

Das Lorenz-System

Seminar über gewöhnliche Differentialgleichungen

Uwe Jönck und Florian Prill

Februar 2003

Inhaltsangabe

1.1 Herleitung: Die Lorenzgleichungen als Idealisierung hydrodynamischer Systeme	2
1.1.1 Das Rayleigh-Bénard-Experiment	2
1.1.2 Mathematische Beschreibung	3
1.1.3 Physikalische Bedeutung der Parameter σ, β, ρ	6
1.2 Einfache Eigenschaften des Lorenz-Systems	8
1.2.1 Globale Eigenschaften	8
1.2.2 Qualitative Aussagen über die Trajektorien	9
1.2.3 Numerische Hinweise für einen seltsamen Attraktor im Lorenzsystem	14
1.2.4 Koordinatentransformation im Lorenzsystem	15
1.3 Das geometrische Modell des Lorenz-Attraktors nach Guckenheimer, Williams	16
1.3.1 Definition des Modellflusses	17
1.3.2 Nachweis der Existenz eines Attraktors	21
1.4 Der Lorenz-Attraktor ist ein seltsamer Attraktor	24
1.4.1 Tuckers Beweisidee	25
1.4.2 Ergebnisse	30

Einleitung

Thema der folgenden Arbeit ist das sogenannte Saltzman/Lorenz-System. Ursprünglich im Jahr 1963 als Teil eines physikalischen Modells formuliert, stand dieses System von Differentialgleichungen wiederholt im Blickpunkt der Öffentlichkeit und war gleichzeitig Gegenstand zahlreicher mathematischer Arbeiten bis in die jüngste Gegenwart.

Dieser Vortrag versucht einen Bogen zu spannen zwischen den physikalisch-experimentellen Grundlagen, die bereits um das Jahr 1900 von den Wissenschaftlern *Rayleigh* und *Bénard* gelegt wurden, zu den mathematischen Untersuchungen der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts, die von *Saltzman* und *Lorenz* durchgeführt wurden, bis hin zu den moderneren Ansätzen, etwa von dem amerikanischen Mathematiker *Guckenheimer*. Schließlich möchten wir eine Arbeit aus dem Jahr 1999, „The Lorenz attractor exists“, von *Warwick Tucker* vorstellen, in der er den Beweis erbringt, daß der Lorenz-Attraktor ein sog. seltsamer Attraktor ist.

Dieses Skript wird im Internet bereitgestellt unter

www.tu-harburg.de/~sufp/



Henri Bénard
(1874-1939)



Lord Rayleigh
(1842 - 1919)



Barry Saltzman
(1931-2001)



E. N. Lorenz
(*1917)



John Guckenheimer
(* ~ 1946)



Warwick Tucker
(*1970)

1.1 Herleitung: Die Lorenzgleichungen als Idealisierung hydrodynamischer Systeme

1.1.1 Das Rayleigh-Bénard-Experiment

Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2\end{aligned}\tag{L}$$

wird als Lorenzsystem bezeichnet, nach dem amerikanischen Meteorologen Edward N. Lorenz¹, der es 1962 als Idealisierung eines hydrodynamischen Systems entwickelte. Lorenz ging es dabei

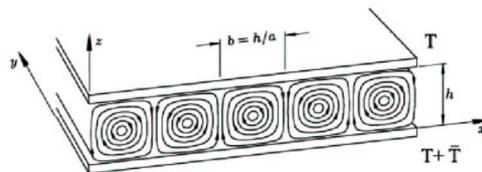
¹Lorenz, Edward Norton, amerikanischer Meteorologe, *1917 West Hartford, Connecticut; seit 1946 am Massachusetts Institute of Technology (MIT) beschäftigt; beschrieb in den sechziger Jahren als erster deterministisches Chaos am Beispiel des Wetters; prägte den Ausdruck »Schmetterlingseffekt« (der Flügelschlag eines Schmetterlings in China beeinflusst das Wetter in Amerika); erhielt 1991 den renommierten Kyoto-Preis. (Quelle: Lexikon der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 2000)

um eine Modellierung der Zustände in der Erdatmosphäre zum Zweck einer Langzeitvorhersage. Allerdings betonte Lorenz, daß das von ihm entwickelte System (L) allenfalls für sehr begrenzte Parameterbereiche von ρ, σ, β realistische Resultate liefert.

Bei der Beschreibung von Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen ist *Konvektion* ein zentrales Phänomen. Unter diesem Begriff versteht man den Transport von Teilchen in einer strömenden Flüssigkeit entgegen stabilisierender Kräfte. Die Konvektion ist zu unterscheiden von weiteren Transportmechanismen innerhalb der Flüssigkeit wie der Diffusion. *Erzwungene Konvektion* liegt vor, wenn der Strömungsvorgang durch äußeren Antrieb, etwa dem Einsatz von Pumpen, erfolgt. Im Gegensatz dazu liegt *natürliche Konvektion* vor, wenn der Antrieb der Strömung Dichtegradienten, etwa aufgrund von Temperatur- oder Konzentrationsgradienten, sind.

Konvektionsvorgänge können in sog. Konvektionszellen studiert werden, das sind bienenwabentartige Bereiche der Flüssigkeit, in denen die Konvektionsströmungen in sich geschlossen sind. Es ergibt sich, daß die Konvektion stark mit dem Durchmesser der Konvektionszelle anwächst. Aus diesem Grund sind Wärmedämmstoffe porös, um den konvektiven Transport von Wärme möglichst gering zu halten².

Zur Herleitung der Lorenzgleichung als Beschreibung von Konvektionsströmungen sei das folgende Modell betrachtet, das um die Jahrhundertwende von dem französischen Physiker Bénard experimentell untersucht und 1916 durch den britischen Nobelpreisträger Lord Rayleigh theoretisch beschrieben wurde:



Zwischen zwei Platten mit Abstand h befindet sich ein viskoses inkompressibles Fluid (\approx "Flüssigkeit"). Während kleine Temperaturdifferenzen \bar{T} zwischen der Ober- und Unterseite der Schicht noch durch Wärmeleitung ausgeglichen werden können, setzt bei Überschreiten einer kritischen Temperaturdifferenz eine Flüssigkeitsbewegung ein und es kommt zur Ausbildung von *Konvektionsrollen*, durch die ein effizienterer Wärmetransport realisiert wird. Dabei steigen von unten erwärmte Flüssigkeitselemente auf Grund ihrer geringeren Dichte auf und kältere Flüssigkeitsvolumina sinken ab.

1.1.2 Mathematische Beschreibung

Zur mathematischen Beschreibung faßt man nun

- das Dichtefeld: $\rho(x, t), x \in \mathbb{R}^3$
- den Druck: $p(x, t),$
- die Temperatur: $T(x, t),$
- die Geschwindigkeitsverteilung: $v(x, t)$

als kontinuierliche Größen auf.

Zweitens werden die physikalischen Grundgleichungen verwendet, die sich aus den drei Erhaltungssätzen *Massenerhaltung*, *Impulserhaltung* und *Energieerhaltung* ergeben:

- Massenerhaltung: **Kontinuitätsgleichung:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

²Quelle: Lexikon der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 2000

- Impulserhaltung: **Navier-Stokes-Gleichung:**

$$\varrho \frac{dv}{dt} = \varrho(v_t + \langle v, \nabla \rangle v) = \underbrace{\varrho F}_{\text{äußere Kraft}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{Druckgradient}} + \underbrace{\eta (\Delta v_i)_{i \in \underline{3}}}_{\text{Viskosität}} \quad (1.1)$$

wobei mit $(\Delta v_i)_{i \in \underline{3}}$ der Vektor $(\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)^T$ gemeint ist.

„Viskosität“ bedeutet hier die Newtonsche Annahme, daß der auf ein Teilchen ausgeübte Reibungsdruck proportional zum Geschwindigkeits-Gradienten ist.

- Energieerhaltung: **Wärmetransportgleichung:**

$$\varrho c_p \frac{dT}{dt} = \varrho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \langle v, \nabla \rangle T \right) = \underbrace{\lambda \Delta T}_{\text{Wärmeleitung}}$$

mit c_p : spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck und λ : Wärmeleitkoeffizient, wobei der Energieverlust durch innere Reibung vernachlässigt wird.

Man nimmt nun vereinfachend an, daß die Dichte zeitlich konstant ist (Inkompressibilität), es sei

$$\varrho = \varrho_0 \quad ; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Eine Ausnahme bildet der Term in (1.1), der den hydrostatischen Druck beschreibt. Es wird die Kraft $F = (0, 0, -g)^T$ ausgeübt (g : Erdbeschleunigung), die Dichte sei ausschließlich und linear abhängig von der Temperaturverteilung:

$$\varrho(x, t) = \varrho_0 (1 - \alpha(T(x, t) - T_0))$$

wobei α der Wärmedehnungskoeffizient ist und T_0 die Bezugstemperatur an der unteren Platte.

Es ergeben sich die vereinfachten Gleichungen:

$$\operatorname{div}(\varrho v) = 0$$

$$v_t + \langle v, \nabla \rangle v = [1 - \alpha(T - T_0)](0, 0, g) - \frac{1}{\varrho_0} \nabla p + \underbrace{\frac{\eta}{\varrho_0} (\Delta v_i)_{i \in \underline{3}}}_{=: \nu} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \langle v, \nabla \rangle T = \underbrace{\frac{\lambda}{\varrho_0 c_p} \Delta T}_{=: \chi} \quad (1.3)$$

Eine weitere Vereinfachung kann erreicht werden durch die Annahme, daß sich die Konvektionsrollen in der x, z -Ebene unabhängig von der y -Richtung entwickeln³. Somit bestehen sämtliche Vektoren nur noch aus (x, z) -Komponenten.

Die Navier-Stokes-Gleichungen (1.2) sind also auf zwei reduziert:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1 \quad (1.4)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \Delta v_3 + [1 - \alpha(T - T_0)]g \quad (1.5)$$

Indem man schließlich noch v_1, v_3 zusammenfaßt in einer *Stromfunktion* Ψ mit

$$(v_1, v_3) = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)$$

³[Saltzman1962]

und eine zweite Funktion $\Theta(x_1, x_3, t)$ einführt, welche die Abweichung vom linearen Temperaturprofil, d.h. reiner Wärmeleitung, angibt:

$$T(x_1, x_3, t) = T_0 + \underbrace{\bar{T} \left(1 - \frac{x_3}{h}\right)}_{\text{linear}} + \Theta(x_1, x_3, t)$$

kann man den p -Term in (1.2) folgendermaßen eliminieren:

Man berechnet $\frac{\partial}{\partial x_1}(1.5) - \frac{\partial}{\partial x_3}(1.4)$. Es ergibt sich mit dem Satz von Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)}_{=\nabla^2\Psi} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)}_{=\frac{\partial(\Psi, \nabla^2\Psi)}{\partial(x,z)}} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \\ \nu \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta v_3 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta v_1\right)}_{=\nabla^4\Psi} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} [1 - \alpha(T - T_0)] g}_{=g\alpha \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

mit den Bezeichnungen

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^4\Psi &= \nabla^2(\nabla^2\Psi) \\ &= \nabla^2\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ &= \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_1 x_3^2} - \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^2 x_3} - \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_3^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta v_1 \end{aligned}$$

sowie der Schreibweise

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x_1, x_3)} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial b}{\partial x_3} - \frac{\partial b}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) \quad (*)$$

aus der sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Psi, \nabla^2\Psi)}{\partial(x, z)} &= \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \nabla^2\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2\Psi \\ &= v_1 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 x_3} \right) + v_3 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

ergibt.

Zweitens kann man die Gleichung (1.3) mit den Funktionen Ψ , Θ ausdrücken. Mit $\Delta T = \Delta\Theta$ und $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial\Theta}{\partial t}$ sowie der Schreibweise (*) gilt zunächst

$$\begin{aligned} \langle v, \nabla \rangle T &= \left(v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \\ &= v_1 \frac{\partial\Theta}{\partial x_1} + v_3 \left(-\frac{\bar{T}}{h} + \frac{\partial\Theta}{\partial x_3} \right) \\ &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \left(-\frac{\bar{T}}{h} + \frac{\partial\Theta}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x_1, x_3)} + \frac{\bar{T}}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Damit folgt die Umformung der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = - \underbrace{\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x_1, x_3)}}_{=\langle v, \nabla \rangle T} + \frac{\bar{T}}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \chi \Delta \Theta \quad (1.7)$$

Insgesamt ergeben sich aus (1.6), (1.7) die von Lorenz an den Anfang seiner Untersuchungen gestellten *Gleichungen der Bénard-Konvektion*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi &= - \frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial x_1, x_3} + \nu \nabla^4 \Psi + g \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= - \frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x_1, x_3)} + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \chi \nabla^2 \Theta \end{aligned}} \quad (1.8)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichungen wählte der Physiker Barry Saltzman⁴, auf dessen Arbeit⁵ sich Lorenz' Überlegungen stützten, möglichst einfache Randbedingungen, nämlich freie Grenzflächen, an denen Ψ und $\Delta \Psi = 0$ sein sollen (keine Schubspannungen).

Dann entwickelte er Ψ und Θ in einer zweifachen Fourierreihe.

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{mn}(t) \exp \left[2\pi h * i \left(\frac{m}{L} x + \frac{n}{2h} z \right) \right] \\ \Theta(x, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta_{mn}(t) \exp \left[2\pi h * i \left(\frac{m}{L} x + \frac{n}{2h} z \right) \right] \end{aligned}$$

Allerdings vernachlässigte er höhere Wellenzahlen, d.h. die (unendliche) Reihendarstellung wurde durch endliche Summen ersetzt.

Saltzman berechnete anschließend zeitabhängige Lösungen durch numerische Integration. Es ergaben sich 52 Fälle zur numerischen Untersuchung, von denen allerdings mit Ausnahme von nur drei Amplituden alle nichtperiodischen Lösungen gegen 0 tendierten. Auf diese drei „wesentlichen“ Komponenten reduziert ergab sich:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \sin(\pi a x) \sin(\pi z) \\ \Theta(x, z, t) &= \frac{\Delta T}{\pi} \frac{Ra_{cr}}{Ra} \left(\sqrt{2} Y(t) \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - Z(t) \sin(2\pi z) \right) \end{aligned}$$

wobei $a = \text{Zellenhöhe}/\text{Zellenbreite}$ die Geometrie der Konvektionszelle beschreibt, und X, Y, Z zeitabhängige Funktionen sind; zum Quotienten $\frac{Ra_{cr}}{Ra}$ siehe unten.

Setzt man diese Lösungen für Ψ, Θ in die Gleichungen (1.8) von oben ein, so ergibt sich das Lorenz System (L) für $(X, Y, Z) = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{aligned} \quad (L)$$

1.1.3 Physikalische Bedeutung der Parameter σ, β, ρ

- Der Parameter

$$\sigma = \frac{\nu}{\chi} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$$

⁴Barry Saltzman, amerikanischer Geologe und Geophysiker. *1931 New York City. Gest. 2001 Yale. Seine Arbeit (1962) über thermische Konvektion führte zur Entdeckung der Chaostheorie und des bekannten „Saltzman-Lorenz Attraktors“. Er entwickelte ferner eine Theorie über die globale Verteilung des Klimas, basierend auf der Betrachtung von Energiebilanzen.

⁵[Saltzman1962]

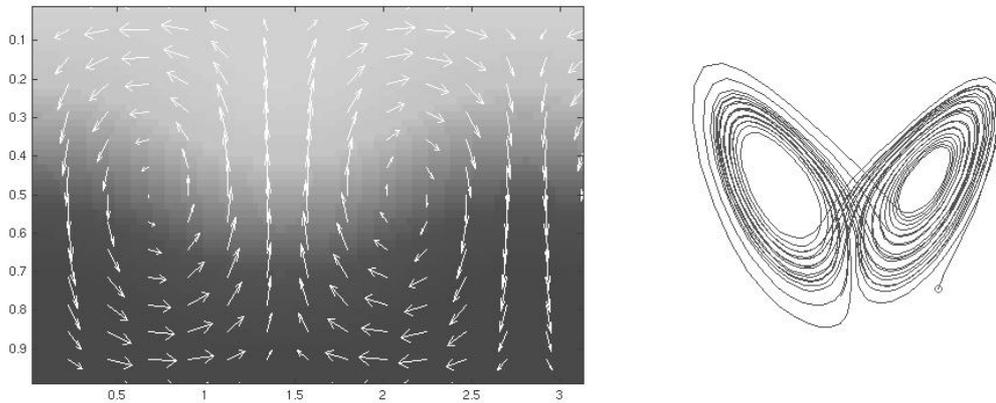


Abbildung: Konvektions- und Temperaturdiagramm eines Zustandes im Lorenzsystem.

wird als *Prandtl-Zahl* bezeichnet. Dies ist ein Ähnlichkeitsparameter, der ein Maß für die Trägheit eines hydrodynamischen Systems angibt. Für den Grenzwert $\sigma \rightarrow \infty$ kann ein System als trägheitslos betrachtet werden, d.h. das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung kann sich dem Temperaturfeld sofort anpassen. Wasser hat eine Prandtl-Zahl von etwa $\sigma = 5$.

- Der Parameter

$$\beta = \frac{4}{1 + a^2}$$

ist ein Maß für die Zellengeometrie.

- Der Parameter

$$\varrho = \frac{Ra}{Ra_{cr}} \quad \text{mit} \quad Ra = \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{\chi \nu} \quad ; \quad Ra_{cr} = \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3}{a^2}$$

ist die sog. *relative Rayleighzahl*, wobei die Rayleighzahl Ra nun – grob gesagt – die auftriebenden und die bremsenden Kräfte in ein Verhältnis setzt.

Es ist übrigens zu bemerken, daß damit alle Parameter in (L) dimensionslos sind.

Aus den Bénard-Gleichungen (1.8) geht ferner hervor, daß im Lorenzsystem (L) die Komponente X proportional ist zur *Intensität der Konvektionsströmung* ($\Psi \sim X$). Die Komponente Y ist proportional zur *Temperaturdifferenz* zwischen aufsteigender und fallender Strömung. Gleiches Vorzeichen von X , Y bedeutet das Aufsteigen warmer Flüssigkeit und das Absinken kalter Volumina. Die Komponente Z ist proportional zur *Abweichung* vom linearen Temperaturprofil.

Anwendungsfälle der Lorenzgleichungen

Beispiele für konvektive Systeme findet man u.a. im Erdmantel (Geodynamik), der Atmosphäre und den Ozeanen. Weitere Beispiele sind der Energietransport in der Sonne, konvektive Zonen im Inneren eines Sterns oder die Entstehung des Erdmagnetfeldes (Geomagnetismus). Allerdings räumt Lorenz ein, daß, verursacht durch die starke Vereinfachung der Fourierreihen, bei hoher Konvektion Lösungen von (L) sehr von solchen der Bénard-Gleichungen (1.8) abweichen und somit keine gute Näherung der Realität mehr liefern.

1.2 Einfache Eigenschaften des Lorenz-Systems

1.2.1 Globale Eigenschaften

Wir wollen nun einige allgemeine Eigenschaften des Lorenz-Attraktors vorstellen. Wir betrachten also das folgende Differentialgleichungs-System:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2\end{aligned}\tag{L}$$

Im Folgenden untersuchen wir die unterschiedlichen qualitativen Strukturen des Systems für feste Parameter $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$ und variables $\rho > 0$. Die Variation von ρ ist dadurch gerechtfertigt, daß ρ im Konvektionsversuch als Maß für die Temperaturdifferenz zwischen der oberen und der unteren Platte betrachtet werden kann. [Vergleiche auch S. 6.]

Symmetrie

Ersetzt man im Lorenz-System den Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ durch $\tilde{\mathbf{x}} := (-x_1, -x_2, x_3)$, so ändert sich in den ersten beiden Gleichungen von (L) das Vorzeichen, die dritte bleibt unverändert. Die Trajektorie durch den Punkt \mathbf{x} muß somit dasselbe Verhalten zeigen, wie die Trajektorie durch den Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$, lediglich an der dritten Koordinatenachse (die wir der Einfachheit halber als x_3 -Achse bezeichnen) gespiegelt. Jede Trajektorie des Systems ist also entweder symmetrisch oder besitzt eine genau gleich aussehende ‘‘Zwillings’’-Trajektorie, die man dann durch Spiegelung an der x_3 -Achse erhält. Diese Eigenschaft ist offenbar unabhängig von der Wahl der Parameter β, ρ und σ .

Übrigens hat sich Warwick Tucker, zu dessen Beweis wir später noch kommen werden, diese Eigenschaft zunutze gemacht, um Rechenzeit zu sparen⁶.

Die x_3 -Achse

Für $x_1 = x_2 = 0$ sind in (L) die ersten beiden Terme 0. Somit ist die x_3 -Achse eine invariante Menge. Zudem verlaufen offenbar alle Trajektorien auf der x_3 -Achse für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ursprung.

Wir betrachten nun eine Trajektorie, die um die x_3 -Achse rotiert. Verläuft die Trajektorie irgendwann durch einen Punkt $(0, x_2, x_3)$, so gilt $\dot{x}_1 > 0$ für $x_2 > 0$ und $\dot{x}_1 < 0$ für $x_2 < 0$. Somit kann die Trajektorie (wenn überhaupt) also nur im Uhrzeigersinn (wenn man von oben auf die $x_1 x_2$ -Ebene schaut) um die x_3 -Achse rotieren.

Dissipation des Lorenz-Systems und Konsequenzen hieraus

Wir betrachten zum Zeitpunkt t die Divergenz des zu (L) gehörigen Vektorfeldes Φ_t . Es gilt

$$\operatorname{div} \Phi_t = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -(\sigma + \beta + 1) < 0 .\tag{1.9}$$

Nun sei V eine Menge mit $\mu(V) > 0$, wobei μ das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^3 sei. Für die Änderung des Volumens unter dem Fluß Φ in Abhängigkeit von der Zeit t gilt dann⁷:

$$\frac{d}{dt} \mu(\Phi_t(V))|_{t=0} = \int_V \operatorname{div} \Phi_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x}|_{t=0} = -(\sigma + \beta + 1) \int_V 1 d\mathbf{x} = -(\sigma + \beta + 1) \mu(V) ,$$

⁶vgl. [Tucker1998], Abschnitt 5.1

⁷Vgl. dazu: Beweis zu Satz 5.5.5 in [Lauterbach2002]

also

$$\mu(\Phi_t(V)) = e^{-(\sigma+\beta+1)t}\mu(V).$$

Das bedeutet, daß für eine Menge V mit $\mu(V) > 0$ das Volumen unter dem Fluß für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Da σ und β nicht von den Koordinaten x_1, x_2, x_3 abhängen, findet diese *Volumenkontraktion* sogar global statt, d.h. jede Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ mit positivem Volumen wird durch Φ in eine Fläche überführt. Man bezeichnet das Lorenz-System daher auch als *dissipativ*, angelehnt an die irreversible Energieabgabe im physikalischen Modell, die als *Dissipation* bezeichnet wird.

Folgerung. Haben wir eine Ruhelage, so kann diese nicht instabil in dem Sinne sein, daß alle nahe gelegenen Trajektorien von ihr weg divergieren. Dieser Orbit wäre dann nämlich eine *Quelle*, was im Gegensatz zur globalen Volumenkontraktion steht. Ganz entsprechendes gilt für periodische Orbits.

Existenz eines Ellipsoids, das alle Trajektorien anzieht

Behauptung. Es gibt ein beschränktes Ellipsoid $E \subset \mathbb{R}^3$, in das *alle* Trajektorien eintreten und dieses nach ihrem Eintritt auch nicht mehr verlassen⁸.

Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \varrho x_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2\varrho)^2.$$

Auf ganz \mathbb{R}^3 existieren die partiellen Ableitungen von V , und bezeichnet man die rechte Seite von (L) mit f , so ist $\langle \nabla V(w), f(w) \rangle \leq 0$, also V eine Ljapunov-Funktion zu f .⁹ Dann gilt längs Lösungen von (L):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) &= DV(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= (2\varrho x_1 \quad 2\sigma x_2 \quad 2\sigma(x_3 - 2\varrho)) \begin{pmatrix} -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \varrho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{pmatrix} \\ &= -2\sigma (\varrho x_1^2 + x_2^2 + \beta x_3^2 - 2\beta \varrho x_3) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung erkennt man, daß es eine beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ gibt, mit

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \dot{V}(\mathbf{x}) \geq 0\}$$

Wegen der Stetigkeit von $\dot{V}(\mathbf{x})$ ist D auch abgeschlossen, also kompakt, womit $V(\mathbf{x})$ auf D ein Maximum c annimmt. Man sieht, daß die Höhenlinien $V(\mathbf{x}) \equiv c$ Ellipsoide sind. Wir betrachten daher ein beschränktes Ellipsoid $E \supset D$, in dem gilt $V \leq c + \varepsilon$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$. Sei $\mathbf{y} \notin E$. Dann folgt auch $\mathbf{y} \notin D$, also $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0$. Wegen der Konstruktion von D gilt sogar $\dot{V}(\mathbf{y}) < -\delta$ für ein $\delta > 0$. Wir betrachten nun eine Trajektorie durch \mathbf{y} . Wegen $\dot{V} \leq 0$ außerhalb von E nimmt dann der Wert von V längs dieser Trajektorie ab, so daß V innerhalb endlicher Zeit einen Wert $V \leq c + \varepsilon$ annimmt. Das bedeutet aber, daß die Trajektorie durch \mathbf{y} in das Ellipsoid eintritt. Aus der Konstruktion von D und E sieht man auch sofort, daß die Trajektorie einmal in der Menge E angekommen, diese nie wieder verläßt.

1.2.2 Qualitative Aussagen über die Trajektorien

Um weitere Aussagen über das generelle qualitative Verhalten des Systems machen zu können, betrachten wir zunächst die Gleichgewichtslagen des Systems. In jeder Gleichgewichtslage von (L) muß natürlich

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$$

gelten. Als mögliche stationäre Lösungen S erhält man dann durch Nachrechnen die Punkte:

⁸Vgl. dazu auch [Sparrow1982, S. 196 f.]

⁹Gemäß [Lauterbach2002] Definition 6.3.2

- $C^0 = (0, 0, 0)$
- $C^+ = (\sqrt{(\varrho - 1)\beta}, \sqrt{(\varrho - 1)\beta}, (\varrho - 1))$
- $C^- = (-\sqrt{(\varrho - 1)\beta}, -\sqrt{(\varrho - 1)\beta}, (\varrho - 1))$

Der Ursprung ist offensichtlich für alle Parameter-Werte $\varrho > 0$ eine Ruhelage, die Punkte C^+ und C^- jedoch nur für $\varrho \geq 1$.

Sei wie oben Φ der zum Lorenz-System gehörige Fluß. Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ haben wir als Linearisierung die Jacobi-Matrix

$$D\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (\varrho - x_3) & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Die Eigenwerte von $D\Phi(\cdot)$ berechnen wir über die Nullstellen des charakteristische Polynoms

$$P(\lambda) = \det(D\Phi(\cdot) - \lambda E_3).$$

Für die Ruhelage $C^0 = (0, 0, 0)$ erhält man damit die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\varrho - 1)} \\ \lambda_3 &= -\beta \end{aligned} \quad (1.11)$$

Für die Ruhelagen C^+ und C^- hat das charakteristische Polynom die Gestalt

$$P(\lambda) = -(\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \varrho)\lambda + 2\sigma\beta(\varrho - 1)). \quad (1.12)$$

Die Nullstellen von P und somit die Eigenwerte von $D\Phi(C^\pm)$, hängen [bei festen Parametern $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$] nun nur vom Parameter ϱ ab. Wir untersuchen die Eigenschaften der möglichen Ruhelagen für verschiedene Parameterwerte ϱ im Einzelnen. Wegen der bereits erwähnten Symmetrie des Lorenz-Systems (siehe S. 8) reicht es offenbar aus, wenn wir unsere Beobachtungen auf die Ruhelagen C^0 und C^+ beschränken.

Die Ruhelage C^0

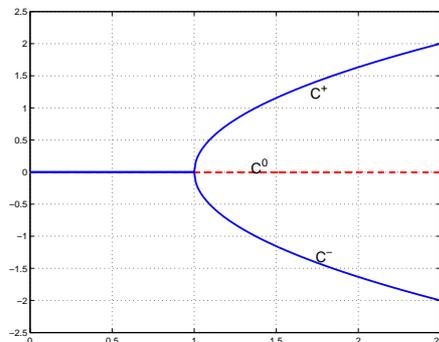
- **1. Fall:** $0 < \varrho < 1$

Für die Ruhelage $C^0 = (0, 0, 0)$ sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2,3}$ nach dem oben Gesagten alle negativ (sie haben also insbesondere negative Realteile); somit ist das Spektrum

$$\sigma(D\Phi(0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda < 0\}$$

also ist nach dem Satz von LJAPUNOV über Spektrum und Stabilität¹⁰ die Ruhelage C^0 asymptotisch stabil.

- **2. Fall:** $\varrho = 1$



x_1 -Koordinate von C^0, C^+, C^- , aufgetragen über ϱ .

¹⁰Vgl. [Lauterbach2002], Satz 6.1.4

Bei $\varrho = 1$ findet eine *Heugabel-Verzweigung* statt: Für $\varrho \rightarrow 1^+$ vereinigen sich die beiden stabilen Ruhelagen C^+ , C^- mit der instabilen Ruhelage C^0 zu einer einzigen stabilen Ruhelage.

• **3. Fall:** $\varrho > 1$

Die Ruhelage C^0 hat drei reelle Eigenwerte. Man sieht, daß $\lambda_1 > 0$ ist, womit aus dem Satz über Spektrum und Stabilität folgt, daß die Ruhelage C^0 instabil ist. Die Eigenwerte λ_2 und λ_3 sind beide negativ und reell. Insgesamt spricht man von einem *Sattelpunkt*: Der Punkt hat eine ausfließende und zwei hereinkommende Richtungen.

Die Ruhelagen C^+ und C^-

Für den Fall $\varrho < 1$ existieren die Ruhelagen C^+ und C^- nicht, für den Fall $\varrho = 1$ fallen sie offenbar mit der Ruhelage C^0 zusammen. Es bleibt somit nur noch der Fall $\varrho > 1$ zu betrachten.

Es ergibt sich zunächst, daß für Werte von ϱ , die geringfügig über dem Wert 1 liegen, die Eigenwerte von C^+ und C^- alle reell und negativ sind. Somit ist also insbesondere die Ruhelage C^+ asymptotisch stabil. Man kann errechnen, daß für $\varrho < 1.346$ alle drei Eigenwerte reell und negativ sind. Für $\varrho = 1.346$ hat man zwei negative reelle Eigenwerte, und für $\varrho > 1.346$ hat man einen negativen reellen sowie ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte mit (zunächst) negativem Realteil.

Es stellt sich die Frage, ob es einen Wert für ϱ gibt, für den die Ruhelagen C^+ und C^- nicht mehr asymptotisch stabil sind. Dazu müssen wir aber wissen, für welchen Wert von ϱ ein Eigenwert von $D\Phi(C^+)$ bzw. $D\Phi(C^-)$ erstmals Realteil 0 hat, also rein imaginär ist. Wir betrachten das charakteristische Polynom von C^\pm , also die Gleichung (1.12):

$$P(\lambda) = -(\lambda^3 + \underbrace{(\sigma + \beta + 1)}_{=:a_2} \lambda^2 + \underbrace{\beta(\sigma + \varrho)}_{=:a_1} \lambda + \underbrace{2\sigma\beta(\varrho - 1)}_{=:a_0})$$

Angenommen $i\mu$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sei eine rein imaginäre Nullstelle. Dann folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} P(i\mu) = 0 &\Rightarrow -P(i\mu) = 0 \\ &\Rightarrow -i\mu^3 - a_2\mu^2 + a_1i\mu + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow 0 = i\mu(\mu^2 - a_1) \quad \wedge \quad 0 = a_0 - a_2\mu^2 \\ &\Rightarrow 0 = \mu^2 - a_1 \quad \wedge \quad 0 = a_0 - a_2\mu^2 \\ &\Rightarrow 0 = a_0 - a_2a_1 \\ &\Rightarrow \varrho = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} \end{aligned}$$

Als kritischen Parameterwert ϱ' , bei dem erstmals ein rein imaginärer Eigenwert bei C^+ bzw. C^- eintritt, erhalten wir somit

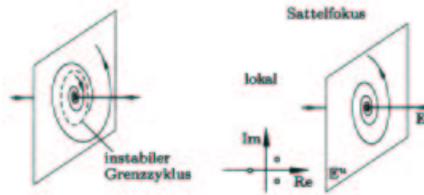
$$\varrho' = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} = \frac{470}{19} \approx 24.7368\dots$$

Mit diesem Resultat folgert man sofort: Für $\varrho < \varrho'$ sind die Ruhelagen C^\pm asymptotisch stabil, da die Realteile aller Eigenwerte negativ sind; für $\varrho > \varrho'$ treten stets Eigenwerte mit positivem Realteil auf, C^+ und C^- verlieren also ihre Stabilität. Dies geschieht in einer sogenannten *subkritischen Hopf-Bifurkation*. Der mathematische Nachweis sei hier vernachlässigt¹¹.

Intuitiv geschieht z.B. im Fixpunkt C^+ das Folgende: Für $\varrho < \varrho'$ ist C^+ stabil. Rings um den Fixpunkt verläuft ein *Sattelzyklus*, d.h. ein periodischer Orbit mit einer zweidimensionalen instabilen Untermannigfaltigkeit sowie einer zweidimensionalen stabilen UMF (nicht abgebildet). Nähert sich $\varrho \rightarrow \varrho'$ von unten her, zieht sich der periodische Orbit um den Fixpunkt herum

¹¹vgl. etwa [MarsdenMcCracken1976]

zusammen. In der Hopf-Bifurkation absorbiert C^+ den periodischen Orbit und wechselt über in einen Sattelpunkt.



Verlauf der Hopf-Bifurkation.

Wir wollen uns nun noch überlegen, wie Trajektorien, die in der Nähe des Ursprungs verlaufen, für verschiedene Werte $\varrho > 1$ qualitativ aussehen.

Trajektorien in der Nähe des Ursprungs¹²

Für die folgenden Überlegungen erinnern wir zunächst an zwei Begriffe.

Definition¹³. Es sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ ein kritischer Punkt und Φ der Fluß des Systems. Dann nennen wir

$$W_s(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_0 \text{ für } t \rightarrow \infty\}$$

$$W_u(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_0 \text{ für } t \rightarrow -\infty\}$$

die *stabile* bzw. die *instabile Mannigfaltigkeit* von \mathbf{x}_0 .

Bemerkung. Man kann zeigen, daß W_s und W_u tatsächlich UMFen sind, die sich zudem auch noch transversal schneiden. Außerdem sind die Tangentialräume an $W_s(\mathbf{x}_0)$ bzw. an $W_u(\mathbf{x}_0)$ parallel zu E_s bzw. E_u , d.h. $T_{\mathbf{x}_0}W_s(\mathbf{x}_0) = E_s$ und $T_{\mathbf{x}_0}W_u(\mathbf{x}_0) = E_u$.

Wir betrachten zunächst ein ϱ , das geringfügig größer als 1 ist. Man überlegt sich, daß aufgrund der zwei negativen Eigenwerte λ_1 und λ_2 die stabile Mannigfaltigkeit des Ursprungs, $W_s(0)$, zweidimensional ist, da auch E_s zweidimensional ist. In einer genügend kleinen Umgebung des Ursprungs kann man sich die stabile MF dann als eine Ebene vorstellen, die den \mathbb{R}^3 in zwei Hälften teilt. Wegen unserer früheren Überlegung, daß alle Trajektorien auf der x_3 -Achse für $t \rightarrow \infty$ zum Ursprung hin laufen, muß außerdem die x_3 -Achse eine Teilmenge der stabilen Mannigfaltigkeit des Ursprungs sein.

Bemerkung: In diesem Zusammenhang ist eine Arbeit der Mathematiker **Dr. Bernd Krauskopf** und **Dr. Hinke Osinga**, beide von der Universität Bristol, recht instruktiv und hilfreich. Mit Hilfe numerischer Verfahren haben beide die stabile und instabilen Mannigfaltigkeit des Fixpunktes C^0 visualisiert. Siehe dazu

<http://www.enm.bris.ac.uk/staff/hinke/vectorfields/lorenz/>

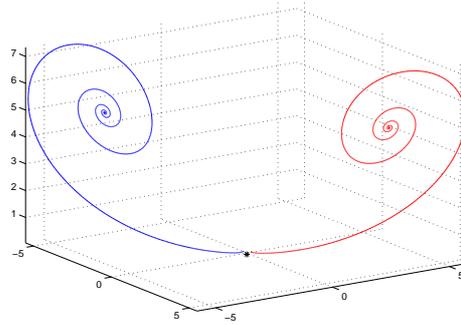
Man erhält durch numerische Berechnungen, daß für $\varrho > 1$ alle Trajektorien, die in der Nähe des Ursprungs starten und nicht auf der stabilen Mannigfaltigkeit liegen, für $t \rightarrow \infty$ entweder gegen C^+ oder gegen C^- konvergieren, je nachdem auf welcher Seite der stabilen Mannigfaltigkeit sie starten. Dies geschieht solange, wie ϱ unterhalb eines kritischen Wertes von 13.926 liegt. Je näher ϱ an diesen Wert herankommt, umso länger dauert die Annäherung der Trajektorien an die Ruhelagen C^+ und C^- . Für $\varrho = 13.926$ konvergieren die Trajektorien schließlich gar nicht mehr gegen C^+ und C^- , sondern bilden homokline Orbits, d.h. stabile und instabile

¹²In diesem Abschnitt halten wir uns weitgehend an die Vorgehensweise aus [Sparrow1982, S. 13 ff.]. Da die dortigen Ergebnisse numerisch ermittelt wurden, soll dieser Abschnitt vor allem dazu dienen, einen kleinen Einblick in das qualitative Verhalten der Trajektorien zu geben. Auf strenge Beweisführung wird verzichtet.

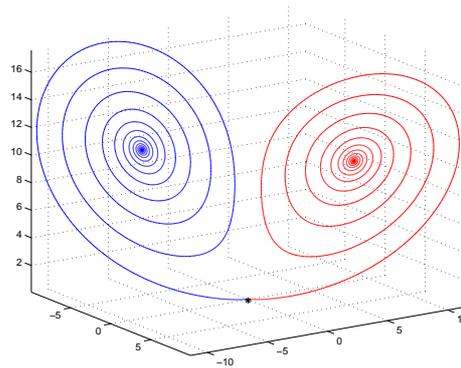
¹³[Amann1995, S. 288 f.]

Mannigfaltigkeit fallen zusammen. Für $\rho > 13.926$ konvergieren die Trajektorien wieder gegen die beiden Ruhelagen, allerdings zu den jeweils entgegengesetzten Ruhelagen. Wir haben dazu ein `Matlab`-Programm geschrieben, das mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens dieses Verhalten darstellen soll. Als Startpunkte unserer Trajektorien haben wir den Punkt $(0.1, 0.1, 0.1)$, durch den in den Skizzen jeweils die rote Trajektorie läuft, und $(-0.1, -0.1, 0.1)$ mit der blauen Trajektorie genommen.

- $\rho = 6.0$; Schrittweite für das Runge-Kutta-Verfahren: $h = 0.005$;

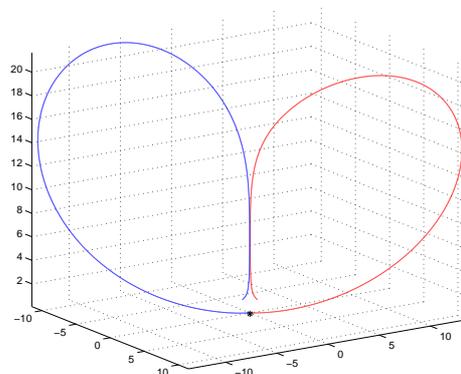


- $\rho = 11.5$; Schrittweite wiederum $h = 0.005$;



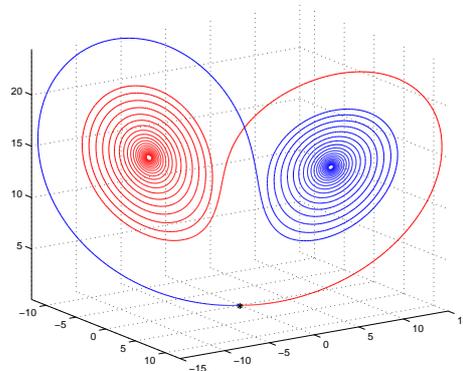
Es ergibt sich das gleiche Bild wie im vorherigen Fall, allerdings sind die „Schleifen“ um die Ruhelagen wesentlich weiter, d.h. die Trajektorien konvergieren langsamer gegen die Ruhelagen.

- $\rho = 13.926$; Schrittweite $h = 0.00005$;



Es entstehen homokline Orbits.

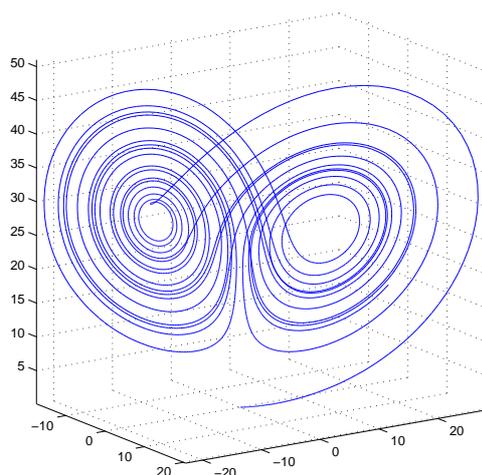
- $\varrho = 15.0$; Schrittweite wiederum $h = 0.005$;



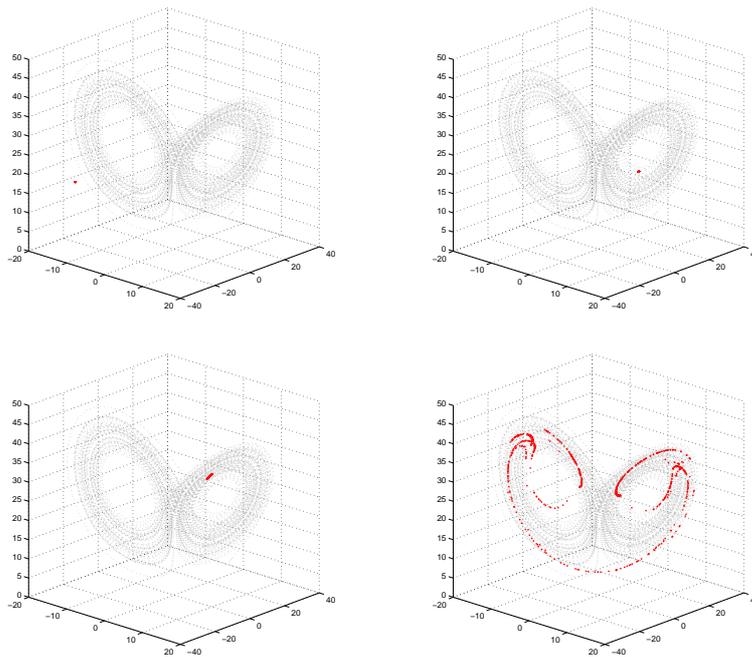
Die Trajektorien konvergieren wieder, allerdings gegen die „vertauschten“ Ruhelagen.

1.2.3 Numerische Hinweise für einen seltsamen Attraktor im Lorenzsystem

Als Lorenz 1963 das nach ihm benannte System untersuchte, fand er heraus, daß für den Parameterbereich $\varrho > 24.74\dots$ die Lösungen unregelmäßig oszillieren ohne dabei periodisch zu sein, obwohl die Trajektorien, wie gezeigt, in einem begrenzten Bereich des Phasenraums bleiben. Aus seinen numerischen Betrachtungen zog Lorenz den Schluß, daß die Trajektorien sich einer komplizierten Menge annähern, die man heute einen *seltsamen Attraktor* nennt. Diese Menge ist weder ein Punkt noch eine Kurve oder eine Fläche. Dieses Gebilde ist der „klassische“ Lorenz-Attraktor.



Bevor wir den Begriff *seltsam* unter formalen Gesichtspunkten betrachten, sei noch eine abschließende Bemerkung zu diesbezüglichen numerischen Ergebnissen gemacht:



Es ist in dieser Bilderfolge die Divergenz nahe beieinanderliegender Trajektorien zu sehen. Die markierten Punkte auf dem Attraktor zeigen die Entwicklung einer kleinen Wolke von 10000 nahe zusammen liegenden Anfangsbedingungen zu Zeiten $t = 3, 6, 9, 15$. Während sich jeder Punkt entsprechend den Lorenzgleichungen bewegt, dehnt sich die Punkt wolke in einen langen dünnen Streifen, der sich um den Attraktor wickelt. Schließlich sind die Punkte über einen großen Teil des Attraktors verteilt; dies zeigt, daß die Endzustände fast überall sein können, obwohl die Anfangsbedingungen fast identisch waren. Diese sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist kennzeichnend für ein chaotisches System.

1.2.4 Koordinatentransformation im Lorenzsystem

Bevor wir uns im nächsten Teil mit dem geometrischen Modell des Lorenz-Attraktors sowie Tuckers Beweis, daß dieser ein seltsamer Attraktor ist, befassen, wollen wir zunächst noch das System (L) in andere Koordinaten umschreiben. Da wir eine lineare Transformation durchführen, ändern sich dabei die qualitativen Aussagen über Ruhelagen, Attraktoren etc. des Systems nicht. Tucker beweist sein Theorem über den Lorenz-Attraktor anhand des transformierten Systems.

Wir bezeichnen die rechte Seite des Lorenz-Systems (L) mit $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Als Linearisierung des Flusses im Ursprung erhalten wir nach (1.10) die Matrix

$$D\Phi(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

Diese Matrix soll zunächst diagonalisiert werden:

Als Eigenwerte haben wir nach (1.11) die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(\rho-1)}$ sowie $\lambda_3 = -\beta$. Als Eigenvektor zu $-\beta$ sieht erkennt man sofort den Vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$. Die Eigenvektoren $\mathbf{v}_{1,2}$ zu $\lambda_{1,2}$ erhält man durch die Lösung des Gleichungssystems

$$(D\Phi(0) - \lambda_{1,2}E_3) \mathbf{v}_{1,2} = 0.$$

Setzen wir die Parameterwerte $\beta = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$ und $\rho = 28$ ein, so erhalten wir die speziellen Eigenwerte $\lambda_1 \approx 11.8277$ und $\lambda_2 \approx -22.8277$. Wir müssen also die folgenden Gleichungssysteme

lösen:

$$\begin{pmatrix} -21.8277 & 10 & 0 \\ 28 & -12.8277 & 0 \\ 0 & 0 & -14.4944 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 12.8277 & 10 & 0 \\ 28 & 21.8277 & 0 \\ 0 & 0 & 20.1610 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0$$

Die Lösungen (die Eigenvektoren v_1, v_2) kann man dabei so normieren, daß ihre erste Komponente übereinstimmt:

$$\mathbf{v}_1 = (-0.4165, -0.9091, 0)^T \quad ; \quad \mathbf{v}_2 = (-0.4165, 0.5343, 0)^T$$

Schreibt man die drei Eigenvektoren $\mathbf{v}_i, i \in \underline{3}$ als Spalten einer Matrix S^{-1} und berechnet die zugehörige Inverse S , so erhält man $SAS^{-1} = D$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_i, i \in \underline{3}$, als Einträgen in der Hauptdiagonalen ist. Diese Diagonalform werden wir benutzen, um (L) auf eine einfachere Form zu bringen:

Man schreibt:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ -\rho x_1 - x_2 - x_1 - x_3 \\ -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}}_{=: D\Phi(0)=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}}_{=: g(\mathbf{x})} \quad (1.13)$$

d.h. f wird in einen linearen und einen Restterm aufgespalten.

Wir führen nun eine lineare Koordinatentransformation durch, indem wir setzen: $\mathbf{y} := S\mathbf{x}$. Dann erhalten wir unter Anwendung von (1.13):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= S\dot{\mathbf{x}} = Sf(S^{-1}\mathbf{y}) = SAS^{-1}\mathbf{y} + g(S^{-1}\mathbf{y}) \\ &= D\mathbf{y} + Sg(S^{-1}\mathbf{y}) = D\mathbf{y} + Sg \left[\begin{pmatrix} -0.4165(y_1 + y_2) \\ -0.9091y_1 + 0.5343y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= D\mathbf{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} -0.8887 & -0.6928 & 0 \\ -1.5122 & 0.6928 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: S} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4165(y_1 + y_2)y_3 \\ 0.4165(y_1 + y_2)(0.9091y_1 - 0.5343y_2) \end{pmatrix} \\ &= D\mathbf{y} + \begin{pmatrix} -0.2886(y_1 + y_2)y_3 \\ 0.2886(y_1 + y_2)y_3 \\ (y_1 + y_2)(2.1827y_1 - 1.2828y_2) \end{pmatrix} \\ &\approx D\mathbf{y} + \begin{pmatrix} -0.29(y_1 + y_2)y_3 \\ 0.29(y_1 + y_2)y_3 \\ (y_1 + y_2)(2.2y_1 - 1.3y_2) \end{pmatrix} \quad (1.14) \end{aligned}$$

Diese Form des Lorenzsystems ist Basis für Tuckers Beweis. Alle Eigenschaften, die Tucker für das System (1.14) nachweist, sind *robust*, das heißt einfach formuliert, daß sich die qualitativen Eigenschaften des Systems nicht dadurch ändern, daß man die zugehörigen Parameter leicht variiert. Somit folgt aus der Existenz eines seltsamen Attraktors für das „genäherte“ Lorenz-System (1.14) auch die Existenz des seltsamen Attraktors für das ursprüngliche Lorenz-System (L).

1.3 Das geometrische Modell des Lorenz-Attraktors nach Guckenheimer, Williams

In diesem Abschnitt verwendete Begriffe und Konzepte:

Definition¹⁴. (X, f) sei ein diskretes dynamisches System, und A sei eine abgeschlossene Teilmenge von X . A heißt *attraktiv*, falls eine Umgebung U von A existiert mit der Eigenschaft: Für jede Umgebung V von A gilt $f^n(U) \subset V$ für hinreichend große n .

Definition¹⁵. (X, f) sei ein diskretes dynamisches System, und A sei eine f -invariante Teilmenge von X . f heißt *topologisch transitiv* auf A , wenn es für jedes Paar offener Mengen $\emptyset \neq U, V \subset A$ ein $n \in \mathbb{Z}_+$ gibt mit $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definition. Ist $f : X \rightarrow X$ topologisch transitiv auf einer invarianten attraktiven Menge $A \subset X$, dann nennt man A einen *Attraktor* des dynamischen Systems (X, f) .

Der amerikanische Mathematiker John Guckenheimer führte 1976 eine geometrische Beschreibung eines Flusses ein¹⁶, welcher die qualitative Dynamik der Lösungen des Lorenzsystems zu haben schien. Es stellte sich dann allerdings heraus, daß das Lorenzsystem dem geometrischen Modell nicht hinreichend entspricht. Dennoch ist Tuckers Beweisidee vom geometrischen Modell inspiriert.

Im folgenden werden Guckenheimers Ergebnisse zusammengefaßt, die zeigen, daß der geometrisch definierte Fluß einen seltsamen Attraktor aufweist.

1.3.1 Definition des Modellflusses

Das geometrische Modell des Flusses ist so *konstruiert*, daß es bestimmte Eigenschaften erfüllt, aus denen sich die Existenz eines seltsamen Attraktors schließen läßt. Obwohl die globalen Eigenschaften beim Lorenz-Attraktor nicht vollständig erfüllt sind, ist das Bild des Lorenzsystems als anschauliche Vorstellung bei der folgenden Beschreibung des Modellflusses hilfreich.

Es sei ein Fluß im \mathbb{R}^3 gegeben mit einem Fixpunkt im Ursprung und dazugehörigen reellen Eigenwerten wie beim Lorenzsystem, d.h. mit zwei negativen und einem positiven Eigenwert:

$$0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$$

Dementsprechend ist die stabile Mannigfaltigkeit $W^s(\mathbf{0})$ des Ursprungs zweidimensional, und die instabile Mannigfaltigkeit $W^u(\mathbf{0})$ eindimensional.

In der Ebene $z = 1$ sei Σ ein Rechteck mit der Eigenschaft, daß für alle Punkte $(x, y, z)^T \in \Sigma$ gilt:

$$\dot{z} < 0,$$

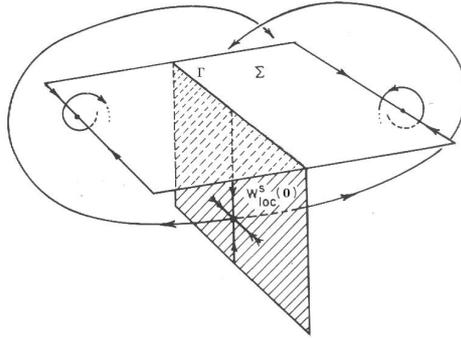
d.h. alle Trajektorien durchlaufen Σ von oben nach unten; die meisten verlassen die Umgebung des Ursprungs anschließend wieder, ungefähr in Richtung von dessen instabiler Mannigfaltigkeit und winden sich außerhalb wieder so, daß sie zu Σ zurückkehren. Die Ausnahme bilden die Punkte aus der Menge $\Gamma := W^s(\mathbf{0}) \cap \Sigma$, deren Trajektorien auf den Fixpunkt $\mathbf{0}$ zulaufen.

Bildet Σ die obere Fläche eines Würfels, so treten fast alle Trajektorien durch diese Fläche ein und verlassen ihn wieder durch zwei gegenüberliegende Seiten.

¹⁴[Metzler1998, Def. 1.7]

¹⁵[Metzler1998, Def. 1.16ff.]

¹⁶[MarsdenMcCracken1976], [Guckenheimer1997, Chapter 5.7]



Das geometrische Modell des Flusses ist nun aus zwei Teilen zusammengesetzt: Der erste Teil modelliert den Fluß lokal in der Nähe des Ursprungs, genauer ausgedrückt im Inneren des Einheitswürfels, der zweite Teil beschreibt die Trajektorien, die in größerer Entfernung verlaufen. Mit diesem zweigeteilten Modell kann auch die Poincarésche Rückkehrabbildung auf der Oberseite des Einheitswürfels als Verknüpfung von zwei verschiedenen Abbildungen aufgefaßt werden:

$$R = D \circ P, \quad (1.15)$$

wobei P den Eintrittspunkt in den Würfel auf den Austrittspunkt abbildet, und der Diffeomorphismus D die Trajektorien außerhalb des Einheitswürfels beschreibt.

Innerhalb des Würfels wird ein Vektorfeld angenommen, das durch eine *lineare* Differentialgleichung bestimmt wird; die definierende Matrix besteht aus den Eigenwerten des Fixpunktes bei $(0, 0, 0)^T$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad 0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2 \quad (1.16)$$

So kann die Abbildung P explizit bestimmt werden: Das System (1.16) hat die einfache Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ x_2^0 e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \quad \text{mit Anfangsbed. } (x_1^0, x_2^0, 1)$$

So ergibt sich als Bedingung für die Austrittszeit t aus dem Einheitswürfel:

$$|x_1| = |x_1^0 e^{\lambda_1 t}| \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda_1} \ln |x_1^0|$$

also erhält man als Schnittpunkt mit einer der beiden Austrittsflächen des Würfels

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, 1) &= (\text{sgn}(x_1), x_2 e^{-\lambda_2 \frac{1}{\lambda_1} \ln |x_1|}, e^{-\lambda_3 \frac{1}{\lambda_1} \ln |x_1|})^T \\ &= (\text{sgn}(x_1), x_2 |x_1|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_1|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}})^T \end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, daß die besonderen Eigenwerte im Ursprung Expansions- bzw. Kontraktions-eigenschaften für die Abbildung P implizieren:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow 0} \frac{\partial P_3}{\partial x_1} = \infty \quad ; \quad \lim_{|x_1| \rightarrow 0} \frac{\partial P_2}{\partial x_2} = 0 \quad (1.17)$$

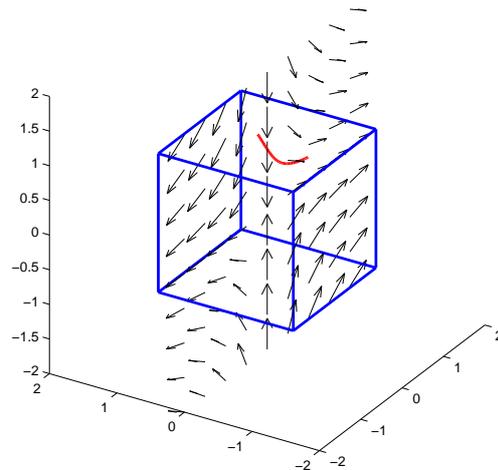


Abbildung: Ein- und Austrittspunkt der Trajektorie am Einheitswürfel; Abbildung P .

Der Fluß außerhalb des Würfels wird im geometrischen Modell zwar als nichtlinear angenommen, doch wird verlangt, daß die Trajektorien zwischen Austritt aus dem Einheitswürfel und Wiedereintritt in den Würfel durch Σ ihre x_2 -Koordinate nicht verändern, d.h.

$$D(\pm 1, x_2, \cdot) = (\cdot, x_2, 1)$$

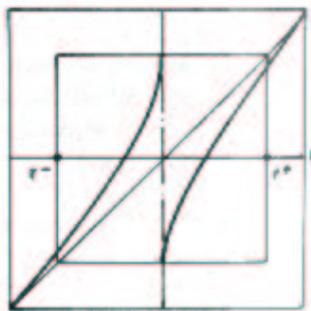
Speziell wird angenommen, daß horizontale Linien auf der Austrittsfläche, d.h. Kurven mit konstantem Wert für x_3 , auf Linien in Σ abgebildet werden, d.h. Kurven mit konstantem Wert für x_1 :

$$l(t) = (\pm 1, t, c) \xrightarrow{D} \tilde{l}(t) = (\tilde{c}, t, 1) \quad , \quad t \in [-1, 1]$$

Dies impliziert, daß die erste Komponente der Rückkehrabbildung R unabhängig von x_2 ist. Es existiert also eine Darstellung

$$\begin{aligned} R &= (f(x_1), g(x_1, x_2)) \\ &= D(\text{sgn}(x_1), x_2 |x_1|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_1|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}). \end{aligned}$$

Dabei wird für f Punktsymmetrie zum Ursprung angenommen und das Vorhandensein einer Singularität in 0, d.h. f besitzt etwa das folgende Schaubild:



Damit wird auch sichergestellt, daß die Expansions- bzw. Kontraktionseigenschaften (1.17) sich auf R übertragen.

Für die Rückkehrabbildung auf Σ wird insgesamt gefordert $R(\Sigma \setminus \Gamma) \subset \Sigma$. Bildet man nun

$$\Lambda := \bigcap_{i=0}^{\infty} R^i(\Sigma)$$

so ist Λ kompakt, invariant und attraktiv¹⁷.

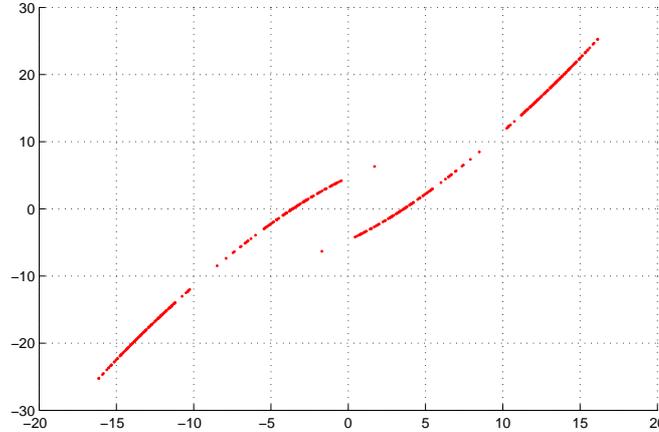


Abbildung: Approximation des Attraktors Λ bei $z = \rho - 1 = 27$.

Betrachtet man die Wirkung der Abbildung R auf $\lambda \in \Lambda$, so gilt zunächst

$$DR = \begin{pmatrix} D_1f & 0 \\ D_1g & D_2g \end{pmatrix}$$

Bezüglich der partiellen Abbildungen D_1f und D_2g , welche die Eigenwerte dieser Matrix bestimmen, werden nun zwei weitere Annahmen gemacht:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \leq \mu < 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} > \sqrt{2} \quad \forall x_1, x_2 \in \Sigma \quad (1.18)$$

Damit gilt $|D_1f| \neq 1$, $|D_2g| \neq 1$ und Λ ist eine hyperbolische Menge.

Nach einem Satz der Spektraltheorie¹⁸ existiert somit für $\lambda \in \Lambda$ ein sog. Splitting

$$T_\lambda \Lambda = \mathbb{E}_x^s \oplus \mathbb{E}_x^u$$

in einen kontrahierenden Unterraum \mathbb{E}_x^s und einen expandierenden Unterraum \mathbb{E}_x^u . Dieses Splitting ist *invariant*, d.h. es gilt

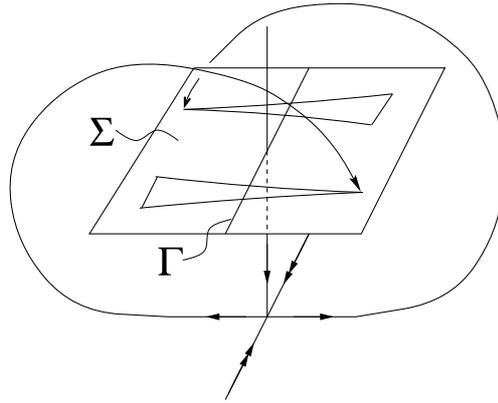
$$D_x R(\mathbb{E}_x^s) = \mathbb{E}_{R(x)}^s; \quad D_x R(\mathbb{E}_x^u) = \mathbb{E}_{R(x)}^u$$

Die Unterräume \mathbb{E}_x^s sind gerade die Kurven $\tilde{l}(t)$ (s.o). Durch das hyperbolische Splitting hat man also eine Überdeckung der Fläche Σ durch eine Familie \mathfrak{A} von Kurven erhalten, die invariant unter R ist, d.h. eine Kurve aus \mathfrak{A} wird wiederum auf eine (andere) Kurve aus \mathfrak{A} abgebildet.

Die genannten Annahmen führen zunächst zu der folgenden Skizze der Rückkehrabbildung R :

¹⁷vgl. [Metzler1998], Satz 1.11

¹⁸vgl. [Metzler1998], Def. 11.25ff.



Aus $D_2g \rightarrow 0$ folgt, daß die Grenzwerte $\lim_{x_1 \rightarrow 0^-} R(x_1, x_2), \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} R(x_1, x_2)$ unabhängig von x_2 sind, und man setzt

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^-} R(x_1, x_2) =: (r^+, t^+), \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} R(x_1, x_2) =: (r^-, t^-)$$

Ferner sei $V = I \times [-1, 1] \subset \Sigma$ der vertikale Streifen, der durch $I = [r^-, r^+]$ definiert ist, und durch R auf sich selbst abgebildet wird; für f wird angenommen, daß gilt $0 < f^2(r_+) < f(r_+) < r_+$ und $0 > f^2(r_-) > f(r_-) > r_-$.

1.3.2 Nachweis der Existenz eines Attraktors

Es wird gezeigt, daß $\Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} R^i(\Sigma)$ ein Attraktor der Abbildung R ist.

Dazu sei $x \in \Lambda$ und $U = K \times J$ eine rechteckige Umgebung von x . Es wird gezeigt, daß die Bilder von U dicht liegen in Λ . Dies geschieht in zwei Schritten:

Lemma 1. Es gibt ein $n > 0$, so daß die erste Komponente von R , d.h. $f^n(K)$ die Menge V abdeckt. Diese Eigenschaft wird in der Literatur als *locally eventually onto* bezeichnet¹⁹.

Beweis. Induktiv sei eine Folge von Intervallen definiert:

$$K_0 = \begin{cases} K & \text{für } 0 \notin K \\ \text{die längste Komponente von } K \setminus \{0\} & \text{für } 0 \in K \end{cases}$$

und

$$K_{i+1} = \begin{cases} f(K_i) & \text{für } 0 \notin f(K_i) \\ \text{die längste Komponente von } f(K_i) \setminus \{0\} & \text{für } 0 \in f(K_i) \end{cases}$$

Nun setze

$$\mu = \inf_{x \in I \setminus \{0\}} \{f'(x)\}$$

Den gemachten Annahmen entsprechend gilt $\mu > \sqrt{2}$. Außerdem gilt nach Konstruktion $0 \notin K_i^\circ$. Daher ist nach der Kettenregel

$$\text{diam}(f(K_i)) > \mu \text{diam}(K_i)$$

Wegen der Wahl von K_{i+1}, K_{i+2} gilt zudem

$$\text{diam}(K_{i+1}) \geq \begin{cases} \mu \text{diam}(K_i) & \text{für } 0 \notin f(K_i) \\ \frac{\mu}{2} \text{diam}(K_i) & \text{für } 0 \in f(K_i) \end{cases}$$

$$\text{diam}(K_{i+2}) \geq \begin{cases} \mu \text{diam}(K_{i+1}) & \text{für } 0 \notin f(K_{i+1}) \\ \frac{\mu}{2} \text{diam}(K_{i+1}) & \text{für } 0 \in f(K_{i+1}) \end{cases}$$

¹⁹vgl etwa [Robinson1998], p. 351

Sei nun angenommen, daß $0 \notin (f(K_i) \cap f(K_{i+1}))$ gilt. Dann ist

$$\text{diam}(f(K_{i+2})) > \frac{\mu^2}{2} \text{diam}(K_i)$$

Demnach wächst alle zwei Iterationen die Länge von K_i mit einem Faktor von $\mu^2/2 > 1$ bis zu einem $n \in \mathbb{N}$, für das gilt: $0 \in (f(K_{n-2}) \cap f(K_{n-1}))$.

Hilfsbehauptung. Für das oben konstruierte $n \in \mathbb{N}$ gilt $K_n = (r_-, 0]$ oder $K_n = [0, r_+)$.

Beweis. Es ist $0 \in f(K_{n-2})$, also $0 \in \partial(K_{n-1})$, d.h. K_{n-1} endet genau bei 0. Sei $b > 0$, so daß gilt $f(\pm b) = 0$. Der Umstand $0 \in f(K_{n-1})$ impliziert nun, daß b oder $-b \in K_{n-1}$, also gilt insgesamt

$$K_{n-1} \supset [-b, 0) \text{ oder } (0, b]$$

Also enthält $f(K_{n-1})$ entweder $f([-b, 0)) = [0, r_+)$ oder $f((0, b]) = (r_-, 0]$ □

Nun sei $c = f(r_+)$. Aus der Hilfsbehauptung folgt $f(K_n) = (-c, r_+) = (-c, 0] \cup [0, r_+)$ oder $f(K_n) = (r_-, c) = (r_-, 0] \cup [0, c)$.

Wegen $f(c) = f^2(r_+) > 0 = f(b)$ gilt $c > b$. Schließlich folgt damit:

$$\begin{aligned} f^2(K_n) &\supset f((-c, 0]) \cup f([0, r_+)) \\ &\supset f((-b, 0]) \cup f([0, r_+)) \\ &\supset [0, r_+) \cup (r_-, c) \\ &\supset (r_-, r_+) \end{aligned}$$

Ein ähnliches Argument gilt für den Fall $f(K_n) = (r_-, c) = (r_-, 0] \cup [0, c)$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Lemma 2. Die Bilder von U liegen dicht in Λ , d.h. in jeder ε -Umgebung eines beliebigen Punktes $s \in \Lambda$ gibt es ein Bild $R^n(x, y)$ eines Punktes $(x, y) \in U$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, sowie $s \in \Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} R^i(\Sigma)$. Aus der Kontraktionsbedingung (1.18) folgt

$$d(R^n(x, y_1), R^n(x, y_2)) < \mu^n |y_1 - y_2|$$

Daher gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$d(R^m(x, y_1), R^m(x, y_2)) < \varepsilon \tag{1.19}$$

für beliebige $(x, y_1), (x, y_2) \in \Sigma$.

Wegen $s \in \bigcap_{i=0}^{\infty} R^i(\Sigma)$ gibt es einen Punkt $(u, v) \in \Sigma$ mit $R^m(u, v) = s$. Nun gibt es nach Lemma 1 Werte $n \in \mathbb{N}$, w und einen Punkt $(x, y) \in U$, so daß gilt $R^n(x, y) = (u, w)$.

Damit folgt aus (1.19), daß der Punkt $R^{m+n}(x, y)$ in der ε -Umgebung um $R^m(u, v) = s$ liegt. Dies zeigt, daß die Trajektorien aus U eine dichte Teilmenge von Λ bilden. □

Existenz eines seltsamen Attraktors

Definition²⁰. (X, f) sei ein diskretes dynamisches System, und A ein Attraktor von (X, f) . A heißt *seltsamer Attraktor*, wenn f auf A sensitiv abhängig ist von den Anfangsbedingungen, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $x \in A$ und für jede Umgebung $U(x)$ in A ein $y \in U(x)$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

Zum Nachweis der sensitiven Abhängigkeit der Rückkehrabbildung R von den Anfangswerten werden wieder die besonderen Eigenschaften von f , der ersten Komponente von R , verwendet:

Eigenschaften 1. Eigenschaften

²⁰[Metzler1998, Def. 6.11]

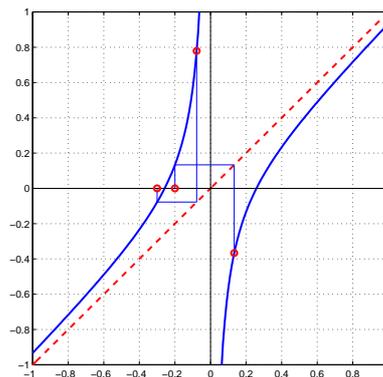
1. $f(x_1)$ hat eine einzige Singularität bei $x_1 = 0$ mit

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^-} f(x_1) = 1 \quad , \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} f(x_1) = -1,$$

2. $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow [-1, 1]$,

3. f ist C^1 auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ und es gilt $f'(x_1) > \sqrt{2}$ für $x \neq 0$.

f weist sensitive Abhängigkeit auf. Dies kann gezeigt werden durch *symbolische Dynamik*, wird aber auch unmittelbar deutlich bei der Betrachtung des Graphen von f :



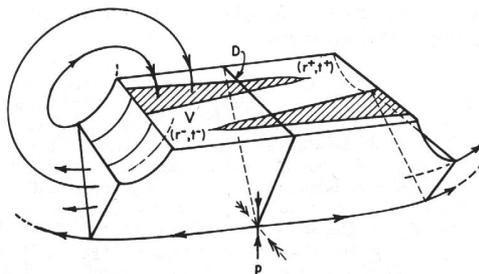
Durch die Expansionseigenschaft von f und die Polstelle bei 0 werden zwei Punkte nach endlich vielen Iterationen auf verschiedene Zweige von f abgebildet und entfernen sich voneinander. Wählt man nämlich $u, v \in [-1, 1]$ mit $d(u, v) = \delta$, so gilt

$$d(f^n(u), f^n(v)) > (\sqrt{2})^n \delta$$

Der räumliche Attraktor des geometrischen Flusses

Globale Betrachtung

Um aus dem Attraktor der Rückkehrabbildung auf Σ auf den dreidimensionalen Attraktor des Flusses zu schließen, ist das folgende Bild hilfreich:



Es sei ein Körper im \mathbb{R}^3 betrachtet, dessen Seitenflächen tangential zum Fluß geformt sind mit Ausnahme der Oberseite, die durch $V \subset \Sigma$ gebildet wird. Auf der vorderen und hinteren Oberfläche ist der Fluß in den Körper hinein gerichtet, während er an den Seiten nach außen gewandt ist.

Dabei wird er austretende Fluß durch die Rückkehrabbildung F wieder auf die obere Fläche abgebildet. Mit dieser Betrachtungsweise ist der räumliche Attraktor die Vereinigung aller Trajektorien, die durch $\Lambda \subset V$ gehen zusammen mit dem Punkt $(0, 0, 0)^T$.

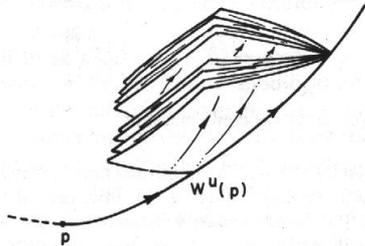
Lokale Betrachtung

Definition²¹. Sei I ein Intervall. Eine Menge $\Lambda \subset I$ heißt *Cantor-Menge*, wenn sie abgeschlossen, vollständig unzusammenhängend und perfekt ist. Eine Menge Λ ist *vollständig unzusammenhängend*, falls sie keine Intervalle enthält, und sie ist *perfekt*, falls jeder Punkt in Λ Häufungspunkt von Λ ist.

Der Attraktor hat lokal betrachtet eine Cantormengen-artige Struktur. Dies wird durch die folgende Überlegung plausibel: Durch die Rückkehrabbildung F wird das Rechteck Σ auf zwei Gebiete abgebildet. Diese wiederum werden auf insgesamt vier Gebiete abgebildet, dann auf acht und so weiter.

Betrachtet man den Grenzwert der Iteration, dann wird die Rückkehrfläche Σ vom Attraktor in einer Cantormenge von Kurven geschnitten. Wechselt man zur Betrachtungsebene des dreidimensionalen Flusses, so heißt dies, daß der Attraktor aus einer Cantormenge zweidimensionaler „Seiten“ besteht, von denen jede die Fläche Σ in einer Kurve schneidet.

Der Attraktor erscheint gewissermaßen als *Cantor-Buch*. Eine Familie von Oberflächen parametrisiert durch eine Cantormenge, die zusammengeheftet sind an einer Kurve. Diese Kurve (der „Rücken“ des Buches), ist die instabile UMF von $(0, 0, 0)^T$.



1.4 Der Lorenz-Attraktor ist ein seltsamer Attraktor

Zusammenfassend wurde im letzten Abschnitt das Folgende getan: Ausgehend von geometrischen Betrachtungen wurden günstige Annahmen an ein Vektorfeld gestellt. Diese Annahmen, insbesondere über Expansion und Kontraktion längs der Koordinatenachsen, hatten bei der Betrachtung der Poincaréschen Rückkehrabbildung ein hyperbolisches Splitting

$$T_\lambda M = \mathbb{E}_x^s \oplus \mathbb{E}_x^u$$

für Punkte λ auf der Rückkehrebene Σ als Ergebnis. Dieses wiederum ergab eine Überdeckung von Σ durch eine Kurvenfamilie \mathfrak{R} . Die Rückkehrabbildung selbst konnte dargestellt werden als

$$R = (f(x_1), g(x_1, x_2))$$

Mit den über f gemachten Annahmen gelang der Nachweis der Existenz eines seltsamen Attraktors.

Letztere Überlegungen lassen sich weiter abstrahieren: Da alle Punkte einer Kurve $\tilde{l}_1(t) \in \mathfrak{R}$ auf Punkte einer anderen, jedoch gemeinsamen Kurve $\tilde{l}_2(t) \in \mathfrak{R}$ abgebildet werden, kann man alle Punkte einer Kurve zu einer Äquivalenzklasse zusammenfassen. Bildet man nun den Quotienten

$$I := \Sigma / \mathbb{E}_x^s$$

so reduziert sich die Rückkehrabbildung R auf eine Abbildung $f : I \rightarrow I$. Mit dieser Abbildung f können dieselben Überlegungen durchgeführt werden wie mit der ersten Komponentenfunktion von R - tatsächlich waren beide Abbildungen im letzten Abschnitt identisch.

²¹[Metzler1998, Def. 3.5]

Wie erwähnt, erfüllt das Lorenz-System nicht alle Eigenschaften des geometrischen Modells. So gibt es für die in (1.15) konstruierte Rückkehrabbildung R im „echten“ Lorenz-System durchaus Mengen, auf denen R in mehrere Koordinatenrichtungen expandiert, was nach dem geometrischen Modell nicht der Fall ist.

Als Tucker 1998 in [Tucker1998] der Beweis der

Behauptung. Für die *klassischen* Parameterwerte $\rho = 28, \sigma = 10$ und $\beta = -\frac{8}{3}$ liefern die Lorenz-Gleichungen (L) einen seltsamen Attraktor \mathcal{A} .

gelang, ließ er sich jedoch vom geometrischen Modell wesentlich inspirieren. Tucker zeigt in seiner Arbeit, daß auch im klassischen Lorenzsystem Voraussetzungen gegeben sind, welche ein Splitting der Rückkehrabbildung und damit eine Überdeckung durch Kurven, wie oben beschrieben, implizieren. Die Intervall-Abbildung f , die sich durch Bildung des Quotienten ergibt, erfüllt die Bedingungen aus 1, Seite 23, die hinreichend sind für die Argumentation im letzten Abschnitt.

Im folgenden betrachten wir das durch unsere Koordinatentransformation in (1.14) erhaltene System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 11.8x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -22.8x_2 + 0.29(x_1 + x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2.67x_3 + (x_1 + x_2)(2.2x_1 - 1.3x_2)\end{aligned}\tag{L'}$$

wofür wir auch $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ schreiben.

Als Norm im \mathbb{R}^3 verwenden wir für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ bzw. für Abbildungen $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$|\mathbf{x}| = \max\{|x_i| : i \in \mathfrak{J}\} \quad \|g\|_r = \max\{|f(\mathbf{x})| : |\mathbf{x}| \leq r\}$$

1.4.1 Tuckers Beweisidee

Nachahmung des geometrischen Modells

Tucker betrachtet die Ebene $\Sigma = \{\mathbf{x} : x_3 = 27\}$ und die Menge $\Gamma = \Sigma \cap W^s(0)$, wie sie im geometrischen Modell des Lorenz-Attraktors definiert sind.

Er betrachtet eine kompakte Teilmenge $N \subset \Sigma$, die er in zwei Komponenten N^+ und N^- aufspaltet, welche wiederum jeweils aus 350 Rechtecken N_i^\pm bestehen. Die beiden Komponenten sind symmetrisch gewählt, so daß es wegen der auf Seite 8 erwähnten Symmetrie-Eigenschaft des Lorenz-Systems ausreicht, sich bei den folgenden Betrachtungen auf eine der beiden Komponenten zu beschränken.

Alle diese Rechtecke N_i^\pm sind transversal zum Fluß der Lorenz-Gleichungen, d.h. die Komponente $f_3(\mathbf{x})$ aus (L') verschwindet nicht. Tucker „verfolgt“ nun jedes dieser Rechtecke längs des Flusses. Betrachten wir dazu ein achsenparalleles Rechteck $\mathcal{R}^{(k)}$ in der x_1x_2 -Ebene, das transversal zum Fluß ist, also

$$\mathcal{R}^{(k)} = [x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+] \times \{x_3^{(k)}\}.$$

Wir nehmen an, daß alle Trajektorien dieses Rechteck von oben nach unten durchqueren. Wegen der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten gibt es dann eine Ebene $\Sigma^{k+1} = \{\mathbf{x} : x_3 = x_3^{(k+1)}\}$ durch die der Fluß fließt, sofern nur der Abstand von $x_3^{(k)}$ zu $x_3^{(k+1)}$ nicht zu groß ist.

Es bezeichne $\varphi(x, t)$ den zu (L') gehörenden Fluß. Wir betrachten eine Abbildung

$$\Pi : \mathcal{R}^{(k)} \rightarrow \Sigma^{(k+1)} \quad \mathbf{x} \mapsto (\varphi_1(\mathbf{x}, t(\mathbf{x})), \varphi_2(\mathbf{x}, t(\mathbf{x})))$$

wobei $t = t(\mathbf{x})$ die Lösung von $\varphi_3(\mathbf{x}, t(\mathbf{x})) = x_3^{(k+1)}$ ist. Die Abbildung Π ist dann eine von zwei Variablen abhängige Funktion. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhalten wir für $i \in \underline{3}$ die Existenz von $\tau_i \in [0, t]$, so daß die Gleichungen

$$\varphi_i(\mathbf{x}, t) = x_i + t f_i(\varphi(\mathbf{x}, \tau_i)) \quad \tau_i \in [0, t] \quad (1.20)$$

gelten. Indem man $h := x_3^{(k)} - x_3^{(k+1)}$ setzt und (1.20) für $i = 3$ nach t auflöst, erhält man

$$x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + t f_3(\varphi(\mathbf{x}, \tau_3)) \Rightarrow t = \frac{-h}{f_3(\varphi(\mathbf{x}, \tau_3))} \quad (1.21)$$

Setzt man dies in die zwei verbleibenden Gleichungen von (1.20) ein, so erhält man

$$\Pi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}, t(\mathbf{x})) = x_i - h \frac{f_i(\varphi(\mathbf{x}, \tau_i))}{f_3(\varphi(\mathbf{x}, \tau_3))} \quad \text{für } i = 1, 2 .$$

Die rechte Seite von (1.21) benutzt Tucker nun, um Schranken für $t(\mathbf{x})$ zu finden. Damit erhält er dann wiederum Abschätzungen für die Koordinaten des Punktes $\Pi(\mathbf{x}) \in \Sigma^{(k+1)}$. Es ergibt sich eine Abschätzung für die Abweichungen in Richtung der x_1 - bzw. x_2 -Achse durch

$$\delta x_i = h \left| \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_3(\mathbf{x})} \right| \approx |x_i - \Pi_i(x)| \quad \text{für } i = 1, 2 .$$

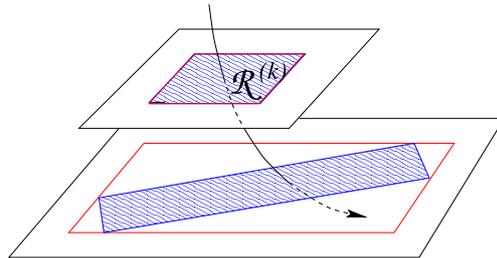
Wegen der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten, kann man dann (sofern das Rechteck $\mathcal{R}^{(k)}$ klein genug gewählt ist) die δx_i geringfügig vergrößern, so daß für alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{(k)}$ die Abweichungen längs der x_1 - bzw. der x_2 -Achse durch diese (vergrößerten) δx_i abgeschätzt werden können. Indem man nun

$$B := [x_1^- - \delta x_1, x_1^+ + \delta x_1] \times [x_2^- - \delta x_2, x_2^+ + \delta x_2] \times [x_3^{(k+1)}, x_3^{(k)}]$$

setzt, erhält man somit einen Quader, in dem alle Trajektorien zwischen den Ebenen $\mathcal{R}^{(k)}$ und $\Sigma^{(k+1)}$ verlaufen. Beziehungsweise wenn wir mit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ den Mittelpunkt von B bezeichnen, können wir B schreiben als

$$B = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \pm (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) .$$

Tucker wählt einen Wert $\Delta x_3 \equiv \frac{1}{2000}$. Die Größe von Δx_1 und Δx_2 liegt zwischen 0.010 und 0.070. Im Regelfall (auf den wir uns hier beschränken wollen — für den Ausnahmefall gibt Tucker jedoch Modifikationen an) kann man also davon ausgehen, daß sich das Bild von $\mathcal{R}^{(k)}$ unter Π vollständig in einem achsenparallelen Rechteck $\mathcal{R}^{(k+1)} \subset \Sigma^{(k+1)}$ einhüllen läßt, auf dessen Rändern die Bilder der Eckpunkte von $\mathcal{R}^{(k)}$ liegen. [Genauer gesagt, liegen die Bilder der Eckpunkte durch die Vergrößerung der δx_i natürlich nicht direkt auf dem Rand des Rechtecks $\mathcal{R}^{(k+1)}$, sondern im Inneren desselben.] Die folgende Skizze verdeutlicht dies.



Durch ausreichend großzügige Abschätzungen des Einhüllenden Rechtecks $\mathcal{R}^{(k+1)}$ in Richtung der x_1 - und der x_2 -Achse ist somit einerseits gesichert, daß tatsächlich das Bild von $\mathcal{R}^{(k)}$ unter Π vollständig im Inneren von $\mathcal{R}^{(k+1)}$ enthalten ist. Andererseits wird dadurch das Problem von Rechner-bedingten Rundungsfehlern umgangen, da die gemachten Abschätzungen größer gewählt werden als die größtmöglichen auftretenden Rundungsfehler. Diese müssen somit bei dem angegebenen Verfahren nicht mehr berücksichtigt werden.

Das gesamte Verfahren wird nun im Anschluß auf das neu entstandene Rechteck $\mathcal{R}^{(k+1)}$ angewendet, so lange bis man (hoffentlich) wieder mit den Trajektorien in N landet.

Rechtecke in verschiedenen Ebenen

Sei nun (nach obigem Muster) $\mathcal{R}^{(0)} \subset \Sigma$ unser „Startrechteck“. Ein erstes Problem tritt auf, wenn nach einigen Iterationsschritten die Trajektorien unter Umständen gar nicht mehr transversal zu einem Rechteck in der x_1x_2 -Ebene sind. Die auf S. 13f. mit dem Runge-Kutta-Verfahren erstellten Skizzen zeigen, daß dieser Fall irgendwann zwangsläufig eintreten muß. Sei $\mathcal{R}^{(k)}$ das Rechteck nach k Schritten. Wir schreiben

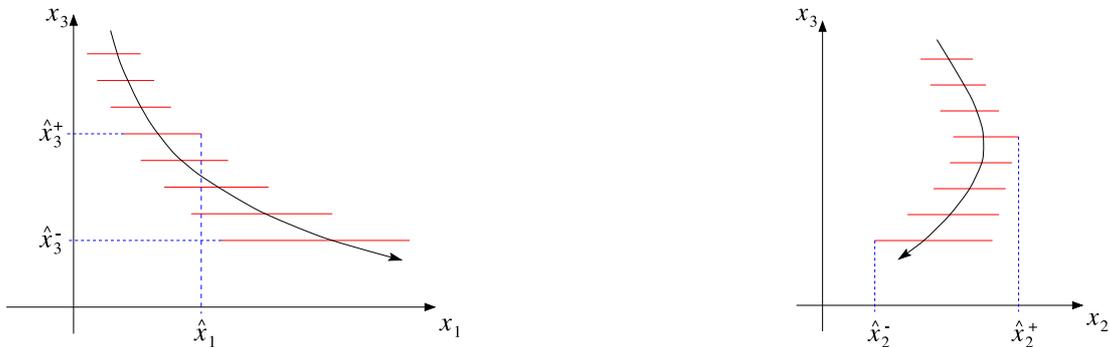
$$\mathcal{R}^{(k)} = [x_1^-(k), x_1^+(k)] \times [x_2^-(k), x_2^+(k)] \times \{x_3^{(k)}\} .$$

Da wir davon ausgehen, daß die Trajektorien irgendwann nicht mehr transversal sind, muß es ein $n \in \mathbb{N}$ geben, so daß für dieses n erstmals (O.B.d.A.) $|f_3(\mathbf{x})| \leq f_1(\mathbf{x})$ gilt, die Trajektorien machen also eine Bewegung nach rechts (s. unten stehende Skizze).

Tucker führt nun die folgende Größen ein:

$$\begin{aligned} \hat{x}_3^- &:= x_3(n) \\ \hat{x}_3^+ &:= x_3(n_0) \quad \text{mit} \quad n_0 := \max\{k \in [0, n] : x_1^+(k) < x_1^-(n)\} \\ \hat{x}_2^- &:= \min\{x_2^-(k) : k \in [n - n_0, n]\} \\ \hat{x}_2^+ &:= \max\{x_2^+(k) : k \in [n - n_0, n]\} \\ \hat{x}_1 &:= x_1^+(n_0) \end{aligned}$$

Diese Festlegungen werden durch die folgende Abbildung verdeutlicht:



Man sieht, daß

$$\hat{\mathcal{R}} := \{\hat{x}_1\} \times [\hat{x}_2^-, \hat{x}_2^+] \times [\hat{x}_3^-, \hat{x}_3^+]$$

ein Rechteck in der x_2x_3 -Ebene definiert, und alle Trajektorien, die durch die Rechtecke $\mathcal{R}^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$ laufen, müssen aufgrund der „großzügigen“ Definition der Eckpunkte des neuen Rechtecks auch durch $\hat{\mathcal{R}}$ laufen. Nun können wir auf unser neues Rechteck wieder das oben vorgestellte Verfahren anwenden.

Zerlegung der Rechtecke

Die Rechtecke, die aus den verschiedenen Iterationsschritten entstehen, haben die Tendenz immer größer zu werden, so daß unsere Abschätzungen mit steigender Anzahl von Iterationen wertlos zu werden drohen. Von Zeit zu Zeit werden die erhaltenen Rechtecke unterteilt. Ist in einem Rechteck die eine Seite mehr als doppelt so lang wie die andere, so wird das Rechteck in der Mitte der längeren Seite halbiert. Anderenfalls wird das Rechteck in vier gleich große Teile geteilt. Auf jedes neu entstandene Rechteck wird nun das obige Verfahren angewendet.

Der Fluß in der Nähe des Ursprungs

In der Nähe des Ursprungs kann es passieren, daß die numerischen Abschätzungen für die Rechtecke wertlos werden. Das liegt daran, daß der Ursprung eine Ruhelage ist und somit die Flußzeiten unbegrenzt sind. Dies führt dazu, daß das qualitative Verhalten in der Nähe des Ursprungs mit den numerischen Methoden evtl. falsch wiedergegeben wird. Somit muß eine andere Methode entwickelt werden, um die Trajektorien in der Nähe des Ursprungs abzuschätzen. Tuckers Untersuchungen dazu beginnen mit der folgenden Aussage:

Proposition. Es gibt eine Koordinatentransformation $\xi = \zeta + \phi(\zeta)$ mit

$$\|\phi\|_r \leq \frac{r^2}{2} \quad \text{für } r \leq 1$$

so daß das Lorenz-System (L') $\dot{\xi} = A\xi + F(\xi)$ in die *Normalform* $\dot{\zeta} = A\zeta + G(\zeta)$ überführt wird, wobei gilt

$$\min\{|\zeta_1|, |\zeta_2| + |\zeta_3|\} = \mathcal{O}(\varepsilon) \Rightarrow |G_i(\zeta)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{10}) \quad \text{für } i \in \underline{3}$$

und

$$\|G\|_r \leq 7 \cdot 10^{-9} \frac{r^{20}}{1-3r} \quad \text{für } r < \frac{1}{3}.$$

Folgerung. Da G gewissermaßen einen nichtlinearen „Störterm“ innerhalb des Systems darstellt, bedeuten die angegebenen Abschätzungen für G , daß für Punkte ζ in der Nähe der ζ_1 -Achse bzw. der $\zeta_2\zeta_3$ -Ebene dieser Störterm in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{10})$ auftritt. Insbesondere folgt daraus aber

$$G_1(0, \zeta_2, \zeta_3) = 0 \quad \text{und} \quad G_{2,3}(\zeta_1, 0, 0) = 0.$$

Dies bedeutet dann aber wegen der Diagonalgestalt von A , daß die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit in einer kleinen Umgebung des Ursprungs mit der $\zeta_2\zeta_3$ -Ebene bzw. der ζ_1 -Achse zusammenfallen.

Wir betrachten nun zunächst nur den linearen Teil des Systems in unseren neuen ζ -Koordinaten, also das System $\dot{\zeta} = A\zeta$. Bezeichnet man mit $\phi(\zeta, t)$ den zugehörigen Fluß, so erhält man als Lösung der Differentialgleichung $\phi(\zeta, t) = e^{At}\zeta$ bzw. komponentenweise $\phi_i(\zeta, t) = e^{\lambda_i t}\zeta_i$ für $i \in \underline{3}$, da ja A eine Diagonalmatrix ist. [Die λ_i sind die Eigenwerte der Linearisierung des Lorenz-Systems im Ursprung (s. o.).]

Wir legen nun einen kleinen Würfel mit Radius (d.h. halber Kantenlänge) r um den Ursprung und betrachten für eine Punkt ζ mit $\zeta_1 \neq 0$ im Inneren des Würfels die Trajektorie durch diesen Punkt. Da die Eigenwerte die Bedingung

$$0 < \underbrace{\frac{8}{3}}_{-\lambda_3} < \underbrace{11.8277}_{\lambda_1} < \underbrace{22.8277}_{-\lambda_2}$$

erfüllen, sieht man bei Betrachtung von ϕ , daß diese Trajektorie den Würfel nur durch die Seiten verlassen kann, die senkrecht auf der ζ_1 -Achse stehen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\phi_1(\zeta, t) = \text{sgn}(\zeta_1)r$ gilt. Man rechnet leicht nach, daß dann für die Austrittszeit $\tau_e(\zeta)$ gilt:

$$\tau_e(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{r}{|\zeta_1|}$$

Setzt man τ_e nun in die Koordinaten-Funktionen ein, so erhält man als Koordinaten für den Austrittspunkt

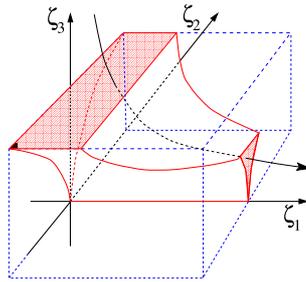
$$\phi(\zeta, \tau_e(\zeta)) = \left(\text{sgn}(\zeta_1)r, \zeta_2 \left(\frac{|\zeta_1|}{r} \right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, r \left(\frac{|\zeta_1|}{r} \right)^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right). \quad (1.22)$$

Wegen $\frac{|\zeta_1|}{r} < 1$ und $\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \approx 1.93$ wird ein Linienelement, das in Richtung der ζ_2 -Koordinate verläuft, stark kontrahiert, wohingegen wegen $\frac{-\lambda_3}{\lambda_1} \approx 0.225$ ein Linienelement in Richtung der ζ_1 -Achse expandiert.

Ferner gilt für einen Punkt ζ auf der Oberfläche des Würfels

$$\frac{\phi_2(\zeta, t)}{\phi_3(\zeta, t)} = \frac{\zeta_2}{r} e^{(\lambda_2 - \lambda_3)t} \approx \frac{\zeta_2}{r} e^{-20.161t}$$

Das bedeutet, daß alle Trajektorien, die durch die Oberseite des Würfels gehen, diesen in zwei Regionen (genauer: zwei sog. *cusp shaded regions*) auf den zur ζ_1 -Achse senkrecht stehenden Seiten des Würfels verlassen, also der Menge $\{\zeta : |\zeta_1| = r, |\zeta_2|, |\zeta_3| \leq r\}$. Die folgende Skizze verdeutlicht das für die eine Hälfte des Würfels:



Wir haben bis jetzt nur den linearen Anteil betrachtet. Wir müssen uns also noch überlegen, wie groß der Fehler ist, den wir dadurch gemacht haben, daß wir G weggelassen haben. Wir wollen also herausfinden, inwieweit sich die Orbits des Flusses des linearisierten Systems (d.h. bei Weglassen von G) von denen des Flusses des Systems in der Normalform unterscheiden. Dazu betrachten wir nach wie vor den Würfel um den Ursprung, wobei wir von einem Radius $r = \frac{1}{5}$ ausgehen, wir betrachten also $\{\zeta : |\zeta| \leq \frac{1}{5}\}$. Sei nach wie vor ϕ der Fluß des linearisierten Systems (in den ζ -Koordinaten) und sei ψ der Fluß des Systems in Normalform, ebenfalls in den ζ -Koordinaten. Mit Hilfe der zuvor für den linearen Fluß gemachten Überlegungen kommt Tucker zu dem Ergebnis, daß für alle Trajektorien, die durch einen Punkt auf der Oberfläche des Würfels gehen, folgendes gilt:

- Für wachsendes t nimmt die Komponente $|\psi_1(\zeta, t)|$ zu, wohingegen die Komponente $\psi_3(\zeta, t)$ abnimmt.
- Im gesamten Würfel gilt die Abschätzung $\psi_3(\zeta, t) \geq |\psi_2(\zeta, t)|$.
- Die Komponente $|\psi_1(\zeta, t)|$ wächst schneller als die Komponente $\psi_3(\zeta, t)$ abnimmt.
- Der Quotient $\frac{|\psi_2(\zeta, t)|}{|\psi_3(\zeta, t)|}$ nimmt sogar exponentiell in t ab.

Wir hatten aus diesen Eigenschaften für den Fluß des linearisierten Systems ϕ gefolgert, daß alle Trajektorien, die durch die obere Seite des Würfels verlaufen, gemäß der obigen Skizze den Würfel in einer der zwei *cusp shaded regions* verlassen. Diese wichtige Feststellung gilt somit also auch für das System in Normalform-Darstellung.

Desweiteren ergibt sich für den Fluß der Normalform für die Austrittszeit die folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{\lambda_1 + 2 \cdot 10^{-19}} \log \frac{r}{|\zeta_1|} \leq \tau_e(\zeta) \leq \frac{1}{\lambda_1 - 2 \cdot 10^{-19}} \log \frac{r}{|\zeta_1|}$$

Die folgende Abbildung ist somit nach den Vorüberlegungen wohldefiniert:

$$p : \{\zeta : |\zeta_1|, |\zeta_2| \leq r, \zeta_1 \neq 0, \zeta_3 = r\} \rightarrow \{\zeta : |\zeta_1| = r, |\zeta_2|, |\zeta_3| \leq r\}$$

$$\zeta \mapsto \psi(\zeta, \tau_e(\zeta))$$

Jeder Punkt auf der Oberfläche des Würfels (der nicht auf der stabilen Mannigfaltigkeit liegt) wird also auf den Punkt abgebildet, durch den die durch ihn verlaufende Trajektorie den Würfel an einer der Seiten verläßt. Dies entspricht der Idee des geometrischen Modells von Guckenheimer und Williams. Somit hat man nun eine Methode, das Verhalten der Trajektorien in unmittelbarer Nähe zum Ursprung analytisch zu berechnen, und zwar mit einer Fehlerabschätzung in der Größenordnung 10^{-19} .

Tuckers Vorgehensweise ist nun die folgende: Wann immer eines seiner Rechtecke auf die Oberseite des Würfels um den Ursprung trifft, bricht er die numerischen Berechnungen ab und wechselt nach der soeben vorgestellten Methode in die Normalform-Darstellung über. Für die Eckpunkte des Rechtecks berechnet er dann die Austrittspunkte. Unter Umständen kann es dadurch, daß die Rechtecke tendenziell sehr großzügig abgeschätzt sind, dazu kommen, daß sich ein Rechteck auf der Oberfläche des Würfels mit der stabilen Mannigfaltigkeit des Ursprungs schneidet. Ist dies der Fall, so wird es an der Schnittlinie, also der $\zeta_2\zeta_3$ -Ebene in zwei Rechtecke geteilt und dann für jedes einzelne Rechteck die Austrittspunkte ermittelt. Anschließend wird (mit nochmaliger Fehlerabschätzung) wieder zu den ursprünglichen Koordinaten übergegangen und die numerischen Berechnungen werden fortgeführt. Im Fall, daß die Rechtecke die Oberfläche nur streifen, werden die numerischen Berechnungen nicht unterbrochen, da die Fläche der Rechtecke im Vergleich zur Oberfläche des Würfels sehr klein ist.

Kegelfelder

Während Tuckers numerische Untersuchung der Trajektorien des Systems die Existenz einer invarianten Menge auf Σ zeigt, muß für den Nachweis der topologischen Transitivität wie im geometrischen Modell das Verhalten von Tangentialvektoren von Σ unter DR betrachtet werden. Dies geschieht mithilfe sogenannter Kegelfelder (engl. *conefields*):

In jedem seiner Startrechtecke N_i^\pm nimmt sich Tucker dazu zwei Tangentialvektoren

$$u^{(0)} = (1, u_2^{(0)}, 0) \text{ und } v^{(0)} = (1, v_2^{(0)}, 0)$$

wobei $u_2^{(0)}$ und $v_2^{(0)}$ so gewählt werden, daß der Winkel zwischen $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ 10° beträgt. Die Familie all dieser Kegel liefert ihm ein Kegelfeld \mathfrak{C} . Tucker beobachtet nun die Bilder dieser Kegels unter dem Fluß des Systems mit dem gleichen Verfahren, mit dem auch die Trajektorien untersucht wurden. Er erhält so in jedem Schritt, d.h. wenn der Fluß von einem Rechteck $\mathcal{R}^{(k)}$ zum nachfolgenden Rechteck $\mathcal{R}^{(k+1)}$ fließt, durch weitere Abschätzungen einen Kegel, in dem das Bild des ursprünglichen Kegels vollständig enthalten ist.

1.4.2 Ergebnisse

Mit den skizzierten Methoden weist Tucker zusammenfassend in seiner Arbeit die folgenden Punkte nach:

- Die Rückkehrabbildung R im Sinne des geometrischen Modells existiert; Es gibt eine kompakte Teilmenge der Rückkehrebene $N \subset \Sigma$, die *vorwärts invariant* ist, d.h. $R(N \setminus \Gamma) \subset N^\circ$. Dies impliziert die Existenz einer attraktiven Menge Λ .
- Auf N existiert ein Kegelfeld \mathfrak{C} , das unter DR strikt in sich abgebildet wird, d.h. für $x \in N$ gilt $DR(x) \cdot \mathfrak{C}(x) \subset \mathfrak{C}(R(x))$.
- Die Tangentialvektoren von \mathfrak{C} expandieren unter DR nach einer endlichen Zahl von Iterationen. Das bedeutet, es existieren $C > 0$, $\lambda > 1$, so daß für alle $v \in \mathfrak{C}(x)$, $x \in N$ gilt $\|DR^n(x)v\| \geq C\lambda^n\|v\|$, $n \geq 0$. Diese Expansion ist stark genug, um den Nachweis zu führen, daß R topologisch transitiv ist auf Λ .

Die letzten beiden Punkte bilden die Voraussetzung für die Anwendung eines Satzes über stabile Mannigfaltigkeiten²². Dieser liefert die Existenz einer Überdeckung von N durch eine Kurvenfamilie wie beim geometrischen Modell.

Damit sind auch die hieraus gezogenen Schlußfolgerungen richtig: Das Lorenz-System besitzt einen seltsamen Attraktor.

²²vgl. etwa [HPS1977]

Literaturverzeichnis

- [Amann1995] H. Amann “Gewöhnliche Differentialgleichungen“. De Gruyter, Berlin, New York, 1995.
- [Guckenheimer1997] John Guckenheimer. “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields“. Springer, New York 1983, 1997.
- [HPS1977] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub. “Invariant Manifolds“. Lect. Notes in Math. **583**, 1977
- [Lauterbach2002] R. Lauterbach. “Gewöhnliche Differentialgleichungen“. Vorlesungsskript Universität Hamburg, 2002.
- [Lorenz1963] Edward N. Lorenz. “Deterministic Nonperiodic Flow“. J. Atmos. Sci. **20**, 1963.
- [MarsdenMcCracken1976] Marsden, McCracken, J. Guckenheimer. “A Strange, Strange Attractor“. in *The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications*, Springer-Verlag 1976, 368-381.
- [Metzler1998] Wolfgang Metzler. “Nichtlineare Dynamik und Chaos“. Teubner, Stuttgart, Leipzig 1998.
- [Robinson1998] Clark Robinson. “Dynamical Systems“. CRC Press 1998.
- [Saltzman1962] B. Saltzman. “Finite amplitude free convection as an initial value problem-I“. J. Atmos. Sci. **19**, 1962.
- [Sparrow1982] Colin Sparrow. “The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors“. Springer, New York 1982.
- [Tucker1998] Warwick Tucker. “The Lorenz attractor exists“. Department of Mathematics, Uppsala University 1998.