Ljapunov Exponenten

Reiner Lauterbach

28. Februar 2003

Zusammenfassung
In diesem Teil betrachten wir ein wichtiges Thema: sensitive Abhängigkeit. Zunächst hat man ja stetige Abhängigkeit, wie man sie aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen kennt. Dies schienen im Widerspruch zur neuen Theorie chaotischer Dynamik zu sein. Doch beide stehen im Einklang, nur ist im Fall chaotischer Dynamik, die stetige Abhängigkeit nicht die wesentlichste Erkenntnis.

Kapitel 1

Ergodische Maße

1.1 Absolute Stetigkeit

Wir betrachten die Situation in $\mathbb{R}$ oder für ein Intervall in $\mathbb{R}$. Wohlbekannt ist uns die σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen und der Begriff des Maßes. Ist $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ ein Maß mit $\mu(I) = 1$, so nennen wir μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Zu einem Maß μ gibt es einen Integralbegriff

$$f \mapsto \int\limits_I f \, d\mu,$$

und einen Begriff der Integrierbarkeit, Ausgangspunkt sind Treppenfunktionen.

Hat man zwei Maße μ, ν, so stellt sich die Frage des Vergleichs, ein möglicher Vergleich, ist die Existenz einer Funktion $\rho : I \to \mathbb{R}$, die μ-integrierbar ist, und für die gilt

$$\nu(A) = \int\limits_I \rho \chi_A \, d\mu.$$

Gilt diese Identität für alle $A \in \mathcal{B}$, so schreiben wir $\nu = \rho\mu$ und nennen ρ eine Dichte.

Besitzt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, so nennen wir μ absolut stetig.

Beispiel 1.1.1 *1. Es sei I ein Intervall, $x \in I$ und*

$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad x \in A \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dann ist μ nicht absolut stetig.

2. *Ist $f \geq 0$ und $f \in L^1(I)$, so ist*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\lambda$$

   absolut stetig (trivialerweise).

3. *Ist $B \subset I$ eine meßbare Menge, so ist*

$$\nu(A) = \lambda(A \cap B)$$

   absolut stetig und genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\lambda(B) = 1$.

Wir kommen zum Zusammenhang mit diskreten dynamischen Systemen, gegeben sei also $f : I \to I$ stetig.

Definition 1.1.2 1. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ heißt invariant (oder besser f-invariant), falls*

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

   für alle $A \in \mathcal{B}$ ist.

2. *Ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß heißt ergodisch, wenn aus*

$$f^{-1}(A) = A \text{ folgt } \mu(A) = 0 \text{ oder } \mu(A) = 1.$$

Lemma 1.1.3 *Ein f-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ ist genau dann ergodisch, wenn aus*

$$\mu = \alpha\nu_1 + (1 - \alpha)\nu_2$$

mit invarianten Maßen $\nu_i, i = 1, 2$ folgt $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$.

Beweis. Wir zeigen nur eine Richtung: ist μ nicht als Konvexkombination invarianter Maße darstellbar, so ist μ ergodisch.

Angenommen μ ist invariant, $A = f^{-1}(A)$ und $0 < \mu(A) < 1$. Setze für $B \in \mathcal{B}$

$$\nu_1(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$$

$$\nu_2(B) = \frac{\mu((I \setminus A) \cap B)}{\mu(I \setminus (A))}.$$

Dann gilt offensichtlich ν_i ist invariant, denn z.B. für $i = 1$ ist

$$\nu_1(f^{-1}(B)) = \frac{\mu(A \cap f^{-1}(B))}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(A \cap B))}{\mu(A)} = \nu_1(B).$$

Außerdem ist

$$\mu = \mu(A)\nu_1 + \mu(I \setminus A)\nu_2. \tag{1.1}$$

Also ist μ in diesem Fall nicht ergodisch.

Für die Rückrichtung benötigt man mehr Werkzeug.

Ohne Beweis geben wir den berühmten Birkhoffschen Ergodensatz an.

Satz 1.1.4 (Birkhoff) *Gegeben sei ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Abbildung $T : X \to X$, welche maßerhaltend sei, f sei in $L^1(X, \mu)$. Dann existiert für fast alle $x \in X$ der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(T^k x).$$

Beweis. Katok, Hasselblatt S. 136. Benötigt den Satz von Radon-Nykodym. □

Aus diesem Satz folgt sofort die Existenz der Grenzwerte im folgenden Satz.

Satz 1.1.5 *Es sei $f : I \to I$ von der Klasse C^1 und μ sei ein f invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann gilt*

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df}{dx}(f^k(x)) \right|$$

   existiert μ fast überall.

2. *Ist μ ergodisch, dann ist der angegebene Grenzwert μ-fast überall*

$$\int_I \ln \left| \frac{df}{dx}(x) \right| \, \mathrm{d}\mu.$$

Beispiel 1.1.6 *Zeltabbildung:*

$$Tx(= \begin{cases} 2x, & \textit{für} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \textit{für} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

und das Lebesgue-Maß ist ein invariantes Maß.

$f(x) = 4x(1-x)$. *Ein invariantes Maß ist*

$$\mu = h\ d\lambda, h = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Die Existenz invarianter Maße ist der Hintergrund von Untersuchungen mittels Histogrammen, zählen von Besuchswahrscheinlichkeiten für typische Punkte. Beispiele kann man leicht sehen. Anzahl der Iterationen ist wichtig für die Approximation an die Dichtefunktion.

Definition 1.1.7 *Ist $f : I \to I$ von der Klasse C^1, und existiert ein ergodisches Maß, so heißt*

$$\lambda_f = \int_I \varphi_f(x)\ d\mu$$

Ljapunov-Exponent. Es gilt μ fast überall

$$\lambda_f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x) \right|.$$

Ansonsten spricht man auch von x abhängigen Ljapunov-Exponenten.

1.2 Konjugation und Ljapunov-Exponenten

Wie verhalten sich Ljapunov-Exponenten unter Konjugation?

1.3 Sensitive Abhängigkeit

Die sensitive Abhängigkeit ist das was als Chaos bezeichnet wird. Allerdings gibt es keine einheitliche Definition von Chaos: mögliche Ansätze
exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien (im kleinen)
auseinanderlaufen bis zu einem gewissen $\varepsilon > 0$.

Definition 1.3.1 *1. f besitzt sensitive Abhängigkeit im Sinne von Li und Yorke, falls eine überabzählbare Menge $X \subset I$ existiert mit: für alle $x, y|inX$, $x \neq y$ ist*

$$\liminf_{n\to\infty} |f^(x) - f^n(y)| = 0 \text{ und } \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0.$$

2. *(Guckenheimer) existiert* $S \subset I$ *mit* $\lambda(S) > 0$ *und ein* $\varepsilon > 0$*, so dass für jedes* $x \in S$ *und jede Umgebung* U *von* x *ein* $y \in U \cap S$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *existiert, mit*
$$|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon.$$

3. *(Ruelle) Falls ein ergodisches Maß existiert, so dass der zugehörige Ljapunov Exponent positiv ist.*