Eindimensionale Dynamik

Reiner Lauterbach

25. Februar 2003

Zusammenfassung Wir beginnen mit der Definition dynamischer Systeme, und betrachten dann eindimensionale dynamische Systeme. Wir werden kurz begründen warum solche Systeme wichtig sind.

Kapitel 1

Dynamische Systeme

1.1 Nichtlineare Dynamik

Wir kennen diskrete Dynamik als Poincare-Abbildung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. In diesem Zusammenhang treten diskrete dynamische Systeme auf natürliche Weise auf. Allerdings bildet auch jede Iteration ein diskretes dynamisches System. Wählt man einen **Anfangswert** so liefert ein solches System eine Folge von Punkten entweder in $\mathbb{R}$ oder auch in $\mathbb{R}^n$. Ziel unseres Seminares ist es gewisse Eigenschaften solcher Systeme zu verstehen und Methoden zu entwickeln, solche Systeme zu untersuchen. Wir werden in Kürze sehen, dass selbst einfache Systeme ein recht komplexes dynamisches Verhalten hervorrufen können. Dies einzusehen dient unsere heutige Vorlesung.

1.2 Diskrete dynamische Systeme

Definition 1.2.1 *Eine Zeitmenge ist eine der folgenden Mengen:*

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+ = \left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; z \geq 0 \right\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 0 \right\}.$$

Man beachte, dass Zeitmengen erstens Halbgruppen (bezüglich der Addition) und zweitens auf einfache Weise metrische Räume sind. Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum (im Moment ist ein metrischer Raum (M, d) eine hinreichend gute Vorstellung) mit der Hausdorffschen Trennungseigenschaft und $\mathbb{T}$ eine Zeitmenge.

Definition 1.2.2 *Eine Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$$

heißt ein dynamisches System auf M *zur Zeitmenge* $\mathbb{T}$*, wenn gilt*

1. $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}$.

2. $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$

3. Φ *ist stetig.*

Beispiele für dynamische Systeme sind

1. Der Fluß einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

2. Wir betrachten eine Iterationsvorschrift, z.B. das Heronsche Verfahren

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Ein dynamisches System heißt *diskret*, falls $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ und kontinuierlich im anderen Fall. Eine Vorstellung von der Reichhaltigkeit dynamischer Systeme erhält man vielleicht, wenn man sich zunächst mit dem Fall $M = \mathbb{R}$ oder M ist ein Intervall in $\mathbb{R}$ befasst. Solche Systeme nennen wir eindimensional.

1.3 Eindimensionale diskrete Systeme

Wir betrachten nun einfach ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung

$$f : I \to I.$$

Die Abbildung

$$\Phi(n, x) = f^n(x)$$

stellt ein dynamisches System auf I dar. Einfachste Beispiele sind $I = [-1, 1]$ und

1. $f(x) = \sin(x)$.
2. $f(x) = \cos(x)$.
3. $f(x) = \sin(2x)$.
4. $f(x) = \sin(3x)$.

Wir sind interessiert am **Langzeitverhalten** der produzierten Folgen. Zur Untersuchung der verschiedenen Verhaltensweisen definieren wir einige grundlegenden Begriffe.
Ausgangspunkt: Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $f : M \to M$ eine stetige Abbildung (Stetigkeit muss nicht immer verlangt werden).

Definition 1.3.1 *1. Die Menge*

$$\mathcal{O}_f^+(x_0) = \left\{ f^n(x_0) \;\middle|\; n \geq 0 \right\}$$

heißt positiver Halborbit von x_0. Ist f injektiv, so können wir ganz entsprechend auch vom negativen Halborbit und vom Orbit sprechen.

2. *Die Menge der Häufungspunkte des positiven Halborbits bezeichnet man als ω-Limesmenge.*

3. *Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt Ruhelage, oder auch Gleichgewichtslage des von f induzierten dynamischen Systems, falls $f(x_0) = x_0$.*

4. *Eine Ruhelage x_0 heißt stabil, wenn zu jeder offenen Umgebung V von x_0 eine offene Umgebung W von x_0 gibt, mit $\Phi(n, x) \in V$ für alle $x \in W$ und alle $n \geq 0$.*

5. *Eine Ruhelage x_0 heißt asymptotisch stabil, wenn es x_0 eine stabile Ruhelage ist, und für eine Umgebung U von x_0 gilt $x \in U$ impliziert*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(n, x) = x_0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass in den ersten drei oben genannten Beispielen, jeweils eine Ruhelage existiert:

1. $x = 0$ ist stabil, ja sogar asymptotisch stabil.
2. Die Ruhelage löst $x = \cos(x)$ und ist asymptotisch stabil.
3. Die Ruhelage löst $x = \sin(2x)$ und ist ebenfalls asymptotisch stabil.

Man überzeugt sich leicht, dass ich im dritten Beispiel Ruhelagen existieren, diese aber nicht stabil sind. Bevor wir entsprechende Kriterien herleiten, wollen wir zumindest für den eindimensionalen Fall eine graphische Methode des Iterierens betrachten. Eine typische Iteration sieht wie folgt aus:

1. Wir betrachten den Graphen von f
2. Wir wählen einen Startpunkt x_0 und suchen den Bildpunkt.
3. Dann spiegeln wir den Bildpunkt an der Winkelhalbierenden und gewinnen damit den aktuellen Wert der Folge.
4. Wiederhole diese Prozedur . . . .

Nun kann man dieses Vorgehen etwas straffen:

1. Wir betrachten den Graphen von f.
2. Wir wählen einen Startpunkt x_0 und suchen den Bildpunkt.
3. Wir gehen zur Winkelhalbierenden.
4. Dann gehen wir erneut zum Graphen.
5. Wir wiederholen dieses Vorgehen, nochmals und nochmals, usw., usw..

Ein Spezialfall ergibt sich für $f(x) = 1 - x$. Graph, Anfangswert und Iteration In diesem Beispiel würde man die Paare $(x, f(x))$ als periodische Punkte bezeichnen. Wir wollen diesen Begriff allgemein einführen.

Definition 1.3.2 *1. Ist $n \geq 1$ und $x_0 = f^n(x_0)$, so nennt man x_0 einen periodischen Punkt, das minimale n für das diese Gleichheit gilt, wird als* Periode *bezeichnet.*

2. Ist x_0 ein periodischer Punkt der Periode n, so ist

$$P = \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$$

ein periodischer Orbit der Länge n.

Man kann die Stabilität und der asymptotischen Stabilität sofort auf die periodischen Orbits übertragen.

Man beachte, dass periodische Orbits der Länge 1 gerade Ruhelagen sind.

Ein erstes Kriterium für die Stabilität, bzw. asymptotische Stabilität ist das folgende.

Satz 1.3.3 *1. Eine Gleichgewichtslage $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ ist stabil, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für $x \in U$ gilt*

$$-|x - x_0| \leq |f(x) - x| \leq |x - x_0|.$$

2. Eine Gleichgewichtslage ist $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ asymptotisch stabil, wenn wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U gibt, so dass für $x \in U$ gilt

$$-(1 - \varepsilon)|x - x_0| \leq |f(x) - x| \leq (1 - \varepsilon)|x - x_0|.$$

Beweis. Übungsaufgabe □

Man kann die Bedingung leicht graphisch interpretieren: der Graph von f liegt zwischen der Winkelhalbierenden und der Antiwinkelhalbierenden durch x_0.

Korollar 1.3.4 *Ist f stetig differenzierbar, so ist notwendig für die Stabilität der Gleichgewichtslage x_0, dass $|f'(x_0)| \leq 1$ und $|f'(x_0)| < 1$ ist hinreichend für asymptotische Stabilität.*

Beweis. Offenkundig? □

Die Definition der Stabilität und die Kriterien dafür, lassen sich sofort auf f^n anwenden und liefern entsprechende Aussagen für periodische Orbits.

1.4 Attraktoren

Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

Definition 1.4.1 1. *Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt invariant, wenn $f(A) = A$.*

2. *Eine abgeschlossene Menge*[1] *A heißt attraktiv, wenn es eine Umgebung U von A gibt, so dass für jede Umgebung V von A ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $n > N$ gilt $f^n(U) \subset V$.*

3. *Eine solche Umgebung U wird als Fundamentalumgebung bezeichnet.*

Für metrische Räume hat man folgendes Kriterium.

Satz 1.4.2 *Eine Umgebung U einer kompakten, attraktiven Menge A ist genau dann eine Fundamentalumgebung, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > N$ und alle $x \in U$ gilt*

$$d(f^n(x), A) < \varepsilon.$$

Beweis. Einfache Aufgabe! $\square$

Definition 1.4.3 *Die Menge der Punkte*

$$E_f(A) = \left\{ x \in M \;\middle|\; d(f^n(x), A) = 0 \right\}$$

heißt Einzugsbereich von einer kompakten Menge A.

Satz 1.4.4 *Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $f : M \to M$ eine Abbildung. Es sei $A \subset M$ attraktiv mit Fundamentalumgebung U. Dann ist A genau dann invariant, falls gilt*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U).$$

Beweis. Die so definierte Menge sei invariant. Setze

$$U_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x).$$

[1] die Abgeschlossenheit muss hier nicht unbedingt gefordert werden

Nun ist
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}(A).$$
Also folgt
$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(U) \subset A.$$
Mit $f(A) = A$ folgt $A = f^n(A) \subset f^n(U)$. Damit ist $A \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$ und damit hat man die Gleichheit.

Sei nun die Gleichheit vorausgesetzt. Dann ist
$$A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U),$$
Für $x \notin f(A)$ ist $A \subset f^{-1}(M \setminus \{x\|)$. Da A abgeschlossen ist, gibt es eine Umgebung V von A mit $x \notin V$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(U) \subset V$ (da U Fundamentalumgebung ist). Also ist
$$f^n(U) \subset f^{-1}(X \setminus \{x\}).$$
Insbesondere ist
$$f^{n+1}(U) \subset X \setminus \{x\},$$
also $A \subset X \setminus \{x\}$ oder $x \notin A$ und damit $A \subset f(A)$.

Für hinreichend große n ist $f^n(U) \subset U$ (nach Definition) und daher
$$\bigcap_{n\geq 1} f^n(U) = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$$
und daher
$$f(A) = f\left(\bigcap_{n\geq 0} f^n(U)\right) \subset \bigcap_{n\geq 1} f^n(U) = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U) = A.$$
$\square$

Satz 1.4.5 *Sei M kompakt, f stetig, U offen in M mit*
$$f(\overline{U}) \subset U.$$

Dann ist

$$A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$$

eine kompakte, invariante, attraktive Menge in M und U ist Fundamentalumgebung von A.

Beweis. Es gilt

$$\bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U}) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(U) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}).$$

Also ist

$$A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}).$$

Damit ist A abgeschlossen, also kompakt. (Beachte stetige Bilder von Kompakta sind kompakt, hier wird M kompakt benutzt). Sei nun V eine offene Umgebung von A. Dann gilt für n hinreichend groß:

$$M \setminus V \subset M \setminus \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = \bigcap_{n\geq 0} (M \setminus f^n(\overline{U}).$$

Damit bilden die Mengen der Form rechts eine offene Überdeckung von $M \setminus V$, wiederum Kompaktheit erlaubt uns eine endliche Teilüberdeckung auszuwählen. Mit dieser folgt

$$V \supset \bigcap_{k=1}^{m} f^{n_k}(\overline{U}).$$

Wählt man n^* die größte dieser Zahlen n_k, so ist

$$f^{n^*}(U) \subset f^{n^*}(\overline{U}) \subset V.$$

Damit sind die gewünschten Eigenschaften gezeigt. □

Satz 1.4.6 *Es sei $U \subset M$ offen, und es gebe ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$\overline{f^N(U)} \subset M$$

ist kompakt und

$$f^n(\overline{U}) \subset U$$

für alle $n > N$, so ist

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$$

eine kompakte, invariante, attraktive Teilmenge.

Beweis. Der Beweis ist eine Variation des eben vorgestellten Beweises. □

Korollar 1.4.7 *Es sei $U \subset M$offen und $\overline{f^n(U)}$ sei für $n > N$ kompakt. Dann ist*

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$$

eine kompakte, invariante, attraktive Menge in M und U ist Fundamentalumgebung von A.

Beweis.

$$f^n(\overline{U}) \subset \overline{f^n(U)} \subset U.$$

□

Satz 1.4.8 *Es sei U Fundamentalumgebung einer attraktiven, kompakten Menge. Dann ist*

$$E_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U).$$

Beweis. □

Definition 1.4.9 *Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $f : M \to M$ eine Abbildung und A invariant. f heißt topologisch transitiv auf A, wenn für jedes Paar $U, V \subset A$, welche relativ offen in A sind gilt: es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Satz 1.4.10 *Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $f : M \to M$ eine Abbildung und A invariant. Gibt es einen Orbit, der dicht in A liegt, d.h. so dass gilt*

$$A = \overline{\mathcal{O}_f^+(x)},$$

so ist f topologisch transitiv auf A.

Beweis. □

Definition 1.4.11 *Es sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $f : M \to M$ eine Abbildung und A invariant und attraktiv. Ist f topologisch transitiv auf A, so wird A als Attraktor bezeichnet.*

Bemerkung 1.4.12 *Die Vereinigung zweier attraktiver Mengen ist attraktiv, die Vereinigung zweier Attraktoren ist kein Attraktor, die Eigenschaft topologisch transitiv gibt eine gewisse Minimalitätseigenschaft.*

Kapitel 2

Unimodale Abbildungen des Intervalls

2.1 Topologische Konjugation

Definition 2.1.1 *Es seien $(M_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $f_i : M_i \to M_i$ zwei Abbildungen. Ein Homöomorphismus $\varphi : M_1 \to M_2$ heißt topologische Konjugation von f_1 und f_2, falls*

$$\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi.$$

f_1, f_2 nennt man dann topologisch konjugiert.

Ist die Abbildung φ ein C^r-Diffeomorphismus, so nennen wir f_1 und f_2 C^r-konjugiert.

Man beachte, dass topologische Konjugation eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 2.1.2 *Sind f_1 und f_2 topologisch konjugiert, so werden die Orbits von f_1 durch die Abbildung φ auf die von f_2 abgebildet.*

Beweis. Triviales Nachprüfen □

Lemma 2.1.3 *Es seien f_1, f_2 C^1-Abbildungen und topologisch konjugiert unter φ, x_0 sei ein Fixpunkt von f_1. Dann ist $\varphi(x_0)$ ein Fixpunkt von f_2 und es gilt*

$$f_2'(\varphi(x_0))D\varphi(x_0) = D\varphi(x_0)f_1(x_0)$$

Sind $f_i : I_i \to I_i, \quad i = 1, 2$ Abbildungen eines Intervalls, so ist $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$.

Beweis. □

Definition 2.1.4 *Ein Punkt x_0 heißt schließlich periodisch, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ $f^n(x_0)$ ein periodischer Punkt ist.*

Definition 2.1.5 *Es sei f von der Klasse C^1. Ein periodischer Punkt p der Periode n heißt hyperbolisch, falls $Df^n(p)$ keinen Eigenwert vom Betrag 1 hat.*

Man zeigt leicht: Für $f \in C^1$ ist p ist genau dann ein stabiler Fixpunkt von f^n, wenn alle Eigenwerte von $D(f^n)$ vom Betrag < 1 sind.

Definition 2.1.6 *Ein periodischer Orbit der Länge n heißt stabil wenn jeder Punkt des Orbits eine stabile Gleichgewichtslage von f^n ist.*

Damit folgt sofort:
sind f_1, f_2 topologisch konjugiert. Dann werden n-periodische Orbits von f_1 auf solche von f_2 abgebildet. Stabile Orbits werden auf stabile Orbits abgebildet.

2.2 Unimodale Abbildungen

Definition 2.2.1 *Eine Abbildung auf einem Intervall $I = [a, b]$ heißt unimodal, falls es ein $c \in [a, b]$ gibt mit f ist injektiv auf $[a, c)$ bzw. auf $(c, d]$ und $f(c) > f(x)$ für alle $x \neq c$.*

Definition 2.2.2

1. *Es sei $f \in C^3(I)$ und unimodal c wie oben. Die Schwarzsche Ableitung von f für $x \neq 0$ durch*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

2. *f wird S-unimodal genannt, falls f unimodal ist und für $x \neq c$ gilt $Sf(x) < 0$.*

Satz 2.2.3 *Ist f S-unimodal mit kritischem Punkt c. Dann gilt*

1. *f hat höchstens einen stabilen periodischen Orbit.*
2. *Ein stabiler periodischer Orbit attrahiert den Punkt c.*

Beweis. Siehe Literatur. □

Satz 2.2.4 *Sei $f \in C^3(I)$, $Sf(x) < 0$ für $x \neq c$. Dann gilt*

1. $Sf^n < 0$ *für* $x \neq c$.
2. $Sf < 0$ *impliziert* $|f'|$ *hat kein positives lokales Maximum.*
3. *Hat f endlich viele kritische Punkte, so gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ höchstens endlich viele periodische Orbits der Länge n.*
4. *Sind $a < b < c$ drei konsekutive Fixpunkte von f^n, so dass $[a, c]$ keinen kritischen Punkt von f^n enthält. Dann ist $g'(b) > 1$.*

Beweis. Siehe Literatur. □

Korollar 2.2.5 *Es gibt S-unimodale Abbildungen ohne stabilen periodischen Orbit.*

Beweis. $f(x) = 1 - 2x^2$ hat höchstens einen stabilen periodischen Orbit, dieser attrahiert 0. Da $f(f(0)) = -1$ und $f(-1) = -1$ ein nichtstabiles Gleichgewicht ist, folgt der Satz. □

Man kann zeigen, dass im Fall der Existenz eines stabilen periodischen Orbits, nur für eine Menge vom Maß 0 die Folgen nicht gegen diesen Orbit konvergieren.