Teilungsagorithmus zur Berechnung von instabilen Mannigfaltigkeiten und globalen Attraktoren

Georg Mainik

Februar 2003

1 Begriffe

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Definition 1. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **invariant**, wenn gilt

$$f(A) = A.$$

Eine invariante Menge A heißt **Attraktor** mit **fundamentaler Umgebung** U, wenn für jede offene Menge V, $A \subset V$, ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq N \quad f^j(U) \subset V.$$

Bemerkung 2. Aus der Stetigkeit von f folgt sofort, daß für jede invariante Menge A auch der Abschluß $\overline{A}$ invariant ist. Also können wir unsere Betrachtungen auf abgeschlossene invariante Mengen A konzentrieren und erhalten

$$A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^j(U).$$

Definition 3. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei A der globale Attraktor. Dann heißt die Menge

$$A_Q := \{x \in A : f^{-k}(x) \in Q \text{ für alle } k \geq 0\}.$$

der **globale Attraktor relativ zu** Q

2 Teilungsalgorithmus

Der Algorithmus generiert eine Folge $(\mathcal{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wo jedes $\mathcal{B}_k$ eine endliche Menge von kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist. Dabei ist $\mathcal{B}_0 = \{Q\}$ und der Durchmesser $\operatorname{diam}(\mathcal{B}_k)$ konvergiert gegen 0. Der Durchmesser der Menge B_k wird definiert als

$$\operatorname{diam}(\mathcal{B}_k) := \max_{B\in\mathcal{B}_k} \operatorname{diam}(B)$$

mit

$$\operatorname{diam}(B) := \sup_{x,y\in B} |x-y|.$$

Die Vereinigung

$$Q_k := \bigcup_{B\in\mathcal{B}_k} B$$

ist die k-te Näherung an unseren relativen Attraktor.
Die Menge $\mathcal{B}_{k+1}$ ensteht in zwei Schritten:

1. (Teilung) Wir konstruieren eine endliche Menge $\widehat{\mathcal{B}}_{k+1}$ von kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit

$$\bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_{k+1}} B = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_k} B$$

und

$$\operatorname{diam}(\widehat{\mathcal{B}}_{k+1}) \leq \vartheta \cdot \operatorname{diam}(\mathcal{B}_k) \quad \text{für ein } \vartheta \in (0,1).$$

2. (Reduktion) Wir definieren

$$\mathcal{B}_{k+1} := \left\{ B \in \widehat{\mathcal{B}}_{k+1} : f^{-1}(B) \cap Q_k \neq \emptyset \right\}$$

Nun zeigen wir, daß Q_k aus dem Algorithmus für $k \to \infty$ gegen den relativen globalen Attraktor A_Q konvergiert. Zunächst zeigen wir, daß A_Q stets in Q_k enthalten ist:

Lemma 4. *Sei A_Q der globale Attraktor relativ zur kompakten Menge Q und sei $Q_0 = Q$, d.h.*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B = Q.$$

Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A_Q \subset Q_k.$$

Beweis. Nach Definition von A_Q gilt $A_Q \subset Q = Q_0$. Angenommen, es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_Q \not\subset Q_k$. Sei ohne Einschränkung k minimal, d.h. es gelte $A_Q \subset Q_{k-1}$. Dann wurde im k-ten Reduktionsschritt ein $B \in \widehat{\mathcal{B}}_k$ entfernt mit $A_Q \cap B \neq \emptyset$. Wegen $f^{-1}(A_Q) \subset A_Q$ gilt $f^{-1}(B) \cap A_Q \neq \emptyset$. Da B entfernt wurde, gilt $f^{-1}(B) \cap Q_{k-1} = \emptyset$. Es gilt aber $A_Q \subset Q_{k-1}$, und somit

$$\emptyset \neq f^{-1}(B) \cap A_Q \subset f^{-1}(B) \cap Q_{k-1} = \emptyset.$$

Widerspruch. □

Eine direkte Folgerung aus diesem Lemma ist

$$A_Q \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k =: Q_\infty. \tag{1}$$

Insbesondere ist $Q_\infty \neq \emptyset$, wenn $A_Q \neq \emptyset$.
Unsere Vorgehensweise sieht jetzt so aus: Als nächstes zeigen wir, daß jede rückwärts invariante Teilmenge von Q im relativen globalen Attraktor A_Q enthalten sein muß. Dann zeigen wir, daß der Durchschnitt Q_∞ rückwärts invariant ist. Damit gilt $Q_\infty \subset A_Q$ und zusammen mit (1) folgt daraus

$$A_Q = Q_\infty.$$

„Rückwärtsinvariant“bedeutet hier nicht $f^{-1}(B) = B$, sondern nur $f^{-1}(B) \subset B$.

Lemma 5. *Sei $B \subset Q$ und es gelte $f^{-1}(B) \subset B$. Dann gilt $B \subset A_Q$.*

Beweis. Aus $f^{-1}(B) \subset B$ folgt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{-k}(B) \subset B \subset Q. \tag{2}$$

Da $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv ist, folgt daraus $B \subset f^k(B)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$B \subset \bigcap_{k \geq 0} f^k(B) \subset \bigcap_{k \geq 0} f^k(U) = A, \tag{3}$$

wobei A der globale Attraktor und U eine fundamentale Umgebung von A ist. (Da A ein globaler Attraktor ist, kann U mit $B \subset U$ gewählt werden) Zusammen bedeuten (2) und (3) gerade, daß $B \subset A_Q$. □

Nun zeigen wir

Lemma 6. *Die Menge Q_∞ ist nichtleer und rückwärts invariant.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, daß $A_Q \subset Q_\infty$ ist. Somit ist $Q_\infty \neq \emptyset$. Es bleibt zu zeigen

$$f^{-1}(Q_\infty) \subset Q_\infty.$$

Angenommen, es gibt ein $y \in Q_\infty$ mit $f^{-1}(y) \notin Q_\infty$. Da Q_∞ kompakt ist, hat f^{-1} einen positiven Abstand d zu Q_∞,

$$d := d(f^{-1}(y), Q_\infty) > 0.$$

Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall k > N \quad d(f^{-1}(y), Q_k) > \frac{d}{2}, \tag{4}$$

da $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine antitone Mengenfolge und Q_∞ deren Durchschnitt ist. Da nach Voraussetzung $y \in Q_\infty$ ist, existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $B_k \in \mathcal{B}_k$ mit $y \in B_k$. Aus der Stetigkeit von f^{-1}, $\operatorname{diam}(\mathcal{B}_k) \downarrow 0$ und und (4) folgt die Existenz eines $l > N$ mit

$$f^{-1}(B_l) \subset U_{\frac{d}{2}}(f^{-1}(y)) \quad \text{und} \quad d(f^{-1}(y), Q_{l-1}) > \frac{d}{2}.$$

Daraus folgt aber sofort

$$f^{-1}(B_l) \cap Q_{l-1} = \emptyset,$$

also ein Widerspruch zur Konstruktion von $\mathcal{B}_l$. □

3 Konvergenzverhalten

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß der Teilungsalgorithmus in einer leicht modifizierten Form unter bestimmten Umständen exponentiell gegen den gesuchten relativen Attraktor A_Q konvergiert. Dazu werden wir aber erst einige Begriffe einführen und einige Aussagen zitieren.

Definition 7. Sei eine Menge Λ invariant bzgl. des Diffeomorphismus f. Nan nennt λ **hyperbolisch** für f, wenn folgendes gilt:

1. Der Tangentialraum $T_\Lambda\mathbb{R}^n$ von Λ hat eine stetige Darstellung als direkte Summe
$$T_\Lambda\mathbb{R}^n = E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$$
mit
$$Df(E^s_x) = E^s_x \text{ und } Df(E^u_x) = E^u_x.$$

2. Es existieren Konstanten $c > 0$ und $\lambda \in (0,1)$, so daß für alle $x \in \Lambda$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt
$$\left\|Df^k(x)v\right\| \leq c\lambda^k \left\|v\right\| \text{ für alle } v \in E^s_x, \tag{5}$$
$$\left\|Df^{-k}(x)v\right\| \leq c\lambda^k \left\|v\right\| \text{ für alle } v \in E^u_x. \tag{6}$$

Das einfachste Beispiel für eine hyperbolische Menge wäre ein einzelner hyperbolischer Punkt von f. Die Zerlegungskomponenten E^s und E^u wären dann die Eigenräume zu Eigenwerten, die betragsmäßig kleiner bzw. größer als 1 sind. Wichtig ist auch, daß es bei hyperbolischen Punkten keine Eigenwerte mit Betrag 1 gibt.

Die Abschätzungen (5) und (6) gelten unter bestimmten Bedingungen nicht nur für Punkte aus Λ, sondern auch für eine gewisse Umgebung davon. Das folgt aus dem Satz von Stabilen Mannigfaltigkeiten, einen Teil dessen wir nun zitieren wollen. Zunächst die Definiton der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten:

Definition 8. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ heißen die Mengen
$$\begin{aligned} W^s_\varepsilon(x) &:= \Big\{y \in \mathbb{R}^n : d(f^k(x), f^k(y)) \to_{k\to\infty} 0 \\ &\qquad \text{und } d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon \forall k \geq 0\Big\}, \\ W^u_\varepsilon(x) &:= \Big\{y \in \mathbb{R}^n : d(f^k(x), f^k(y)) \to_{k\to-\infty} 0 \\ &\qquad \text{und } d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon \forall k \leq 0\Big\} \end{aligned}$$

entsprechend die lokale **stabile** und **instabile Mannigfaltigkeit**.

Nun zitieren wir den Satz von Stabilen Mannigfaltigkeiten. Er besagt unter anderem, daß für kleine ε die Mengen $W^s_\varepsilon(x)$ und $W^u_\varepsilon(x)$ in der Tat glatte Mannigfaltigkeiten sind, und rechtfertigt somit die obige Namensgebung. Den Beweis der folgenden Aussage findet man z.B in Shub (1987).

Satz 9. *Sei die Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und hyperbolisch für f und sei λ die Konstante aus der Definition 7. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für jeden Punkt $x \in \Lambda$ die Mengen $W^s_\varepsilon(x)$ und $W^u_\varepsilon(x)$ im $\mathbb{R}^n$ eingebettete Scheiben sind von gleicher Dimension wie entspr. E^s_x und E^u_x. Außerdem gilt:*

1. *Es existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\begin{aligned} d(f^k(x), f^k(y)) &\leq C\lambda^k \text{ für alle } y \in W^s_\varepsilon(x) \text{ und } k \geq 0, \\ d(f^{-k}(x), f^{-k}(y)) &\leq C\lambda^k \text{ für alle } y \in W^u_\varepsilon(x) \text{ und } k \geq 0. \end{aligned}$$

2. *Die lokalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten sind gegeben durch*

$$\begin{aligned} W^s_\varepsilon(x) &= \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon \forall k \geq 0 \Big\}, \\ W^u_\varepsilon(x) &= \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon \forall k \leq 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Diesen Satz undeinige weitere technische Hilfsmittel werden wir nutzen, um die exponentielle Konvergenz des Teilungsalgorithmus zu zeigen. Bevor wir uns mit dem Algorithmus beschäftigen, brauchen wir folgende Bergiffe und Hilfsaussagen:

Definition 10. Sei $\delta > 0$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Diese Folge heißt δ-**Pseudoorbit**, wenn gilt

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad |f(x_k) - x_{k+1}| < \delta.$$

Für $\varepsilon > 0$ ist $x \in \Lambda$ ein ε-**tracing Point** in Λ für einen Pseudoorbit $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, wenn gilt

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad |f^k(x) - x_k| < \varepsilon.$$

Definition 11. Die Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ hat die **shadowing Property**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß jeder δ-Pseudoorbit in Λ einen ε-tracing Point hat.

Lemma 12. *Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, hyperbolisch und besitze die shadowing Property. Außerdem sei ε gewählt wie im Satz 9 und sei $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon/2)$ eine Konstante.*
Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Umgebung U von Λ, so daß jeder δ-Pseudoorbit in U ist $\tilde{\varepsilon}$-shadowed durch einen Punkt $y \in \Lambda$. Insbesondere ist jeder Punkt von U enthalten in einer stabilen Mannigfaltigkeit eines Punktes aus Λ.

Nun formulieren wir die Modifikation des Algorithmus. Sie betrifft nur den Reduktionsschritt. In der Ursprünglichen Version wurde das $\mathcal{B}_{k+1}$ gegeben als

$$\mathcal{B}_{k+1} := \left\{ B \in \widehat{\mathcal{B}}_{k+1} : f^{-1}(B) \cap Q_k \neq \emptyset \right\} \tag{7}$$

Diese Auswahl ist suboptimal. Wenn z.B. eine Menge $B_0 \in \widehat{\mathcal{B}}_{k+1}$ in einem Reduktionsschritt entfernt wird, so kann auch jede Menge $B \in \widehat{\mathcal{B}}_{k+1}$ entfernt werden, die nur mit B_0 einen nichtleeren Schnitt hat. Das geschieht aber nicht bei diesem Verfahren!
Das heißt, man kann die Reduktion noch verschärfen, ohne daß die Approximationseigenschaften von Q_k dadurch leiden würden. Man kann $\mathcal{B}_k$ stets so wählen, daß gilt

$$\forall B \in \mathcal{B}_k \exists A \in \mathcal{B}_k : \quad f^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset, \tag{8}$$

d.h. es kann nach diesem Teilungsschritt nichts mehr aus $\mathcal{B}_k$ entfernt werden.
Realisieren kann man das z.B. dadurch, daß der Reduktionsschritt (7) solange wiederholt wird, bis nichts mehr entfernt werden darf. Man fängt mit $\mathcal{B}^0_{k+1} := \widehat{\mathcal{B}}_{k+1}$ an und macht sukzessiv weiter mit $\mathcal{B}^{(j+1)}_{k+1}$ statt $\mathcal{B}_{k+1}$ und $\mathcal{B}^{(j)}_{k+1}$ statt $\widehat{\mathcal{B}}_{k+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Das minimale $\mathcal{B}_{k+1}$ hat man gefunden, wenn die Anzahl der Elemente von $\mathcal{B}^{(j+1)}_{k+1}$ zum ersten Mal gleich der Anzahl der Elemente von $\mathcal{B}^{(j)}_{k+1}$ ist. Da jedes $\mathcal{B}_k$ nur endlich viele Elemente hat, wird man dafür nur endlich viele Reduktinsschritte benötigen.
Man kann diese Auswahl auch in einem Schritt machen, wenn man die Überschneidungen der Urbilder notiert (z.B. in einem gerichteten Graphen) und dann diese Daten analysiert.
Diese Vorgehensweise muß nicht einmal die Laufzeit des Algorithmus verlängern, denn je kleiner das $\mathcal{B}_k$ ist, desto weniger Rechenaufwand hat man bei späteren Teilungen und Reduktionen!

Im Folgenden werden wir die Konvergenz der Version des Algorithmus betrachten, für die (8) gilt. Außerdem werden wir statt des Diffeomorphismus f die Abbildung

$$g := f^q$$

betrachten, wobei $q \in \mathbb{N}$ so gewählt wird, daß

$$C\lambda^q < \frac{1}{2}$$

ist mit λ, C aus dem Satz 9.

Bemerkung 13. Die relativen globalen Attraktoren $A_Q(f)$ von f und $A_Q(f^q)$ von f^q sind i.a. nicht gleich. Aber es gilt stets $A_Q(f) \subset A_Q(f^q)$, denn nach Definition 3 gilt für $q \geq 1$

$$A_Q(f^q) = \{x \in A : f^{-qk}(x) \in Q \text{ für alle } k \geq 0\} \supset A_Q(f).$$

Somit geht uns wenigstens kein Teil von $A_Q(f)$ verloren.
Unter gewissen Bedingungen stimmen $A_Q(f)$ und $A_Q(f^k)$ sogar überein.

Nun sind wir soweit, die entscheidende Aussage dieses Vortrags zu formulieren und zu beweisen.

Satz 14. *Sei $g := f^q$ mit $C\lambda^q < 1/2$ für C, λ aus dem Satz 9 und sei $A_Q := A_Q(g)$ der globae Attraktor von g relativ zu Q. Außerdem sei $A_Q \subset \Lambda$, wobei Λ eine kompakte hyperbolische Menge mit shadowing Property ist.*
Dann gilt für die verschärfte Version des Teilungsalgorithmus folgende Abschätzung: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für $k \geq N$ der Hausdorff-Abstand

$$h(A_Q, Q_k) := \sup_{x \in A_Q, y \in Q_k} d(x, y)$$

zwischen A_Q und Q_k abgeschätzt werden kann durch

$$h(A_Q, Q_k) \leq 2\operatorname{diam}(\mathcal{B}_k). \tag{9}$$