$u = D_{f^{n-1}(p)} f(v) \text{,} \tag{1.17}$$

und aufgrund der Linearität von $D_x f$ gilt weiter

$$D_p f^n(u) = D_p f^n(D_{f^{n-1}(p)} f(v)) = D_{f^{n-1}(p)} f(\lambda v) \text{ .} \tag{1.18}$$

Anwendung von $(D_{f^{n-1}(p)} f)^{-1}$ auf beide Seiten ergibt:

$$D_{f^{n-1}(p)} f^n(v) = D_{f^{n-2}(p)} f \circ \ldots \circ D_p f \circ D_{f^{n-1}(p)} f(v) = \lambda v \text{,} \tag{1.19}$$

d. h., $\lambda$ ist auch Eigenwert von $D_x f^n$ für x = $f^{n-1}(p)$. Aus der n-maligen Durchführung dieses Beweisschrittes (und einem Rollentausch von $x$ und $p$) folgt die Zwischenbehauptung, und folglich sind die Tangentialabbildungen $D_x f^n$ für alle $x \in O_f(p)$ hyperbolisch.

$D_{f^m(x)} f^n$ ist aufgrund unserer Zwischenbehauptung hyperbolisch, also können wir $T_{f^m(x)}M$ darstellen als direkte Summe des kontrahierenden und des expandierenden Unterraums von $D_{f^m(x)} f^n$, d. h.,

$$T_{f^m(x)}M = E^s(D_{f^m(x)} f^n) \oplus E^u(D_{f^m(x)} f^n) = E^s_m \oplus E^u_m \tag{1.20}$$

mit

$$E^s_m := E^s(D_{f^m(x)} f^n) \text{ und } E^u_m := E^u(D_{f^m(x)} f^n). \tag{1.21}$$

Dies gilt für m = 0, ... , n-1.

Sei jetzt $x \in O_f(p)$ beliebig, aber fest. Wir betrachten die Folge der Tangentialabbildungen

$$L_m := D_{f^m(x)} f : T_{f^m(x)}M \to T_{f^{m+1}(x)}M, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{1.22}$$

Es gilt $L_m = L_{m(\bmod n)}$, und da $f$ ein Diffeomorphismus ist, sind die Abbildungen $L_m$ invertierbar.

Zum Nachweis, daß gilt

$$L_m E^s_m = E^s_{m+1}, \tag{1.23}$$

sei $u \in E^s_m$ und

$$D_{f^m(x)} f^n(u) = \boldsymbol{c} u, \ |\boldsymbol{c}| < 1. \tag{1.24}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} D_{f^{m+1}(x)} f^n(L_m(u)) &= D_{f^{m+1}(x)} f^n(D_{f^m(x)} f(u)) \\ &= D_{f^m(x)} f(D_{f^m(x)} f^n(u)) \\ &= L_m(\boldsymbol{c} u) \\ &= \boldsymbol{c} L_m(u), \end{aligned} \tag{1.25}$$

d. h. $L_m(u) \in E^s_{m+1}$ für alle $u \in E^s_m$. (1.26)

Genauso zeigt man $L_m^{-1} E^s_{m+1} \subseteq E^s_m$. (1.27)

Also gilt $L_m E^s_m = E^s_{m+1}$. (1.28)

Der Nachweis von $L_m E^u_m = E^u_{m+1}$ (1.29)

verläuft analog.

Zum Nachweis, daß das Tangentialraumsplitting (1.20) hyperbolisch ist, fehlen uns noch die Abschätzungen (1.6) mit geeigneten Konstanten $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{l} < 1 < \boldsymbol{m}$. Wir beschränken uns in den nachfolgenden Überlegungen auf die kontrahierenden Unterräume $E^s_x$, x$\in O_f(p)$, die entsprechenden Resultate auf $E^u_x$ erhält man analog.

Sei $x \in O_f(p)$, $u \in E_x^s$ und $\boldsymbol{l} := \sup\{|\boldsymbol{c}| \,|\, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{s}(D_x f^n), |\boldsymbol{c}| < 1\}$ (1.30)

Für k $\geq$ 0, k = ln+m, m$\in$ {0, ... , n-1}, folgt dann

$$\|D_x f^k(u)\| = \|D_{f^m(x)} f^{l*n}(D_{f^{m-1}(x)} f \circ \ldots \circ D_x f(u))\| \leq \boldsymbol{l}^l c_n \|u\| \tag{1.31}$$

mit $c_n = (\max_{0 \leq m \leq n-1} \|L_m\|)^n$. Daraus ergibt sich wegen $0 < \boldsymbol{l} < 1$ mit $C = c_n \boldsymbol{l}^{\frac{1-n}{n}}$ und $\boldsymbol{l}_n = \sqrt[n]{\boldsymbol{l}}$ (n ist die Orbitlänge, also konstant) die Abschätzung

$$\|D_x f^k(u)\| \leq C \boldsymbol{l}_n^k \|u\|. \tag{1.32}$$

Mit

$$\boldsymbol{m} := \inf\{|\boldsymbol{c}| \,|\, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{s}(D_x f^n), |\boldsymbol{c}| > 1\} \tag{1.33}$$

und $\boldsymbol{m}_n = \sqrt[n]{\boldsymbol{m}^{-1}}$ erhält man analog für $u \in E_x^u$

$$\|D_x f^{-k}(u)\| \leq C \boldsymbol{m}_n^k \|u\|, \tag{1.34}$$

wobei in beiden Ungleichungen dieselbe Konstante vorkommen darf.

Die Abschätzungen (1.32) und (1.34) sind unabhängig von der speziellen Metrik, da auf $E_x^s$ (bzw. $E_x^u$) alle Normen äquivalent sind (lediglich die Konstante ändert sich). Aber sie garantieren noch kein $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})$-Splitting im Sinne von Definition 1.1. Die noch ausstehenden Abschätzungen (1.6) folgen erst nach geeigneter Anpassung der Riemann Metrik. Dahinter steckt ein wichtiges Resultat, das wir unabhängig vom Beispiel als eigenständigen Satz formulieren wollen:

**1.4 Satz**

Unter den Voraussetzungen von Definition 1.2 existiere auf $\Lambda$ ein $Df$ ***-invariantes Splitting***, d. h., für jedes $x \in \Lambda$ gebe es eine Zerlegung des Tangentialraumes

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^u \tag{1.35}$$

mit

$$D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s \quad \text{und} \quad D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u, \tag{1.36}$$

und für ein Riemannsche Metrik auf $U$ gebe es Konstanten $C > 0$ und $0 < \boldsymbol{l} < 1$, so daß für alle k$\geq$0 gilt:

$$\begin{aligned} &\|D_x f^k(u)\| \leq C \boldsymbol{l}^k \|u\| \quad \text{für } u \in E_x^s, \\ \text{und} \\ &\|D_x f^{-k}(v)\| \leq C \boldsymbol{l}^k \|v\| \quad \text{für } v \in E_x^u. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Dann ist $\Lambda$ ein hyperbolische Menge.

**Bemerkung**
Die Mehrzahl der Autoren wählt diese von der speziellen Riemann Metrik unabhängige Formulierung als Definition einer hyperbolischen Menge.

**Fortsetzung des Beispiels 1.3 (b):**
Mit $\boldsymbol{l} = \max(\boldsymbol{l}_n, m_n)$ erfüllen (1.32) und (1.34) die Ungleichungen (1.37). Nach Satz 1.7 ist ein hyperbolischer periodischer Orbit also ein hyperbolische Menge.

**Beweis von Satz 1.4**:
Wir müssen eine geeignete Riemannsche Metrik finden, mit der die Abschätzungen (1.6) erfüllt sind, und zwar tun wir dies für $0 < \boldsymbol{l} = m^{-1} < 1$. Wir definieren eine neue Metrik

$$\langle u, v\rangle_x' = \sum_{k=0}^{n-1} \langle D_x f^k(u), D_x f^k(v)\rangle_x\,, \quad u, v \in E_x^s, \tag{1.38}$$

für $x \in U$ $(\Lambda \subseteq U, U$ offen), wobei n so groß gewählt ist, daß für $C$ und $\boldsymbol{l}$ aus (1.37) gilt:

$$C\,\boldsymbol{l}^n << 1. \tag{1.39}$$

Analog definiert man $\langle u, v\rangle_x'$ mit $f^{-k}$ anstelle von $f^k$ für $u, v \in E_x^u$, und setzt $\langle u, v\rangle_x' = 0$ für $u \in E_x^s$ und $v \in E_x^u$. Man zeigt leicht, daß auf diese Weise eine Riemannsche Metrik auf $U$ definiert ist.
Aus (1.38) erhält man für die zugehörige Norm die Darstellung

$$\|u\|_x'^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \|Df^k(u)\|_x^2\,, \quad u \in E_x^s. \tag{1.40}$$

Für $u \in E^s$ folgt

$$\begin{aligned}
\|Df(u)\|_x'^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \|Df^k(Df(u))\|_x^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \|Df^{k+1}(u)\|_x^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \|Df^k(u)\|_x^2 \qquad (1.41)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \|Df^k(u)\|_x^2 + \|Df^n(u)\|_x^2 - \|u\|_x^2.
\end{aligned}$$

Mit (1.37), d. h., mit

$$\|Df^n(u)\|_x \le C\,\boldsymbol{l}^n \|u\|_x \tag{1.42}$$

erhalten wir

$$\|Df(u)\|_x'^2 \le \|u\|_x'^2 - \|u\|_x^2 (1 - (C\,\boldsymbol{l}^n)^2)\,. \tag{1.43}$$

Durch wiederholte Anwendung von (1.37) erhalten wir

$$\|u\|_x^{'2} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| Df^k(u) \right\|_x^2 \le \|u\|_x^2 + C^2 l^2 \|u\|_x^2 + \ldots + C^2 l^{2(n-1)} \|u\|_x^2 \le C^2 n \|u\|_x^2, \tag{1.44}$$

bzw.
$$\frac{\|u\|_x^{'2}}{C^2 n} \le \|u\|_x^{'2}. \tag{1.45}$$

Dann folgt
$$\|Df(u)\|_x^{'2} \le \|u\|_x^{'2} - \frac{\|u\|_x^{'2}}{C^2 n}(1-(C l^n)^2) \tag{1.46}$$

und somit
$$\|Df(u)\|_x^{'2} \le \left(1 - \frac{1-(C l^n)^2}{C^2 n}\right) \|u\|_x^{'2}. \tag{1.47}$$

Setzt man nun
$$s = \sqrt{1-(1-(C l^n)^2)/C^2 n}, \tag{1.48}$$

dann gilt (n war fest gewählt)
$$\|Df(u)\|' \le s \|u\|' \quad \text{mit } 0 < s < 1. \tag{1.49}$$

Der gleich Beweis funktioniert genauso für $Df^{-1}\big|_{E^u}$, damit sind die Abschätzungen (1.6) mit $s = l = m^{-1}$ sinngemäß erfüllt.

**1.5 Satz**

Unter den Voraussetzungen von Definition 1.2 sei $\Lambda$ eine hyperbolische Menge für einen Diffeomorphismus $f: U \to M$, dann gilt: Die Dimensionen der Unterräume $E_x^s$ und $E_x^u$ aus dem hyperbolischen Splitting $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ sind lokal konstant, und die Unterräume selbst ändern sich stetig mit $x$.

**Beweis**

Sei $\dim M$ = m. Aus der Definition folgt für jedes $x \in \Lambda$, $v \in E_x^s$ und n $\ge$ 0
$$\left\| D_x f^n(v) \right\| \le l^n \|v\|. \tag{1.50}$$

Für eine Folge $(x_n) \subset \Lambda$, $x_n \to x$, können wir, indem wir gegebenenfalls immer wieder zu Teilfolgen übergehen, annehmen, daß gilt:
$$\dim E_{x_n}^s = const =: k, \tag{1.51}$$

und daß man in jedem linearen Raum $E_{x_n}^s$ eine Orthonormalbasis
$$(v_n^{(1)}, \ldots, v_n^{(k)}) \tag{1.52}$$

wählen kann, so daß gilt
$$\lim_{n\to\infty} v_n^{(i)} = v^{(i)} \in T_x M, \quad i = 1, \ldots, k \tag{1.53}$$

(dies folgt aus der Isomorphie von $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ und R$^m$ $\forall x \in \Lambda$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß).

Als beschränkte lineare Abbildung ist $D_x f^n$ stetig, und aus den Abschätzungen (1.50) für $v = v_n^{(i)}$ folgt (1.50) auch für $v_n^{(i)}$, d. h.,
$$\left\| D_x f^n(v^{(i)}) \right\| \le l^n \left\| v^{(i)} \right\|. \tag{1.54}$$

Daraus folgt $v^{(i)} \in E_x^s$ und weiter $\dim E_x^s \geq k$ (denn die $v^{(i)}$ sind linear unabhängige Vektoren in $E_x^s$) sowie

$$\lim_{n\to\infty} E_{x_n}^s \subseteq E_x^s\,, \tag{1.55}$$

wobei der Limes punktweise zu verstehen ist, d. h., für jede Folge $(v_n)$, $v_n \in E_{x_n}^s$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \in E_x^s$.

In analoger Weise sind die Vektoren $v \in E_x^u$ charakterisiert durch die Ungleichungen

$$\left\| D_x f^{-n}(v) \right\| \leq \lambda^{-n} \left\| v \right\| \tag{1.56}$$

für alle n $\geq$ 0 und eine Wiederholung der obigen Beweisschritte ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} E_{x_n}^u \subseteq E_x^u \tag{1.57}$$

und

$$\dim E_x^u \geq m - k\,. \tag{1.58}$$

Daraus folgt aber

$$E_x^s = \lim_{n\to\infty} E_{x_n}^s \quad \text{und} \quad E_x^u = \lim_{n\to\infty} E_{x_n}^u \tag{1.59}$$

und die behauptete Konstanz der Dimensionen.

**1.6 Korollar**

Die Unterräume $E_x^s$ und $E_x^u$ sind ***gleichmäßig transversal***, d. h., es existiert $\alpha_0 > 0$ derart, daß für jedes $x \in \Lambda$ und für alle $u \in E_x^s$, $v \in E_x^u$ der Winkel zwischen $u$ und $v$ wenigstens gleich $\alpha_0$ ist.

**Beweis**

Sei $\alpha(x)$ der kleinere Winkel zwischen $u \in E_x^s$ und $v \in E_x^u$. Wegen $E_x^s \cap E_x^u = \{0\}$ gilt $\alpha(x) > 0$, und nach Satz 1.5 ist $\alpha(x)$ eine stetige Funktion auf $\Lambda$. $\Lambda$ ist kompakt, und daher nimmt $\alpha(x)$ ihr Minimum $\alpha_0$ an, d. h., es gilt $\alpha_0 > 0$.