Satz von Sarkovskii und "Periode 3 impliziert Chaos"

Florian Lindemann

10. Februar 2003

Vortrag für das Seminar Differentialgleichungen, WS 02/03
Dozent: Prof. Lauterbach

Wir wollen uns das Feigenbaum-Diagramm ein wenig genauer anschauen und uns den periodischen Fenstern zuwenden. "Rechts von" a_∞ finden wir solche Fenster inmitten von Bereichen mit überwiegend nichtperiodischer Dynamik. Wie wir bereits im ersten Referat gesehen haben gibt es dort ein periodisches Fenster mit Periode 3 und links davon andere ungerade Perioden neben einigen geraden Perioden. Allerdings wird auch die Fenstergröße mit wachsender Periode kleiner, so dass man nicht wirklich erkennen kann, welche Perioden in den Fenstern denn vorkommen und welche nicht und inwiefern es einen Zusammenhang zwischen den Perioden gibt. Auch durch Computerexperimente hat man durch die schnell kleiner werdenen Fenster Probleme selbst schon ein Fenster der Periode 9 zu finden.

Als erstes möchte ich die Sätze angeben, die ich beweisen möchte, um zu zeigen, welches Ziel wir vor Augen haben.

Satz 1 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Besitzt f einen periodischen Punkt der kleinsten Periode 3, dann besitzt f periodische Punkte der Periode n für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Für den Beweis verweisen wir auf Satz 8. Der Satz 1 ist eine direkte Konsequenz von folgendem Satz, der auf den russischen Mathematiker Sarkovskii im Jahre 1964 zurückgeht. Um den Satz formulieren zu können, hat er erst einmal die natürlichen Zahlen mit einer neuen Ordnung versehen:

Anordnung der natürlichen Zahlen nach Sarkovskii

1.) Ordne alle ungeraden Zahlen größer oder gleich 3 aufsteigend an.

2.) Multipliziere jede Zahl aus 1. mit 2 und ordne diese aufsteigend an.

3.) Multipliziere jede Zahl aus 1. mit 2^2 und ordne diese aufsteigend an.

$\vdots$

n.) Multipliziere jede Zahl aus 1. mit 2^n und ordne diese aufsteigend an

$\vdots$

∞.) Ordne alle Potenzen von 2 absteigend an, zuletzt $2^0 = 1$.

Lemma 2 *Die Anordnung umfaßt alle natürlichen Zahlen und bildet mit*

$a \rhd b$:= "a kommt vor b in der Sarkovskii-Anordnung"

folgende vollständige Anordnung:

$$\begin{gathered} 3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd \\ 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^n \cdot 3 \rhd 2^n \cdot 5 \rhd \cdots \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2^1 \rhd 1 \end{gathered} \tag{1}$$

Beweis:

Die Ordnung ist einfach nachzuprüfen.

Wir wollen allerdings eine kurze Bemerkung geben, warum auch alle natürlichen Zahlen vorkommen: Sei $x \in \mathbb{N}$. Für x ungerade ist die Behauptung offensichtlich. Wenn x gerade ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x = 2k$. Ist k ungerade, so ist wiederum x in der Ordnung enthalten. Ist k gerade, so wiederholen wir den gleichen Vorgang wie oben und dies tun wir solange bis schließlich entweder $x = 2^l \cdot k$ für $l, k \in \mathbb{N}$ und k ungerade oder $x = 2^l \cdot 2 = 2^{l+1}$. Damit folgt das Lemma. $\square$

Satz 3 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und habe einen periodischen Punkt von kleinster Periode $k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt f auch für jede natürliche Zahl l mit $l \lhd k$ in der Anordnung (1) einen periodischen Punkt der minimalen Periode l.*

Auch hier verweisen wir für den Beweis auf später.

Definition 4 *Wir definieren für stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:*

a) *Eine **Partition** eines Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $x_i, i \in \{0\} \cup \underline{n}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Die n abgeschlossenen Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ nennen wir **Elemente der Partition**.*

b) *Seien $J_i, i \in \underline{n}$, die Elemente einer Partition von $[a, b]$. Wir sagen, $\mathbf{J_i}$ **f-überdeckt** $\mathbf{J_k}$ **m-fach**, falls m disjunkte offene Teilintervalle $K_1, \ldots, K_m$ von J_i existieren, so dass $f(\overline{K_r}) = J_k$ für $r \in \underline{m}$ erfüllt ist.*

c) *Seien $J_i, i \in \underline{n}$ wie oben. Ein **A-Graph zur Partition** $\{\mathbf{J_i}, \mathbf{i} \in \underline{\mathbf{n}}\}$ **von** $\mathbf{f}$ ist ein orientierter verallgemeinerter Graph mit Ecken J_i derart, dass folgendes gilt: Falls J_i m-fach J_k f-überdeckt, dann gibt es m gerichtete Kanten (Pfeile) von J_i nach J_k.*

d) *Ein **erlaubter Pfad** für einen A-Graphen ist eine Folge $J_{a(1)} J_{a(2)} \ldots J_{a(s)}$ mit $a(i) \in \underline{n}$ derart, dass für $i \in \underline{s-1}$ ein Pfeil von $J_{a(i)}$ nach $J_{a(i+1)}$ existiert.*

Ich möchte noch anmerken dass aus dem A-Graph $J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow J_3$ natürlich nicht zwingend folgt, dass auch $J_1 \longrightarrow J_3$!

Beispiel 5 *Ein Beispiel für diese Definition stellt ein Hufeisen dar. Was genau ein Hufeisen ist, werden wir im Laufe des Seminars noch kennen lernen. Wenn f allerdings ein Hufeisen besitzt, dann gibt es 2 Intervalle J_1 und J_2 derart, dass $J_1 \cup J_2 \subseteq f(J_i)$ für $i = 1, 2$ gilt. Also f-überdeckt jedes der beiden Intervalle mindestens 1-fach sich selbst und auch das andere Intervall. Der zugehörige A-Graph würde dann wie in der obigen Abbildung aussehen.*

.

.

.

In diesem Fall ist übrigens jede beliebige Folge von J_1en und J_2en ein erlaubter Pfad.

Ein weiteres Beispiel bildet folgende Funktion $g : [-1, 4\pi] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin x$ mit der Partition $\{-1, 1, 4\pi\}$. Dann sind $J_1 = [-1, 1]$ und $J_2 = [1, 4\pi]$ die Elemente der Partition und J_2 g-überdeckt J_1 3-fach, denn für $K_1 = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $K_2 = (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ und $K_3 = (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ gilt $g(\overline{K_1}) = g(\overline{K_2}) = g(\overline{K_3}) = J_1$.

Satz 6 *Sei $J_{a(1)}J_{a(2)} \dots J_{a(s+1)}$ ein erlaubter Pfad und es gelte $a(1) = a(s+1)$. Dann gibt es einen Punkt $x \in J_{a(1)}$ mit $f^s(x) = x$ und $f^i(x) \in J_{a(i+1)}$ für $i \in \underline{s}$.*

Beweis:

Wir wenden die Definition der f-Überdeckung von hinten nach vorne an: $J_{a(s+1)}$ wird von $J_{a(s)}$ f-überdeckt, also gibt es ein offenes $K'_s \subseteq J_{a(s)}$ mit $f(\overline{K'_s}) = J_{a(s+1)}$. Setze $K_s = \overline{K'_s}$. Da $J_{a(s-1)}$ $J_{a(s)}$ f-überdeckt (und damit auch K_s) gibt es ein K'_{s-1} mit $f(\overline{K'_{s-1}}) = J_{a(s)}$ und auch ein abgeschlossenes Intervall $K_{s-1} \subseteq \overline{K'_{s-1}}$ mit $f(K_{s-1}) = K_s$.

Sukzessive finden wir auf die gleiche Art und Weise abgeschlossene Teilintervalle $K_i \subseteq J_{a(i)}$ mit $f(K_i) = K_{i+1}$ für $i \in \underline{s}$ und $K_{s+1} := J_{a(1)}$.

Also gilt $f^s(K_1) = J_{a(1)}$. Da $K_1 \subseteq J_{a(1)}$ besitzt f^s also einen Fixpunkt x in $K_1 \subseteq J_{a(1)}$ (folgt aus dem Zwischenwertsatz auf f^s angewendet), also ein Punkt $x \in J_{a(1)}$ mit $f^s(x) = x$. Und da $f(K_i) = K_{i+1} \subseteq J_{a(i+1)}$ ist natürlich auch $f^i(x) \in J_{a(i+1)}$. $\square$

Dieser Satz ist zentral für den Beweis vom Satz von Sarkovskii. Dennoch müssen wir bei seiner Anwendung aufpassen. Denn der Satz besagt nicht, dass das gefundene x auch die kleinste Periode s hat! Zum Beispiel würde der Satz 6 angewendet auf den Hufeisen-A-Graph mit dem erlaubten Pfad $J_1J_2J_1J_2J_1$ einen Fixpunkt von f^4 garantieren, der gleiche Satz angewendet auf $J_1J_2J_1$ gibt uns einen Fixpunkt von f^2. Jedoch sagt uns der Satz nicht, ob die beiden Fixpunkte überhaupt verschieden sind.

Was wir jedoch schnell erkennen ist, dass wenn x die kleinste Periode $t < s$ hat, dann s auf jeden Fall ein ganzzahliges Vielfaches von t ist. Damit muss auch die Schleife $J_{a(1)}J_{a(2)} \dots J_{a(s+1)}$ mit $J_{a(s+1)} = J_{a(1)}$ eine (evtl. mehrfache) Wiederholung der Schleife $J_{a(1)}J_{a(2)} \dots J_{a(t+1)}$ mit $J_{a(t+1)} = J_{a(1)}$ sein. Wir halten also fest:

Lemma 7 *Besitzt die Schleife* $J_{a(1)}J_{a(2)}\dots J_{a(s+1)}$ *mit* $J_{a(s+1)} = J_{a(1)}$ *keine Wiederholung einer kürzeren Schleife, so hat der von Satz 6 garanierte Punkt* x *mit* $f^s(x) = x$ *auch wirklich die kleinste Periode* s*, bzw. anders ausgedrückt: der Orbit von* x *hat die Länge* s*. In diesem Fall nennt man die obige Schleife eine* ***irreduzible Schleife****.*

Einen Spezialfall vom Satz von Sarkovskii wollen wir schon jetzt beweisen:

Satz 8 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und habe einen Orbit mit Periode 3. Dann besitzt* f *Orbits jeder Periodenlänge* $n \in \mathbb{N}$

Beweis:

Seien $a < b < c$ die drei Punkte des periodischen Orbits mit o.B.d.A. $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$. Dann sind $J_1 = [a, b]$ und $J_2 = [b, c]$ die Elemente der Partition. Dann sieht der zugehörige A-Graph folgendermaßen aus:

.

.

.

Dann besitzt f einen Fixpunkt in J_2 (Anwenden von Satz 6 auf die Schleife J_2J_2) und auch einen Punkt der Periode 2 (Anwenden des gleichen Satzes auf $J_2J_1J_2$). Und auch alle Perioden für $n > 3$ sind vorhanden, denn die erlaubte Schleife $J_2J_1J_2^{n-2}J_2$ ist irreduzibel für jedes $n \in \mathbb{N}$ und hat auch die Länge n. Damit folgt wieder aus Satz 6 und Lemma 7 die Existenz von Orbits beliebiger natürlicher Periodenlänge. $\square$

Wir kommen zum wichtigsten Satz auf dem Weg zum Satz von Sarkovskii, der eine starke Aussage hat, aber dementsprechend auch länglich zum beweisen ist.

Satz 9 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt: Besitzt* f *einen periodischen Orbit mit ungerader Periodenlänge* $m > 1$*, dann besitzt* f *einen Fixpunkt und periodische Orbits aller geraden Periodenlängen kleiner als* m *sowie aller Periodenlängen größer als* m*.*

Beweis:

Wir können oB.d.A. annehmen, dass f keine periodischen Orbits ungerader Periodenlänge kleiner m besitzt. Wenn dem nicht so ist, gehen wir so lange rückwärts bis wir keinen periodischen Orbit der ungeraden Periodenlänge m' mehr finden mit $1 < m' < m$. Wenn wir die Behauptung für m' gezeigt haben, folgt sie sofort auch für m.

Seien $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ die Punkte des Orbits $\mathcal{O}$, der Größe nach angeordnet. Diese Punkte verwenden wir auch für einen Partition des Intervalls $[a, b]$ in Intervalle $[p_i, p_{i+1}] = I_l$. Wir wollen diese Intervalle aber nicht der Reihe nach durchnummerieren, sondern eine andere Abzählung wählen, die im Beweis ersichtlich wird.

Am Anfang des Beweises möchte ich einen kleinen Ausblick geben, was genau unsere Stationen auf dem Weg zur Gesamtaussage sein werden. Der Ablauf:

1. Zeige, dass es ein Element $I_1 := [p_j, p_{j+1}]$ der Partition gibt, das sich selbst f-überdeckt. Daraus würde dann mit Lemma 6 sofort die Existenz des Fixpunktes folgen.

2. Zeige, dass es vom Intervall I_1 einen erlaubten Pfad zu jedem anderen Element der Partition gibt.

3. Zeige, dass es ein Intervall $I_k \neq I_1$ gibt, welches I_1 f-überdeckt.

4. Zeige, dass es eine irreduzible Schleife von I_1 über $I_{m-1} := I_k$ und wieder nach I_1 gibt, welche alle anderen Elemente der Partition genau einmal durchläuft. Daraus folgt sofort die Existenz aller Periodenlängen größer als m, denn mit $I_1 \dots I_{m-1} I_1 I_1^p$ folgt, da die Schleife irreduzibel und Lemma 7, die Existenz von Orbits von f der Periodenlänge $m + p$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

5. Zeige, dass I_{m-1} alle Elemente der Partition mit ungeradem Index f-überdeckt. Dann folgt für alle ungeraden v mit $1 < v < m - 1$, dass die Schleife $I_{m-1} I_v I_{v+1} \dots I_{m-1}$ irreduzibel ist mit Länge $1 + (m - 1 - v) = m - v$. Daraus folgt sofort die Existenz von Orbits aller geraden Perioden kleiner als m.

Nachdem wir die Marschrute festgelegt haben, können wir nun loslegen:

Zuerst noch einige allgemeine Festellungen:

I. Nach Definition wird ein $p_i \in \mathcal{O}$ immer auf ein $p_k \in \mathcal{O}$ abgebildet.

II. Es kann nicht sein, dass für ein $i \in \underline{m}$ gilt, dass $f(p_i) = p_i$, denn dann wäre p_i Fixpunkt und könnte nicht in einem Orbit der Länge $m > 1$ sein.

III. Aus dem gleichen Grund kann es keine echte Teilmenge $\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{O}$ mit $\#\mathcal{A} = s < m$ geben, so dass für alle $p_k \in \mathcal{A}$ gilt, dass $f(p_k) \in \mathcal{A}$.

Zu 1.) Seien also $p_1 < p_2 < \dots p_m$ die Punkte des Orbits, der Größe nach angeordnet. Dann gilt $f(p_1) > p_1$ und $f(p_m) < p_m$. Dann gibt es auch ein $j < m$ mit $f(p_i) < p_i$ für alle $i > j$ und $f(p_j) > p_j$. Man beachte, dass wir nicht fordern, dass j unbedingt die Punkte des Orbits in 2 Hälften aufteilt. p_j ist also der größte Punkt von $\mathcal{O}$, für den $f(p_j) > p_j$ gilt. Dabei ist zu beachten, dass auf jeden Fall $j < m$ ist. Es gilt also

$$f(p_j) > p_j \qquad f(p_{j+1}) < p_{j+1} \tag{2}$$

Sei nun $I_1 := [p_j, p_{j+1}]$. Dann ist wegen (2) $f(p_{j+1}) \leq p_j$ und $f(p_j) \geq p_{j+1}$ und damit folgt:

$$I_1 = [p_j, p_{j+1}] \subseteq [f(p_{j+1}), p_{j+1}] \subseteq [f(p_{j+1}), f(p_j)] \subseteq f(I_1) \tag{3}$$

Also f-überdeckt I_1 sich selbst und 1.) ist gezeigt. Im A-Graph besitzt I_1 also einen Pfeil $I_1 \to I_1$. Nach Satz 6 existiert ein Fixpunkt $x \in I_1$ mit $f(x) = x$.

zu 2.) Sei nun $\mathcal{A}_1 := \{I_1\}$ und $\mathcal{A}_2$ die Menge aller Elemente der Partition, die von I_1 f-überdeckt werden. Nach (3) ist $I_1 \in \mathcal{A}_2$, jedoch $\mathcal{A}_2 \neq \{I_1\}$, denn würde I_1 nur sich selbst f-überdecken, dann müsste wg. I. und II. $f(p_j) = p_{j+1}$ und $f(p_{j+1}) = p_j$ gelten, und dann wäre p_j ein Punkt der Periode 2 - Widerspruch. Also überdeckt I_1 mindestens noch ein weiteres Element der Partition der Form $[p_i, p_{i+1}]$, welches wir mit I_2 bezeichnen wollen.

Dieses Prinzip können wir jetzt verallgemeinern: Sei für $l = 2, 3, \ldots$ nun $\mathcal{A}_l$ die Menge der Elemente der Partition, die von wenigstens einem Element von $\mathcal{A}_{l-1}$ f-überdeckt werden. Ist also $I_l \in \mathcal{A}_l$, dann gibt es einen erlaubten Pfad von I_1 nach I_l, also gilt für den A-Graphen:

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \cdots \to I_l$$

mit geeigneten Intervallen $I_i \in \mathcal{A}_i$. Offenbar gilt $\mathcal{A}_l \subseteq \mathcal{A}_{l+1}$ (!) und da die Partition nur endlich viele Elemente besitzt, gibt es ein $r > 1$ mit $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_{r+1}$. Dabei muss $\mathcal{A}_r$ natürlich alle Elemente der Partition enthalten, denn sonst hätte p_j eine Periode kleiner als m, wie uns III. zeigt.

Damit existiert ein erlaubter Pfad von I_1 zu jedem anderen Element der Partition und 2.) ist gezeigt. Der bisher bekannte A-Graph sieht dann wie folgt aus: Für jedes l gibt es eine Kette:

$$\circlearrowright I_1 \to I_s \to \cdots \to I_l \tag{4}$$

wobei wir noch nichts konkretes über die Zwischenstationen wissen.

zu 3.) Wir wollen also zeigen, dass es ein $I_k \neq I_1$ gibt, dass I_1 f-überdeckt. Dabei nutzen wir zum ersten Mal aus, dass m ungerade ist. Dann gibt es nämlich auf beiden Seiten des Fixpunktes $x \in I_1$, dessen Existenz schon gezeigt wurde, unterschiedlich viele periodische Punkte von $\mathcal{O}$ (beachte dass x kein periodischer Punkt sein kann). Wir zeigen nun, dass es mindestens einen Punkt $p_r \neq p_j$ geben muss mit $(f(p_r) > x) \wedge (f(p_{r+1}) < x)$ oder umgekehrt. Wäre dies nicht der Fall, so würde gelten:

$$\forall p_r \neq p_j : (f(p_r) > x \Rightarrow f(p_{r+1}) > x) \wedge (f(p_r) < x \Rightarrow f(p_{r+1}) < x)$$

Da nun aber $f(p_{j+1}) < x$ nach (2), muss dann auch $f(p_{j+i}) < x$ für $i \in \underline{m-j}$. Also werden alle Punkte "rechts" vom Fixpunkt auf Punkte "links" vom Fixpunkt abgebildet. Ebenso gilt $f(p_j) > x$ nach (2) und deswegen gilt $f(p_{j-i}) > x$ für $i \in \underline{j-1}$. Also werden auch alle Punkte "links" vom Fixpunkt auf Punkte "rechts" vom Fixpunkt abgebildet. Also müssen links und rechts gleich viele Punkte sein - Widerspruch!

Also gibt es einen solchen Punkt $p_r \in \mathcal{O}$. Setze $I_k := [p_r, p_{r+1}]$. Da $(f(p_r) > x) \wedge (f(p_{r+1}) < x)$ oder umgekehrt, f-überdeckt I_k auch I_1 und da $p_r \neq p_j$ ist 3.) gezeigt. Also

$$I_k = [p_r, p_{r+1}] \qquad \text{mit} \qquad I_k \to I_1 \tag{5}$$

zu 4.) Wir hatten in 2.) gezeigt, dass es einen erlaubten Pfad von I_1 zu jedem anderen Element der Partition gibt, also auch einen zu I_k. Dann gibt es auch eine Schleife von I_1 über I_k zurück nach I_1. Im A-Graphen sieht das wie folgt aus:

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \cdots \to I_k \to I_1 \tag{6}$$

Dabei sind die I_l jeweils von der Form $[p_i, p_{i+1}]$ und der Index k soll die kleinste natürliche Zahl sein, so dass (6) erfüllt ist. Von unserer vorigen Notation bleibt also nur I_1 so wie es bisher war und die restlichen I_l sollen so sein, dass der kürzeste erlaubte Pfad von I_1 nach I_1 gefunden ist, ausgenommen natürlich $I_1 \to I_1$. Die Nummerierung der I_l soll in der Reihenfolge der f-Überdeckung sein.

Damit (6) den kürzesten Pfad darstellt müssen alle Elemente $I_2, \dots, I_{k-1}$ verschieden sein, denn sonst gäbe es eine Abkürzung. Also gilt $k \leq m-1$. Wäre nun $k < m-1$, dann würde eine der beiden Schleifen $I_1 I_2 \dots I_k I_1$ (für k ungerade) oder $I_1 I_1 I_2 \dots I_k I_1$ (für k gerade) nach Satz 6 die Existenz eines Fixpunktes von f^n in I_1 mit n ungerade und $1 < n < m$ garantieren, was wir ganz am Anfang ausgeschlossen hatten - Widerspruch!

Also gilt $k = m-1$ und damit werden in dieser Schleife $I_1 I_2 \dots I_{m-1} I_1$ alle anderen Elemente der Partition durchlaufen. Nach unseren Überlegungen am Anfang ist damit die Existenz von Orbits von f aller Periodenlängen größer als m gezeigt.

zu 5.) Wir wollen nun noch zeigen, dass I_{m-1} auch noch jedes I_l mit $l < m$ ungerade f-überdeckt. Dafür stellen wir noch ein paar Vorüberlegungen an:

IV. Es gibt im A-Graphen keinen Pfeil von I_t nach I_s für $s > t+1$, denn sonst gäbe es ja eine Abkürzung auf der Schleife $I_1 I_2 \dots I_{m-1} I_1$ im Widerspruch zu ihrer Minimalität.

V. Es gibt keine Pfeile von I_s nach I_1 für $1 < s < m-1$ aus dem gleichen Grund.

Nach IV. und V. überdeckt I_1 nur sich selbst und I_2, aber kein anderes Intervall. Dann bleiben für die Bilder von p_j und p_{j+1} nur zwei Möglichkeiten (da I_1 und I_2 notwendigerweise zusammenhängend):

$$(f(p_j) = p_{j+1}) \wedge (f(p_{j+1}) = p_{j-1}) \tag{7}$$

oder

$$(f(p_j) = p_{j+2}) \wedge (f(p_{j+1}) = p_j) \tag{8}$$

Im Fall (7) wäre $I_2 = [p_{j-1}, p_j]$, im Fall (8) $I_2 = [p_{j+1}, p_{j+2}]$, vergleiche auch Abbildung:

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass (7) erfüllt ist, also $I_2 = [p_{j-1}, p_j]$. Für $m \geq 5$ (für $m = 3$ hatten wir die Behauptung schon in Satz 8 bewiesen) kann wegen IV. und V. I_2 weder I_1 noch $I_l, l > 3$ f-überdecken, aber auch nicht sich selbst, denn $f(p_j) = p_{j+1}$, bleibt also nur I_3. Da p_j auf die andere Seite von x abgebildet wird, bleibt nur $f(p_{j-1}) = p_{j+2}$, damit weder I_1 noch ein weiteres Intervall f-überdeckt wird (vgl. Abbildung). Dann ist also $I_3 = [p_{j+1}, p_{j+2}]$. Nach dem gleichen Schema ergibt sich, dass sich die folgenden Intervalle immer abwechselnd links und rechts an die bereits bestimmten anreihen. Dies liegt daran, dass die $p_l, l < m - 1$ immer auf die andere Seite von x abgebildet werden müssen und immer nur ein weiteres Intervall f-überdeckt wird. Streng genommen müsste man das per Induktion beweisen, allerdings stützt die folgende Abbildung unsere Behauptung sehr:

.

.

.

.

.

Das Bild für den Fall (8) wäre eine Spiegelung am Fixpunkt x.

Halten wir also schließlich fest, dass für $2 \leq r \leq m - 2$ I_r das Intervall I_{r+1} f-überdeckt und kein anderes Element der Partition!

Betrachten wir nun das Intervall $I_{m-1} = [p_1, p_2]$. Da $I_{m-3} = [p_2, p_3]$ das Intervall $I_{m-2} = [p_{m-1}, p_m]$ f-überdeckt, gilt $f(p_2) = p_m$ und $f(p_3) = p_{m-1}$ nach dem oberen Prinzip. Der einige periodische Punkt, der noch keinen Punkt zugeordnet bekommen hat, ist p_1, der einzige, der noch kein Urbild hat ist p_j. Also gilt $f(p_1) = p_j$. Also ist

$$[p_j, p_m] \subseteq f([p_1, p_2]) = f(I_{m-1}). \tag{9}$$

Damit f-überdeckt I_{m-1} alle Intervalle rechts von p_j, also gerade $I_3, I_5, \ldots, I_{m-2}$, eben alle Intervalle mit ungeradem Index. Damit folgt wie in der Vorbemerkung bereits gezeigt, die Existenz der Orbits von f mit gerader Periodenlänge kleiner als m, indem wir die Schleife von I_{m-1} zu I_l und über die alte Schleife nach I_{m-1} zurück nehmen, wobei l ungerade ist. Unser A-Graph, der schließlich unser System vollständig charakterisiert, sieht nun folgendermaßen aus:

.

.

.

.

.

Dabei hatten wir uns ja überlegt, dass es für $2 \leq r \leq m - 2$ keine weiteren Pfeile als den von I_r nach I_{r+1} geben kann, auch dass sie sich nicht selbst f-überdecken. Von I_1 kann es nach IV. auch keine weiteren Pfeile geben. Und auch von I_{m-1} gibt es keine Pfeile zu Intervallen mit geradem Index, denn sonst hätte f eine ungerade Periode kleiner m, im Widerspruch zur Annahme. Also ist der A-Graph vollständig und der Satz nach langen Bemühungen bewiesen. $\square$

Satz 10 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f besitze einen Orbit der Periode $2^r \cdot m$ mit $r \geq 1$ und m ungerade, aber keinen periodischen Orbit mit ungerader Periodenlänge größer als 1. Wir bezeichnen die Punkte des Orbits wie bisher mit p_i, der Größe nach angeordnet. Dann gilt: f besitzt einen Fixpunkt und zwar im Intervall*

$$[p_{2^{r-1} \cdot m}, p_{2^{r-1} \cdot m+1}] \tag{10}$$

Außerdem gilt

$$f(p_i) \geq p_{2^{r-1} \cdot m+1} \quad \textit{für} \quad i \leq 2^{r-1} \cdot m \tag{11}$$

und

$$f(p_i) \leq p_{2^{r-1} \cdot m} \quad \textit{für} \quad i \geq 2^{r-1} \cdot m + 1 \tag{12}$$

Beweis:

Wir schauen uns nochmal den Beweis von Satz 9 an. Die beiden Punkte 1.) und 2.) vom Beweis können wir direkt übernehmen, da wir erst im 3.) Teil beim Beweis der Existenz von I_k benutzt haben, dass m ungerade ist. Auch die Forderung, dass es keine Orbits mit kleineren ungeraden Perioden gibt, haben wir erst später benutzt.

Wir können also ohne weiteres übernehmen, dass es Element der Partition, nennen wir es wieder I_1 gibt, dass sich selbst f-überdeckt, einen Fixpunkt $x \in I_1$ besitzt und von dem es einen erlaubten Pfad zu jedem anderen Element der Partition gibt.

Nehmen wir nun an, dass es noch ein weiteres Element I_k gibt, dass I_1 f-überdeckt, so folgt mit der gleichen Argumentation wie im Satz 9, dass es Orbits aller Periodenlängen größer als k gibt und damit auch insbesondere ungerade, was den Voraussetzungen des Satzes widerspricht. Also f-überdeckt nur I_1 das Intervall I_1. Wir überlegen uns nun wie die periodischen Punkte abgebildet werden.

Da nur I_1 I_1 f-überdeckt, gilt $\forall i \in \underline{m-1} \backslash \{j\}$:

$$(f(p_i) > x \Rightarrow f(p_{i+1}) > x) \wedge (f(p_i) < x \Rightarrow f(p_{i+1}) < x) \tag{13}$$

Ist also $f(p_1) < x$ so auch $f(p_i) < x$ für $i \leq j$ und da dann $f(p_j) > x$ ist dann $f(p_i) > x$ für $i > j$ (sonst f-überdeckt sich I_1 nicht selbst). Also bleiben die Bilder auf der gleichen Seite wie die Urbilder der periodischen Punkte. Dies ist jedoch nicht möglich, da auf den beiden Seiten von x mindestens ein periodischer Punkt liegt. Dann hätten wir aber auf jeder der beiden Seiten eine echte Teilmenge der periodischen Punkte, die komplett auf sich abgebildet wird. Widerspruch nach unserer allgemeinen Feststellung III. aus dem Beweis von Satz 9. Also ist $f(p_1) > x$. So ist mit der selben Argumentation wie oben dann $f(p_i) > x$ für $i \leq j$ und wiederum $f(p_{j+1}) < x$ und $f(p_i) < x$ für $i > j$. Also wechseln die Bilder immer auf die andere Seite des Fixpunkts.

Dies kann nur dann eintreten, wenn I_1 symmetrisch in der Mitte der Partition plaziert ist, das heißt $I_1 = [p_{2^{r-1}\cdot m}, p_{2^{r-1}\cdot m+1}]$. Die Behauptungen (11) und (12) folgen sofort aus der Beobachtung, dass die periodischen Punkte auf die andere Seite von x abgebildet werden. $\square$

Aus unseren Überlegungen im Beweis erkennt man sofort, dass unter den Voraussetzungen, dass f keine periodischen Orbits mit ungerader Länge besitzt, ein Intervall der Form $[p_i, p_{i+1}]$ nur dann von einem anderen Intervall der Partition f-überdeckt werden kann, wenn dieses auf der anderen Seite von I_1 liegt.

Diese Beobachtung legt es nahe sich den sogenannten **induzierten A-Graphen** von f^2 einzuführen. Der Fixpunkt x teilt die periodischen Punkte in 2 Hälften ein. Die "linken" werden auf "rechte" abgebildet und umgekehrt. Also sind die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{2^{r-1}\cdot m}$ (bzw. $p_{2^{r-1}\cdot m+1}, p_{2^{r-1}\cdot m+2}, \ldots, p_{2^r\cdot m}$) periodisch mit der Periode $2^{r-1}\cdot m$ unter f^2. Der induzierte A-Graph von f^2 ist also der A-Graph von $f^2_{|[p_1,\ldots,p_{2^{r-1}\cdot m}]}$ zur Partition $p_1, p_2, \ldots, p_{2^{r-1}\cdot m}$. Im induziertem Graphen gibt es also genau dann einen Pfeil von I_l nach I_k, wenn es ein Element I_m gibt mit $I_l \to I_m \to I_k$ bzgl. des A-Graphen von f. Wir halten folgende Erkenntnis fest:

VI. Falls der induzierte A-Graph von f^2 eine irreduzible Schleife der Länge n besitzt, dann besitzt der A-Graph von f eine der Länge $2n$

Satz 11 ***(Sarkovskii)*** *Wir betrachten die Ordnung der natürlichen Zahlen nach Sarkovskii, also*

$$\begin{aligned} &3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd \\ &2^2\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd \cdots \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2^1 \rhd 1 \end{aligned} \tag{14}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig und besitze einen periodischen Orbit der Periode* $k \in \mathbb{N}$. *Dann besitzt* f *periodische Orbits sämtlicher Periodenlängen* $l \lhd k$ *in der obigen Anordnung.*

Beweis:

Ist k ungerade so folgt die Behauptung sofort aus Satz 9. Sei also $k = 2^r \cdot m$ mit $r \geq 1$ und $m \geq 1$ ungerade. Wir können annehmen, dass f keine periodischen Orbits mit ungerader Periode besitzt (sonst folgt die Behauptung sofort mit Satz 9). Also können wir Satz 10 anwenden und bekommen die Existenz eines Fixpunktes und der induzierte A-Graph von f^2 besitzt eine Partition der Periode $2^{r-1}\cdot m$.

Betrachten wir nun den Fall $r = 1$. Ist $m = 1$, so folgt die Behauptung sofort. Ist $m > 1$, dann wenden wir dieselben Techniken von Satz 9 auf den induzierten

A-Graphen von f^2 an, der ja dann einen Orbit der ungeraden Länge $2^{1-1} \cdot m = m > 1$ hat. Dann gibt uns Satz 9: Der induzierte A-Graph von f^2 besitzt (mit $n \in \mathbb{N}$)

(i) irreduzible Schleifen jeder Länge $n > m$

(ii) irreduzible Schleifen jeder Länge $2n < m$

(iii) einen Fixpunkt

Also hat der A-Graph von f wegen VI.

(i) irreduzible Schleifen jeder Länge $2n > 2m = k$

(ii) irreduzible Schleifen jeder Länge $2 \cdot 2n < 2m = k$

(iii) eine Schleife der Länge 2 und   wie oben festgestellt

(iv) einen Fixpunkt

Es fehlen also alle ungeraden Längen größer 1 (nach Voraussetzung oben), sowie unter den geraden Periodenlängen kleiner als k gerade die, die sich nicht als Vielfache von 4 darstellen lassen, also die das Produkt von 2 und einer ungeraden Zahl sind. Das entspricht gerade denen, die die Sarkovskii-Anordnung voraussagt. Also ist auch für $k = 2 \cdot m$, m ungerade die Behauptung bewiesen.

Für $r \geq 2$ gehen wir induktiv vor: Wir betrachten den induzierten A-Graphen vom induzierten A-Graphen von f^2, also den induzierten A-Graphen von f^4. Diesen betrachten wir eingeschränkt auf die Punkte der Partition von f^2 links vom Fixpunkt von f^2, also eine Menge von $2^{r-2} \cdot m$ Punkten, die auch eine Periode dieser Länge bzgl. f^4 haben. So fortfahrend erhält man induktiv Partitionen der Perioden $m \cdot 2^k$ mit $k < r$, bis wir schließlich zu einem induzierten A-Graphen von f^{2^r} kommen, der eine Partition mit ungerader Periodenlänge m (bzgl. f^{2^r}) besitzt.

Ist $m > 1$, so können wir auf f^{2^r} Satz 9 anwenden und erhalten einen Fixpunkt von f^{2^r}, sowie die Existenz von periodischen Orbits von f^{2^r} jeder Länge $n > m$, als auch der Länge $2n < m$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach VI. bedeutet dies für f die Existenz periodischer Orbits der Länge $n \cdot 2^r > m \cdot 2^r$ und der Länge $2n \cdot 2^r < m \cdot 2^r$ und einen der Länge 2^r. Also von den Perioden größer als $m \cdot 2^r$ alle und von den Perioden kleiner als $m \cdot 2^r$ eben die, welche sich als Vielfaches von 2^{r+1} darstellen lassen. Damit haben wir verglichen mit der Sarkovskii-Anordnung alle geforderten Periodenlängen gezeigt, bis auf die der Länge 2^l für $l < r$. Diese zeigen wir beim Beweis von $m = 1$, denn wir hatten hier ja gezeigt, dass auch eine Periode der Länge 2^r existiert.

Ist $m = 1$, also $k = 2^r$, so besteht die Partition zum induzierten A-Graphen von $f^{2^{r-1}}$ gerade aus 2 Punkten der Periode 2. Der A-Graph hat dann die triviale Form $\circlearrowright I_1$, also besitzt die Abbildung $f^{2^{r-1}}$ einen Fixpunkt, also gibt es einen Punkt der Periode 2^{r-1} für f. Nun wenden wir das gleiche Prinzip auf $k' = 2^{r-1}$ an und bekommen schließlich die Existenz von periodischen Orbits aller Periodenlängen $2^l < 2^r$. Die Existenz des Fixpunktes war schon gezeigt, also sind wir fertig. $\square$

Bemerkung:

1. Falls f einen periodischen Punkt besitzt, dessen Periodenlänge keine Potenz von 2 ist, dann hat f unendlich viele periodische Punkte.

2. Wie schon im Satz 8 gezeigt ist Periode 3 in Sarkovskiis Ordnung am größten und impliziert periodische Orbits aller natürlichen Periodenlängen

3. Es gibt Abbildungen, die einen periodischen Punkt der Länge n haben, aber keine "höheren" im Sinne der Sarkovskii-Anordnung

4. Der Satz von Sarkovskii ist ein Resultat im 1-Dimensionalen. Es gibt kein höherdimensionales Analogon und auch auf dem Kreis S_1, also wenn $f : S_1 \to S_1$, ist der Satz nicht wahr.

Definition 12 *Sei $f : I \to I$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) stetig. Ein Punkt $x \in I$ heißt* ***asymptotisch periodisch*** *(bzgl. f), falls ein periodischer Punkt $p \in I$ existiert derart, dass gilt:*

$$|f^n(x) - f^n(p)| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \tag{15}$$

Satz 13 *Sei $f : I \to I$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) stetig und $a \in I$ sowie*

$$b := f(a), \qquad c := f^2(a), \qquad d := f^3(a) \tag{16}$$

mit

$$d \leq a < b < c \qquad \text{oder} \qquad d \geq a > b > c \tag{17}$$

dann gilt

a) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein periodischer Punkt aus I mit Periode n.*

b) *Es gibt eine überabzählbare Menge $X \subseteq I$, die keine periodischen Punkte enthält, so dass für alle $x, y \in X, x \neq y$ und alle periodischen Punkte $p \in I$ gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \tag{18}$$

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \tag{19}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0 \tag{20}$$

Kein Punkt ist damit asymptotisch periodisch.

Teil a) davon haben wir gezeigt, Teil b) gibt es am Dienstag.