Markov-Paritionen und geometrische Modelle von Attraktoren

Jan Christoph Kinne

15. Februar 2003

Was sind Markov-Partitionen?

Hat man ein diskretes dynamisches System $f : M \to M$ gegeben, so will man M in eine endliche Zahl von Markovpartitionen $\bigcup M_i = M$ zerlegen, so dass man jeden Punkt dadurch beschreiben kann, in welchen Gebieten M_i seine Trajektorie liegt.
Man kann eine Punkt dann durch eine Folge representieren, wobei das i-te Element der Folge angibt, in welcher Teilmenge sich die i-te Iteration des Punktes befindet.
Damit ist das Anwenden der Abbildung auf den Punkt gerade das Verschieben der Folge.

Was sind Markov-Partitionen?

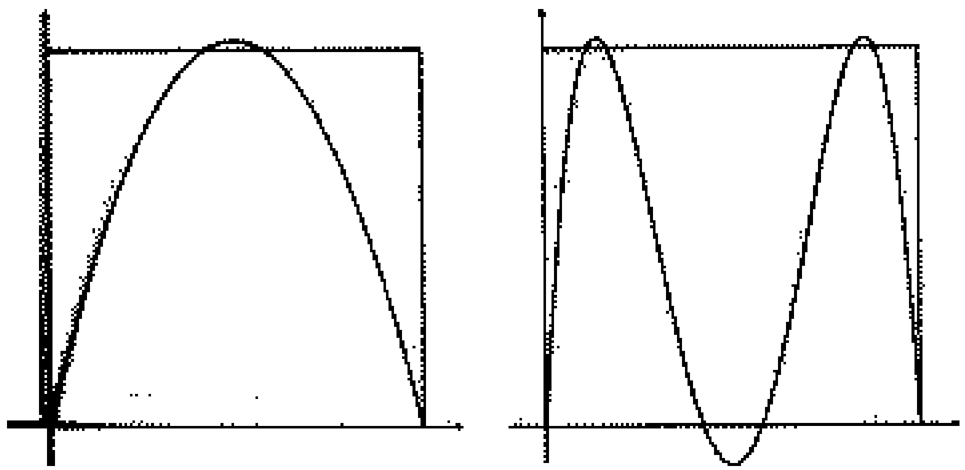
Hat man ein diskretes dynamisches System $f : M \to M$ gegeben, so will man M in eine endliche Zahl von Markovpartitionen $\bigcup M_i = M$ zerlegen, so dass man jeden Punkt dadurch beschreiben kann, in welchen Gebieten M_i seine Trajektorie liegt.
Man kann eine Punkt dann durch eine Folge representieren, wobei das i-te Element der Folge angibt, in welcher Teilmenge sich die i-te Iteration des Punktes befindet.
Damit ist das Anwenden der Abbildung auf den Punkt gerade das Verschieben der Folge.

Der Vortrag

- Quadratische Abbildung $f_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda x(1-x)$
- Smale's Horseshoe - eine verwandte Abbildung in definiert auf $[0,1]^2$
- Verzicht auf die Linearität des Horseshoes
- Automorphismen auf dem Torus
- Definition der Markovpartitionen
- Sätze zur Existenz von Markovpartitionen

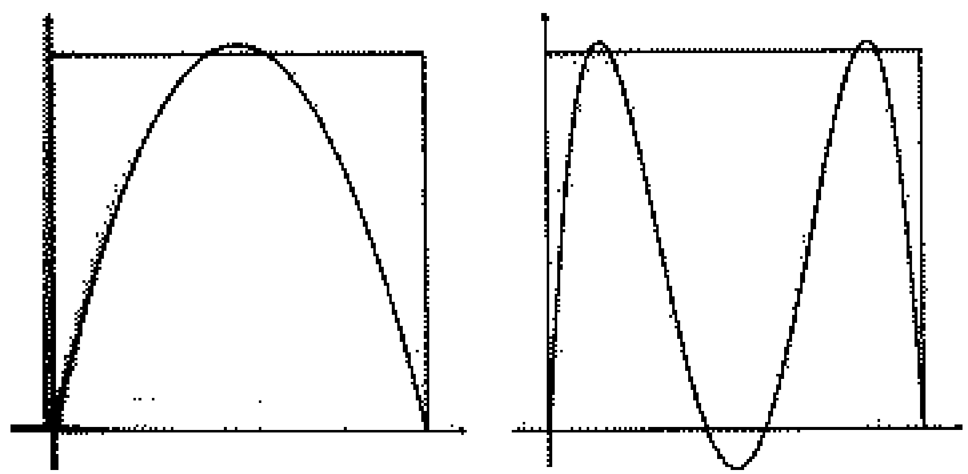
Quadratische Abbildung $f_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda x(1-x)$.

$\lambda > 2(1+\sqrt{2})$
$f(x)$ und $f(f(x))$



Quadratische Abbildung $f_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda x(1-x)$.

$\lambda > 2(1+\sqrt{2})$
$f(x)$ und $f(f(x))$



$$x \in (-\infty, 0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f^n(x) \to -\infty$$
$$x \in (1, \infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f^n(x) \to -\infty$$

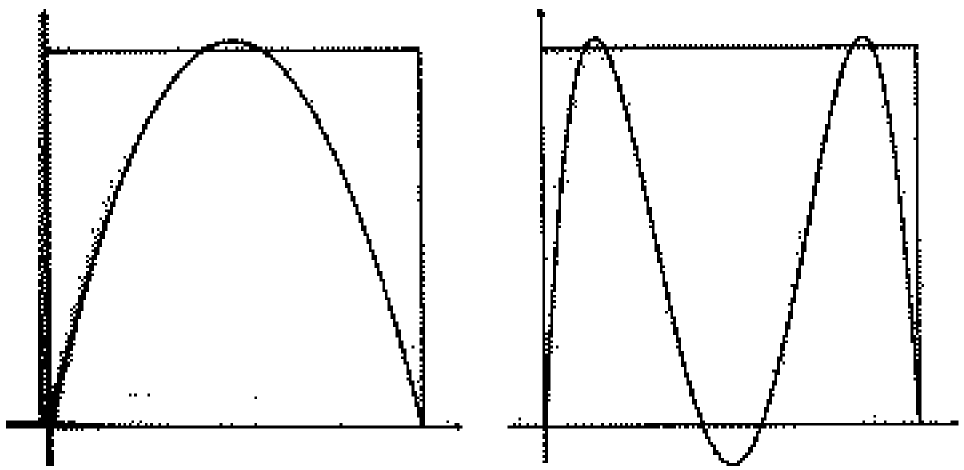
Punkte mit beschränktem Orbit

$$\Lambda := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}([0,1])$$

Wie beschreibt man diese Punkte?

$$\Delta^1 = \left[0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}\right] \text{ und } \Delta^2 = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}, 1\right]$$

$$f^{-1}([0,1]) = \Delta^1 \cup \Delta^2$$

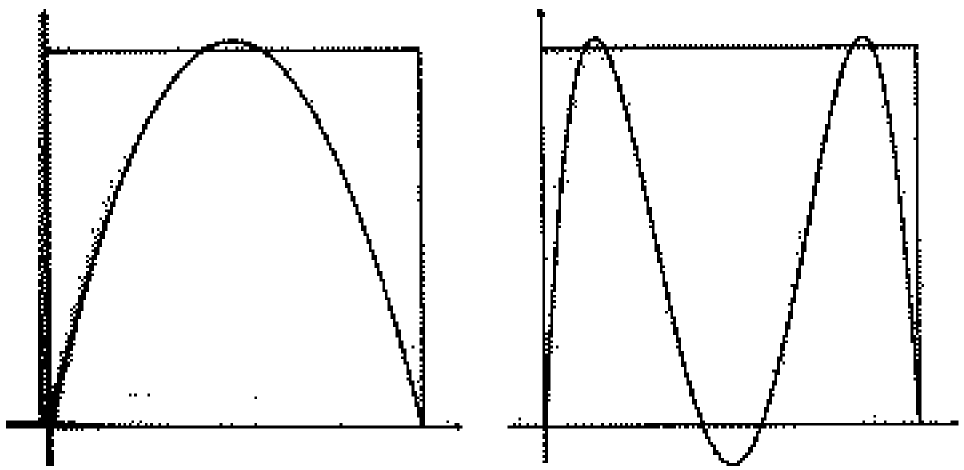


Wie beschreibt man diese Punkte?

$$\Delta^1 = \left[0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}\right] \text{ und } \Delta^2 = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}, 1\right]$$

$$f^{-1}([0,1]) = \Delta^1 \cup \Delta^2$$

Allgemein hat jedes Intervall $J \subset [0,1]$ zwei Urbilder eines in Δ^1 und eines in Δ^2.



Wie beschreibt man diese Punkte?

$$\Delta^1 = \left[0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}\right] \text{ und } \Delta^2 = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}, 1\right]$$

$$f^{-1}([0,1]) = \Delta^1 \cup \Delta^2$$

Allgemein hat jedes Intervall $J \subset [0,1]$ zwei Urbilder eines in Δ^1 und eines in Δ^2.
Es existiert ξ mit $f'(x) > \xi > 1$ auf $f^{-1}([0,1])$, wobei $\lambda > 2(1+\sqrt{2})$.

$$\left|f'(x)\right| = |\lambda(1-2x)| \geq \lambda \left|1 - 2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}\right)\right| = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \lambda} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)^2 + 1} > 1$$

Identifikation mit Folgen

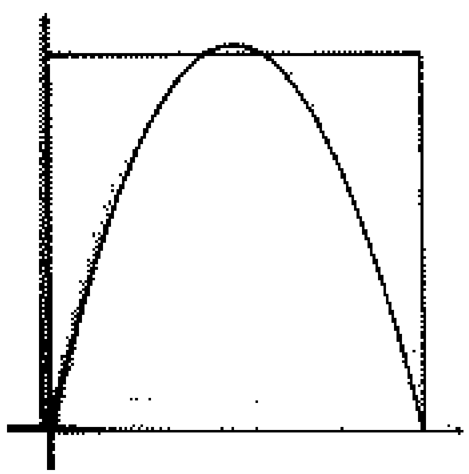
Folge $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\omega_i \in \{1,2\}$ - später $\omega \in \Sigma_2^R$.
Man betrachte dann die Intervalle

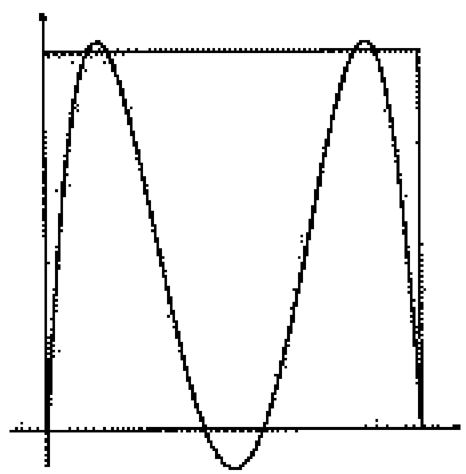
$$\bigcap_{i=1}^{N} f^{-i+1}(\Delta^{\omega_i}).$$

Deren Länge geht exponentielle mit ξ^{-N} nach Null und sie sind nie leer.
Daher existiert eine Abbildung

$$h(\omega) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{-i+1}(\Delta^{\omega_i}).$$

h bijektiv auf Λ, da jedes Bild entweder in Δ^1 oder in Δ^2 ist.





Um Stetigkeit zu zeigen, benötigt man zuerst eine Metrik auf Σ_2^R

Für $k \in \mathbb{N}$ sei Σ_k die Menge der zweiseitigen Folgen über Menge der Symbolen $M = \{1, .., k\}$

$$\Sigma_k := \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} | a_i \in \{1, .., k\}\} \text{ und}$$

und das einseitige Pendant

$$\Sigma_k^R := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} | a_i \in \{1, .., k\}\}$$

Metrik:

$$d(a, b) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{a_i, b_i} 2^{-|i|}$$

bzw.

$$d(a, b) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{a_i, b_i} 2^{-|i|},$$

wobei $\delta_{a_i, b_i} := 0$ für $a_i = b_i$ und $\delta_{a_i, b_i} := 1$ sonst.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei Σ_k die Menge der zweiseitigen Folgen über Menge der Symbolen $M = \{1, .., k\}$

$$\Sigma_k := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1, .., k\}\} \text{ und}$$

und das einseitige Pendant

$$\Sigma_k^R := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} | a_i \in \{1, .., k\}\}$$

Metrik:

$$d(a, b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{-|i|}$$

bzw.

$$d(a, b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{a_i,b_i} 2^{-|i|},$$

wobei $\delta_{a_i,b_i} := 0$ für $a_i = b_i$ und $\delta_{a_i,b_i} := 1$ sonst.

Für das definierte

$$h(\omega) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{-i}(\Delta^{\omega_i}).$$

gilt dann:
h stetig, da $\bigcap_{i=1}^{N} f^{-i}(\Delta^{\omega_i})$ mit ξ^{-n} gegen Null geht.
h^{-1} ist stetig, da f stetig ist.

Zwei C^r Abbildungen $f : M \longrightarrow M$ und $g : N \longrightarrow N$ heißen *topogolisch konjugiert*, wenn ein Homeomorphimus $h : M \longrightarrow N$ existiert mit $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Eine Abbildung $g : N \mapsto N$ heißt *Faktor* (bzw. *topologischer Faktor*) von der Abbildungen $f : M \longrightarrow M$, wenn eine stetige Abbildung $h : M \longrightarrow N$ existiert mit $h \circ f = g \circ h$. h heißt *Semikonjugation*.

Hier gilt

$$\sigma = h^{-1} \circ f \circ h$$

Mit dem Shift σ

$$\sigma\left((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}\right) = (a_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \text{ bzw.}$$
$$\sigma\left((a_i)_{i \in \mathbb{N}}\right) = (a_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$$

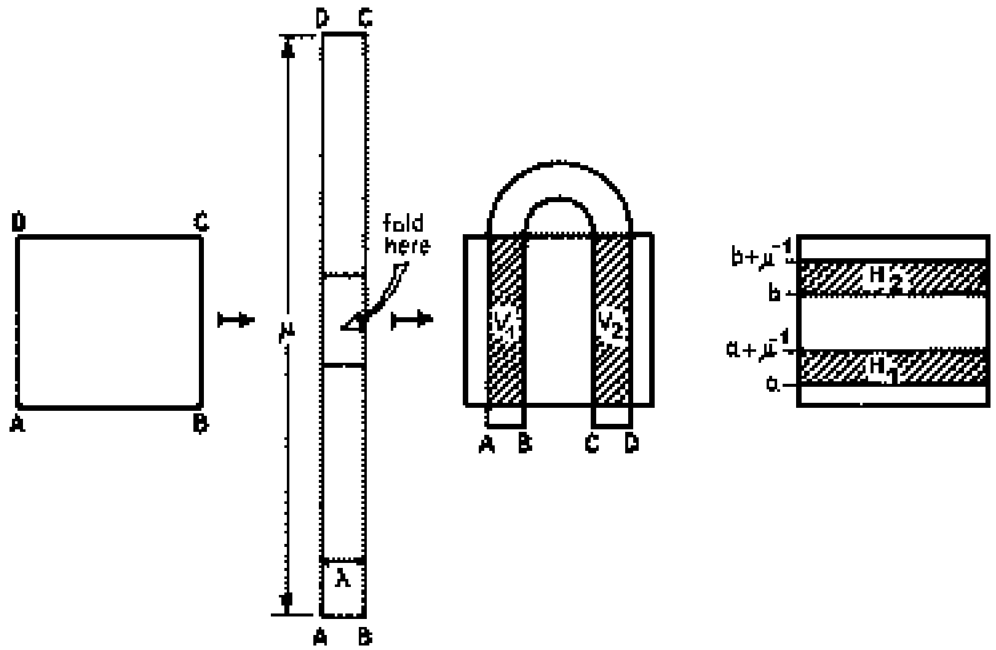
Folgerungen:

- Λ enthält eine abzählbare Zahl von periodischen Punkten

- Λ enthält eine abzählbare Zahl von asymptotisch periodischen Punkten

- In Λ gibt es dichte Orbits

Geometrische Definition von f:



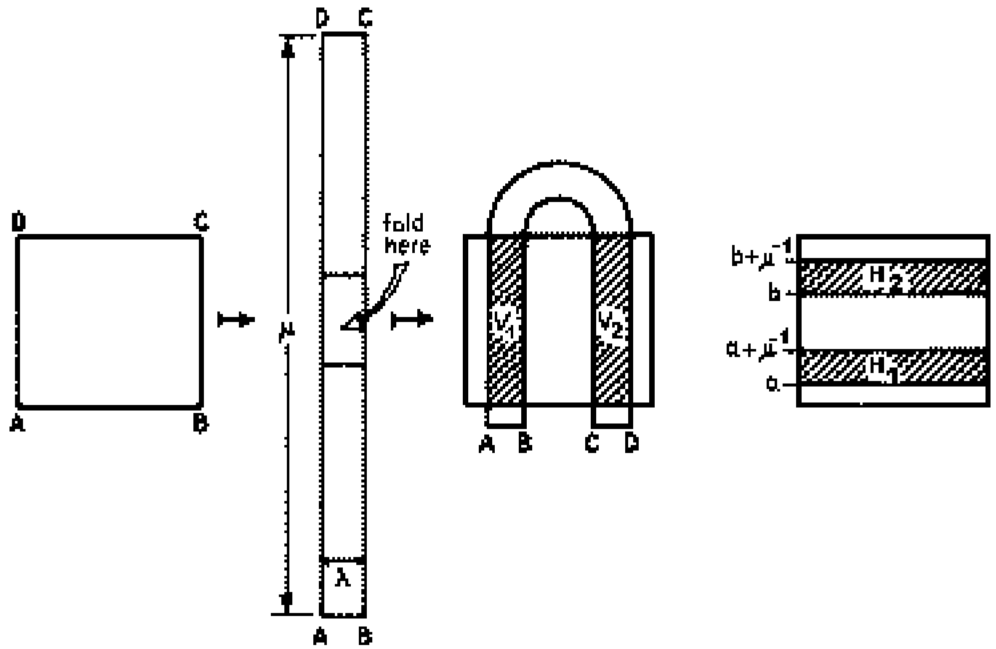
Das Ziel:

- Punkte Λ finden, die in $S = [0,1]^2$ bleiben
- Aufteilung von Λ in Δ^i finden.
- Konjugation h vom Shift zum f

Schwierigkeiten:

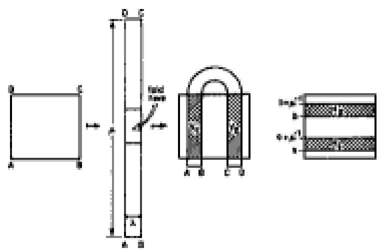
1. Überlappen die Δ^i kann es Punkte geben, die mit mehreren Folgen kodiert werden.
2. Alle Punkte $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\Delta^{\omega_i})$ werden mit der Folge $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ kodiert.

Geometrische Definition von f:



Wie sieht die Abbildung aus?

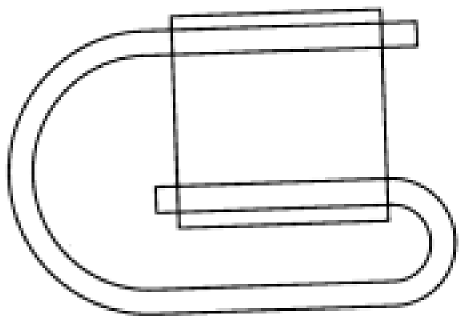
f auf $f(S) \cap S$ linear mit Streckung μ in y-Richtung und Stauchung λ in x-Richtung.
$f(H_1) = V_1$ und $f(H_2) = V_2$
V_1 und V_2 sind Rechtecke der Größe $\lambda \cdot 1$
H_1 und H_2 sind Rechtecke der Größe $1 \cdot \mu^{-1}$
$Df = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ auf H_1 und $Df = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ auf H_2.
Die Orientierung ist unterschiedlich in V_1 und V_2.

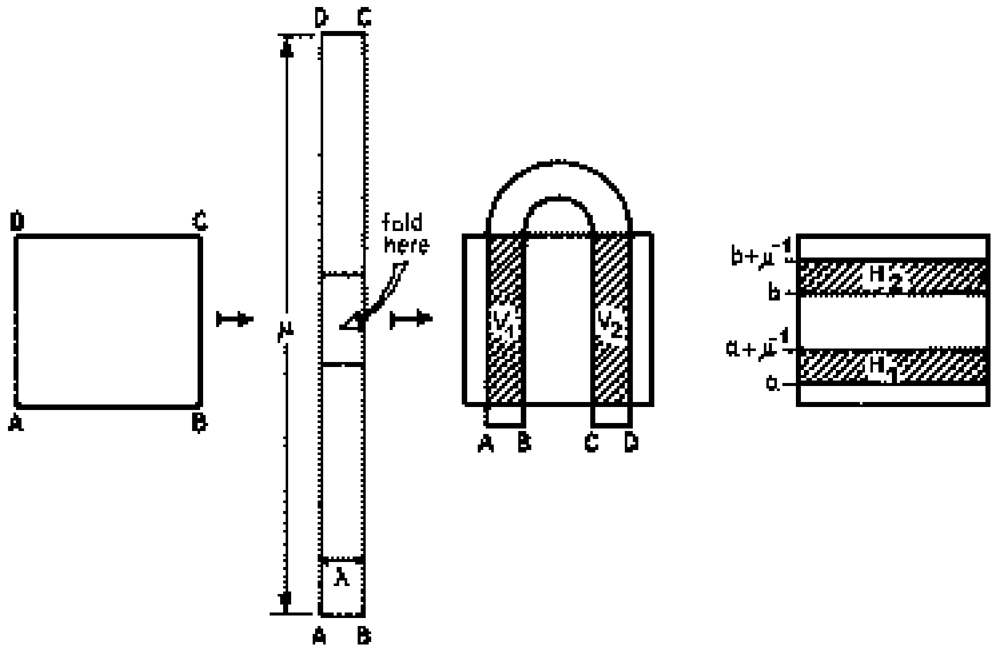


$$Df = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ auf } H_1 \text{ und } Df = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \text{ auf } H_2.$$

Die Orientierung ist unterschiedlich in V_1 und V_2.

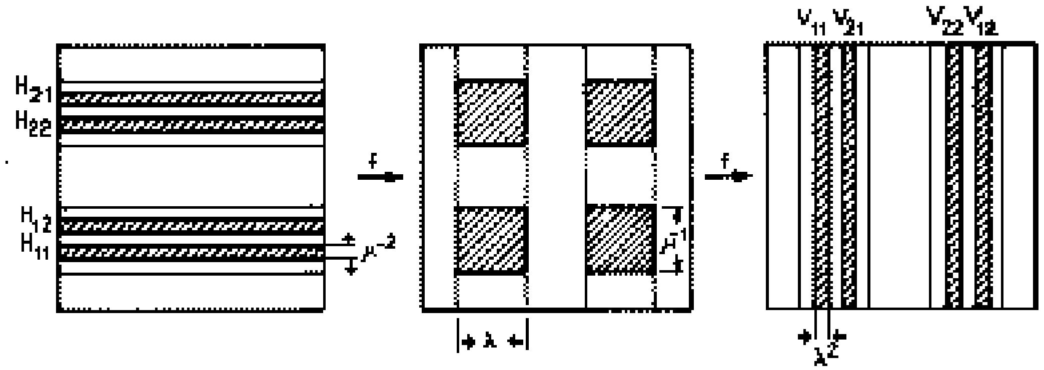
Man könnte daher auch einen alternativen Horseshoe betrachten:



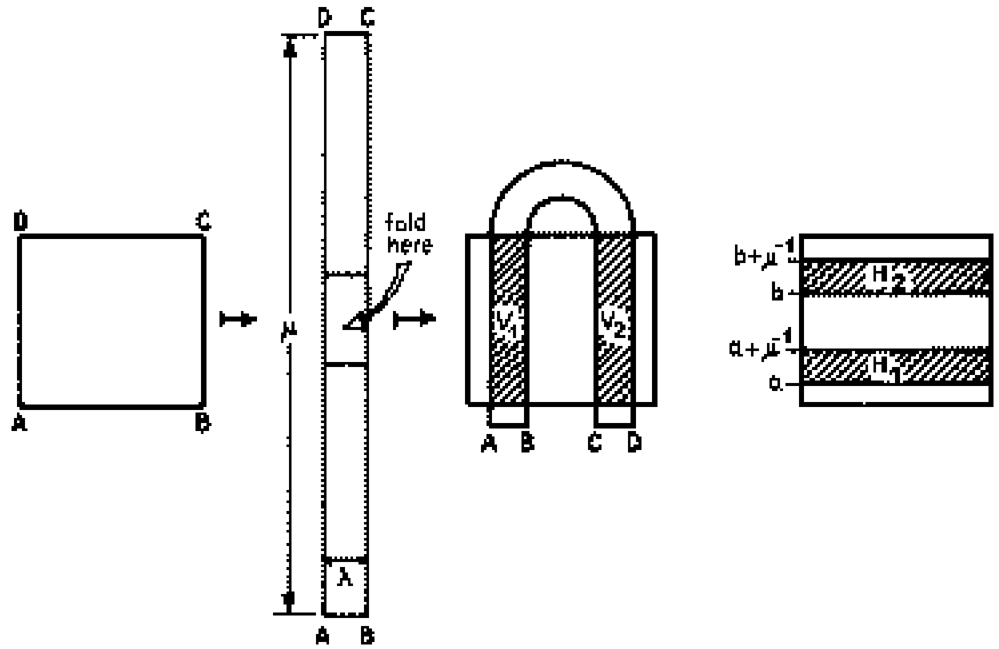


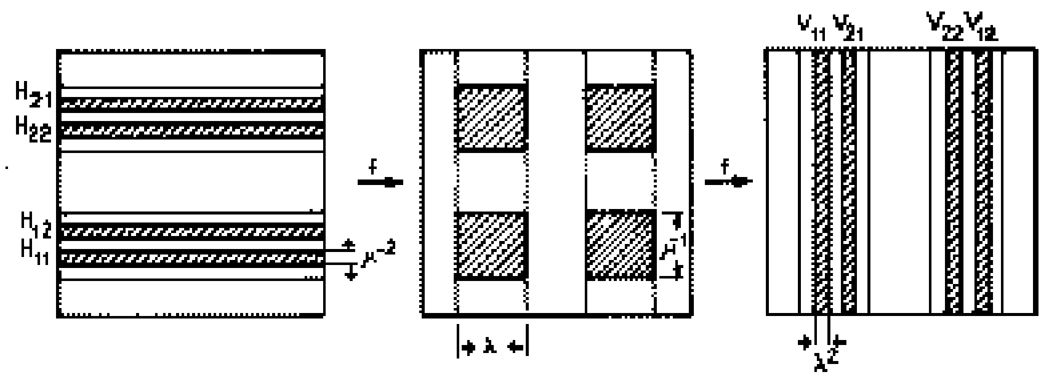
f ist nur auf S definiert.
$\Rightarrow$ Betrachte f nur auf $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(S)$.
Wie sieht diese Menge aus?
$H_1 \cup H_2 = S \cap f^{-1}(S)$
$V_1 \cup V_2 = S \cap f(S)$

$f^{-1}(f(S) \cap S \cap f^{-1}(S))$, $f(S) \cap S \cap f^{-1}(S)$ und $f(f(S) \cap S \cap f^{-1}(S))$

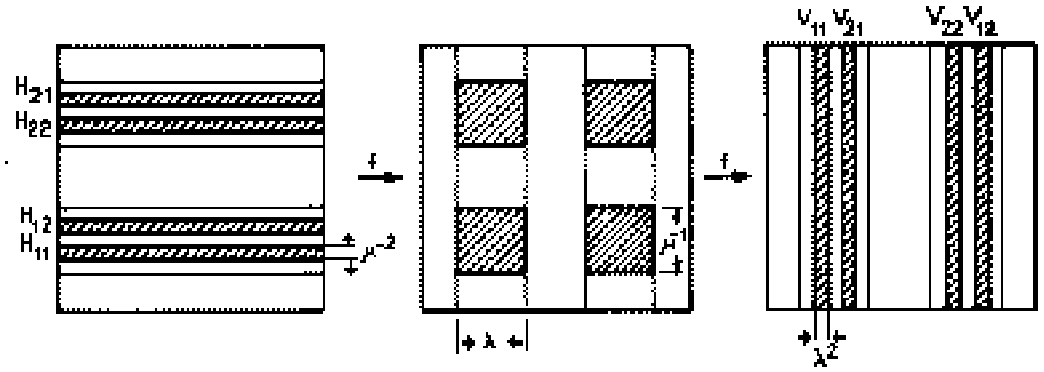


H21
H22
H12
H11
μ^-2
f
λ
μ^-1
f
V11 V21
V22 V12
λ^2



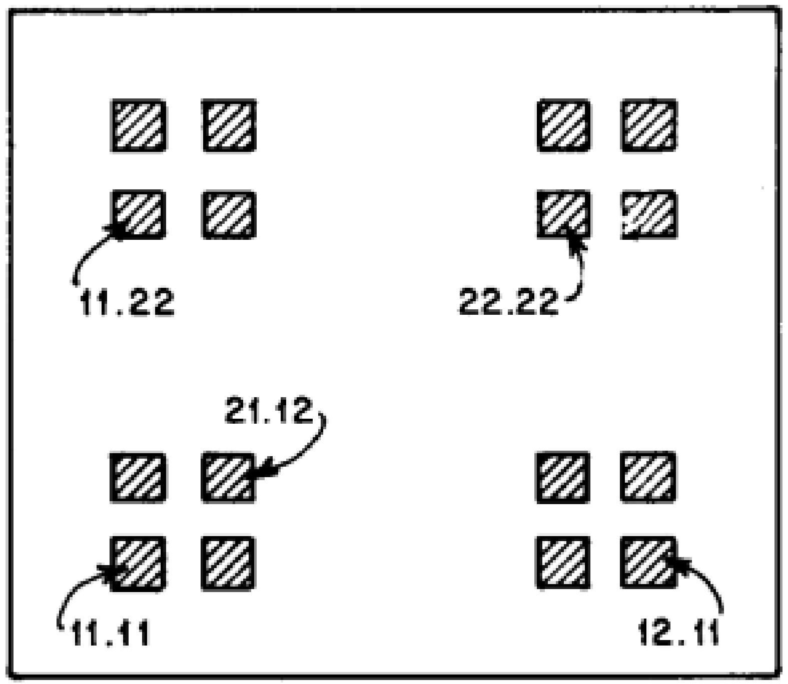


$\bigcap_{i\in\{0,-1,-2,\ldots,-n\}} f^i(S)$ besteht aus 2^n horizontalen Streifen der Dicke μ^n.
$\bigcap_{i\in\{0,1,2,\ldots,n\}} f^i(S)$ besteht aus 2^n vertikalen Streifen der Dicke λ^n.
Λ ist Cantormenge $\times$ Cantormenge.



$H_{1x} \subset H_1$, $\quad H_{2x} \subset H_2$, $\quad f(H_{x1}) \subset H_1$ und $\quad f(H_{x2}) \subset H_2$.
$V_{x1} \subset f(H_1) = V_1$, $\quad V_{x2} \subset f(H_2) = V_2$, $\quad V_{1x} \subset f^2(H_1)$ und $\quad V_{2x} \subset f^2(H_2)$.

Wie sieht $\bigcap_{i \in \{-2,-1,0,1,2\}} f^i(S)$ aus?
Es ist $H_{a_0 a_1} \cap V_{a_{-2} a_{-1}}$ durch eine Folge $(a_{-2} a_{-1} \cdot a_0 a_1)$ representiert.
Weiter identifiziere man $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit x, so dass $f^i(x) \in H_{a_i}$.


11.22
22.22
21.12
11.11
12.11

Dann gilt:
f auf Λ ist konjugiert zum Shift σ auf Σ_2.

d.h. es gibt einen Homeomorphismus $h : \Lambda \to \Sigma_2$ mit $f = h^{-1}\sigma h$, wobei $\Sigma_2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1,2\}\}$ und $d(a,b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{|i|}$

Dann gilt:
f auf Λ ist konjugiert zum Shift σ auf Σ_2.

d.h. es gibt einen Homeomorphismus $h : \Lambda \to \Sigma_2$ mit $f = h^{-1}\sigma h$, wobei $\Sigma_2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1,2\}\}$ und $d(a,b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{|i|}$

Beweis:
Definiere $h(x) = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i(x) \in H_{a_i}$.

Dann gilt:
f auf Λ ist konjugiert zum Shift σ auf Σ_2.

d.h. es gibt einen Homeomorphismus $h : \Lambda \to \Sigma_2$ mit $f = h^{-1}\sigma h$, wobei $\Sigma_2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1,2\}\}$ und $d(a,b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{|i|}$

Beweis:
Definiere $h(x) = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i(x) \in H_{a_i}$.
Wegen $f^{i+1}(x) = f^i(f(x))$ gilt $h(f(x)) = \sigma(h(x))$.

Dann gilt:
f auf Λ ist konjugiert zum Shift σ auf Σ_2.

d.h. es gibt einen Homeomorphismus $h : \Lambda \to \Sigma_2$ mit $f = h^{-1}\sigma h$, wobei $\Sigma_2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1,2\}\}$ und $d(a,b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{|i|}$

Beweis:
Definiere $h(x) = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i(x) \in H_{a_i}$.
Wegen $f^{i+1}(x) = f^i(f(x))$ gilt $h(f(x)) = \sigma(h(x))$.
h ist bijektiv, durch $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine eindeutige horizontale Linie gegeben und durch $(a_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine eindeutige vertikale Linie gegeben.

Dann gilt:
f auf Λ ist konjugiert zum Shift σ auf Σ_2.

d.h. es gibt einen Homeomorphismus $h : \Lambda \to \Sigma_2$ mit $f = h^{-1}\sigma h$, wobei $\Sigma_2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1, 2\}\}$ und $d(a, b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{|i|}$

Beweis:
Definiere $h(x) = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i(x) \in H_{a_i}$.
Wegen $f^{i+1}(x) = f^i(f(x))$ gilt $h(f(x)) = \sigma(h(x))$.
h ist bijektiv, durch $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine eindeutige horizontale Linie gegeben und durch $(a_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine eindeutige vertikale Linie gegeben.
h ist stetig, da f stetig ist.
h^{-1} ist stetig, denn ist eine Folge von $-m$ bis n festgelegt, dann liegen alle möglichen Punkte in einem $\mu^{-(n+1)} \times \lambda^n$ Quadrat.

Dann gilt:
f auf Λ ist konjugiert zum Shift σ auf Σ_2.

d.h. es gibt einen Homeomorphismus $h : \Lambda \to \Sigma_2$ mit $f = h^{-1}\sigma h$, wobei $\Sigma_2 := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1,2\}\}$ und $d(a,b) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{a_i,b_i} 2^{|i|}$

Beweis:
Definiere $h(x) = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i(x) \in H_{a_i}$.
Wegen $f^{i+1}(x) = f^i(f(x))$ gilt $h(f(x)) = \sigma(h(x))$.
h ist bijektiv, durch $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine eindeutige horizontale Linie gegeben und durch $(a_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine eindeutige vertikale Linie gegeben.
h ist stetig, da f stetig ist.
h^{-1} ist stetig, denn ist eine Folge von $-m$ bis n festgelegt, dann liegen alle möglichen Punkte in einem $\mu^{-(n+1)} \times \lambda^n$ Quadrat.

Daher gilt

- f hat 2^n periodische Punkte der Periode n,
- es gibt Punkte mit dichtem Orbit,
- Λ enthält überabzählbar viele nicht periodische Punkten,

- Λ enthält abzählbar viele heterokline und homokline Orbits für vorgebenen Punkte x,y gegen die positiv bzw. negativ asymptotisch ist.

Verzicht auf die Linearität

Ändert man f leicht zu $\tilde{f}$, wird $S \cap \tilde{f}(S) \cap \tilde{f}^2(S) \cap ... \cap \tilde{f}^n(S)$ immer noch aus 2^n vertikalen Streifen und $S \cap \tilde{f}^{-1}(S) \cap \tilde{f}^{-2}(S) \cap ... \cap \tilde{f}^{-n}(S)$ aus 2^n horizontalen Streifen bestehen.

Verzicht auf die Linearität

Ändert man f leicht zu $\tilde{f}$, wird $S \cap \tilde{f}(S) \cap \tilde{f}^2(S) \cap ... \cap \tilde{f}^n(S)$ immer noch aus 2^n vertikalen Streifen und $S \cap \tilde{f}^{-1}(S) \cap \tilde{f}^{-2}(S) \cap ... \cap \tilde{f}^{-n}(S)$ aus 2^n horizontalen Streifen bestehen.
Zur Beschreibung benötigt man zu erst horizontale und vertikale Streifen.
Vertikale Kurve $x = v(y)$

$$0 \leq v(y) \leq 1, \qquad |v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu \, |y_1 - y_2| \text{ für } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

Horizontale Kurve $y = h(x)$

$$0 \leq h(x) \leq 1, \qquad |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu \, |x_1 - x_2| \text{ für } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

Verzicht auf die Linearität

Ändert man f leicht zu $\tilde{f}$, wird $S \cap \tilde{f}(S) \cap \tilde{f}^2(S) \cap ... \cap \tilde{f}^n(S)$ immer noch aus 2^n vertikalen Streifen und $S \cap \tilde{f}^{-1}(S) \cap \tilde{f}^{-2}(S) \cap ... \cap \tilde{f}^{-n}(S)$ aus 2^n horizontalen Streifen bestehen.

Zur Beschreibung benötigt man zu erst horizontale und vertikale Streifen.

Vertikale Kurve $x = v(y)$

$$0 \leq v(y) \leq 1, \qquad |v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu \, |y_1 - y_2| \text{ für } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

Horizontale Kurve $y = h(x)$

$$0 \leq h(x) \leq 1, \qquad |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu \, |x_1 - x_2| \text{ für } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

Vertikale Streifen für Kurven $v_1(y) < v_2(y), y \in [0, 1]$

$$V = \{(x, y)|x \in [v_1(y), v_2(y)]; y \in [0, 1]\}$$

Horizontale Streifen für Kurven $h_1(x) < h_2(x), x \in [0, 1]$

$$H = \{(x, y)|x \in [0, 1]; y \in [h_1(x), h_2(x)]\}$$

Und deren Dicke

$$d(V) = \max_{y \in [0,1]} |v_2(y) - v_1(y)| \,, \qquad d(H) = \max_{x \in [0,1]} |h_2(x) - h_1(x)|$$

Ändert man f leicht zu $\tilde{f}$, wird $S \cap \tilde{f}(S) \cap \tilde{f}^2(S) \cap ... \cap \tilde{f}^n(S)$ immer noch aus 2^n vertikalen Streifen und $S \cap \tilde{f}^{-1}(S) \cap \tilde{f}^{-2}(S) \cap ... \cap \tilde{f}^{-n}(S)$ aus 2^n horizontalen Streifen bestehen.

Zur Beschreibung benötigt man zu erst horizontale und vertikale Streifen.

Vertikale Kurve $x = v(y)$

$$0 \leq v(y) \leq 1, \qquad |v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu \, |y_1 - y_2| \text{ für } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

Horizontale Kurve $y = h(x)$

$$0 \leq h(x) \leq 1, \qquad |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu \, |x_1 - x_2| \text{ für } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

Vertikale Streifen für Kurven $v_1(y) < v_2(y), y \in [0,1]$

$$V = \{(x,y)|x \in [v_1(y), v_2(y)]; y \in [0,1]\}$$

Horizontale Streifen für Kurven $h_1(x) < h_2(x), x \in [0,1]$

$$H = \{(x,y)|x \in [0,1]; y \in [h_1(x), h_2(x)]\}$$

Und deren Dicke

$$d(V) = \max_{y \in [0,1]} |v_2(y) - v_1(y)|, \qquad d(H) = \max_{x \in [0,1]} |h_2(x) - h_1(x)|$$

Für $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $V_i \supset V_{i+1}$ und $\lim_{n \to \infty} d(V_i) = 0$ ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$ eine vertikale Kurve.
Eine vertikale schneidet eine horizontale Kurve in genau einem Punkt.

H1 $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., N\}$, H_i, V_i für $i \in \mathcal{S}$ sind disjunkte horizontale bzw. vertikale Streifen und $f(H_i) = V_i$.

H2 f kontrahiert vertikale Streifen, f^{-1} kontrahiert horizontale Streifen. D.h. es gibt $\nu \in (0, 1)$ mit $V_i' \subset V_i$ folgt $f(V_i') \cap V_j$ ist ein horizontaler Streifen und

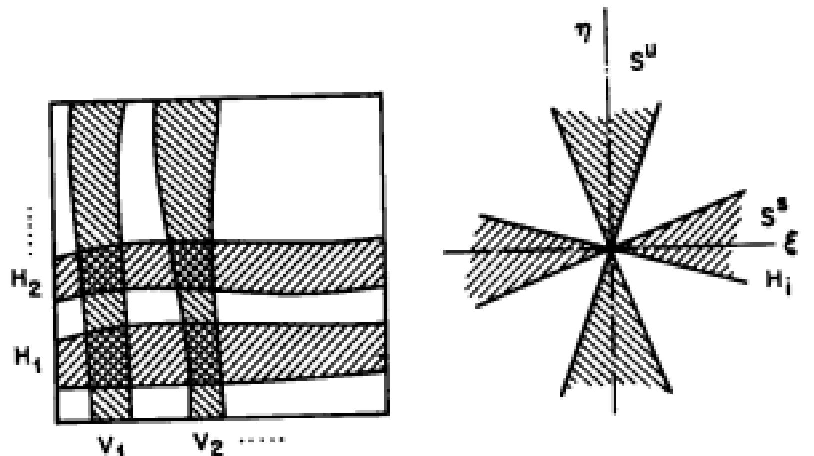
$$d(f(V_i') \cap V_j) \leq \nu d(V_i')d(V_j)/d(V_i)$$

und $H_i' \subset H_i$ folgt $f^{-1}(H_i') \cap H_j$ ist ein horizontaler Streifen und

$$d(f^{-1}(H_i') \cap H_j) \leq \nu d(H_i')d(H_j)/d(H_i)$$

Man kann $H2$ ersetzen, denn $H1$ und $H3$ mit $0 < \mu < \frac{1}{2}$ implizieren $H2$ mit $\nu = \mu/(1-\mu)$

H3 Es gibt Sektorbündel $S^u = \{(\xi, \eta) | \, |\xi| < \mu \, |\eta|\}$ definiert auf $\bigcup_{i \in \mathcal{S}} V_i$ und $S^s = \{(\xi, \eta) | \, |\eta| < \mu \, |xi|\}$ definiert auf $\bigcup_{i \in \mathcal{S}} H_i$ für $0 < \mu^{<} 1$, so dass $Df(S^u) \subset S^u$ und $Df^{-1}S^s \subset S^s$. Und außerdem mit $Df(\xi_0, \eta_0) = (\xi_1, \eta_1)$ und $Df^{-1}(\xi_0, \eta_0) = (\xi_{-1}, \eta_{-1})$ gilt $|\eta_1| \geq (1/\mu) \, |\eta_0|$ und $|\eta_{-1}| \geq (1/\mu) \, |\xi_0|$.



(a) (b)

Wieder ist f auf Λ konjugiert zum Shift.

 Das Ziel:

- Punkte finden, die in $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ bleiben
- Aufteilung von $\mathbb{T}^2$ in Δ^i finden.
- Konjugation h vom Shift zum f

Schwierigkeiten:

1. Überlappen die Δ^i kann es Punkte geben, die mit mehreren Folgen kodiert werden.
2. Alle Punkte $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(\Delta^{\omega_i})$ werden mit der Folge $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ kodiert.

Beim Horseshoe waren die $\Delta^i = H_i$ disjunkt.

Automorphismen auf dem Torus Das Ziel:

- Punkte finden, die in $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ bleiben
- Aufteilung von $\mathbb{T}^2$ in Δ^i finden.
- Konjugation h vom Shift zum f

Schwierigkeiten:

1. Überlappen die Δ^i kann es Punkte geben, die mit mehreren Folgen kodiert werden.
2. Alle Punkte $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(\Delta^{\omega_i})$ werden mit der Folge $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ kodiert.

Beim Horseshoe waren die $\Delta^i = H_i$ disjunkt.
Auf dem Torus sind alle Orbits beschränkt bzw. bleiben in $\mathbb{T}^2$, daher muss ganz $\mathbb{T}^2$ aufgeteilt werden. Also sind die Δ^i nicht disjunkt.
Die Δ^i sind abgeschlossen, für zusammenhängende, kompakte Mannigfaligkeiten ist, ergibt sich diese Problem also immer.

Symbolische Dynamik am Beispiel $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$

$$f(x,y) = (2x+y, x+y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{mod} 1)$$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Eigenvektor zu $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ist $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zu $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ist $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(x,y) = (2x+y, x+y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (\text{mod} 1)$$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Eigenvektor zu $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ist $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zu $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ist $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung hat genau einen Fixpunkt bei $(0,0)$.

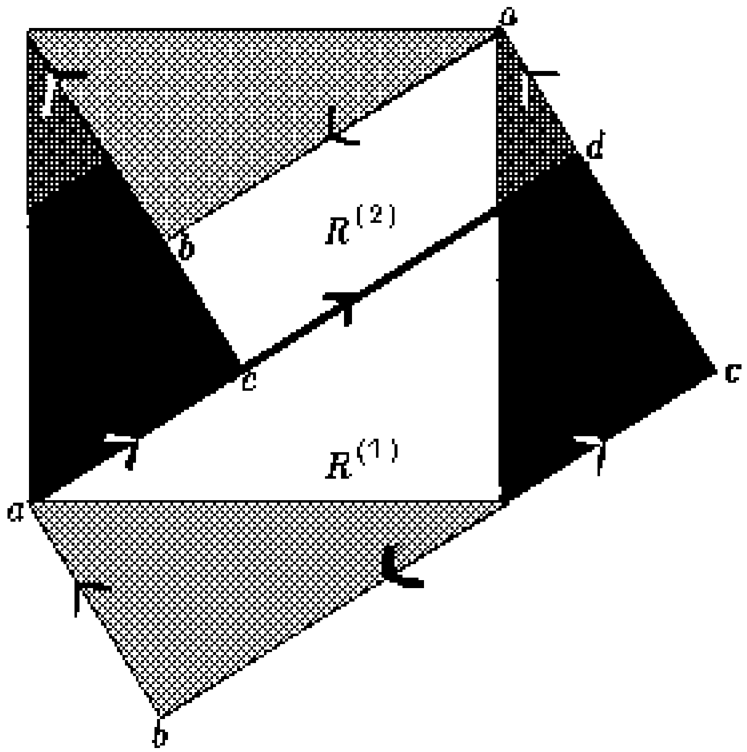
$W^u((0,0)) = \{(x,y)(\text{mod } 1) | x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y\}$ und $W^s((0,0)) = \{(x,y)(\text{mod } 1) | x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y\}$
.

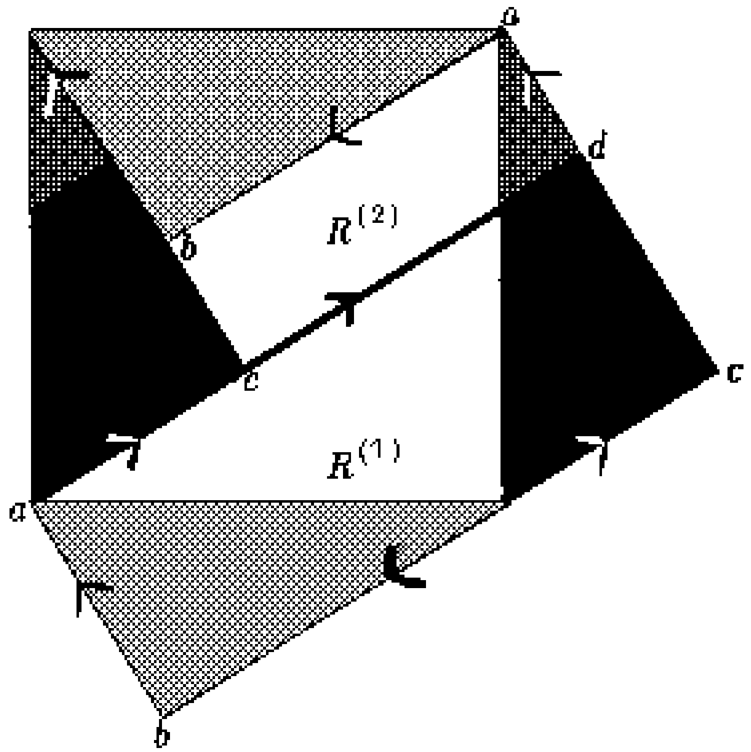
$(x,y) \in W^s((0,0)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x,y) = (0,0)$.

Der Abstand entlang $W^s((0,0))$ geht expontentiell mit λ_2^n gegen Null.

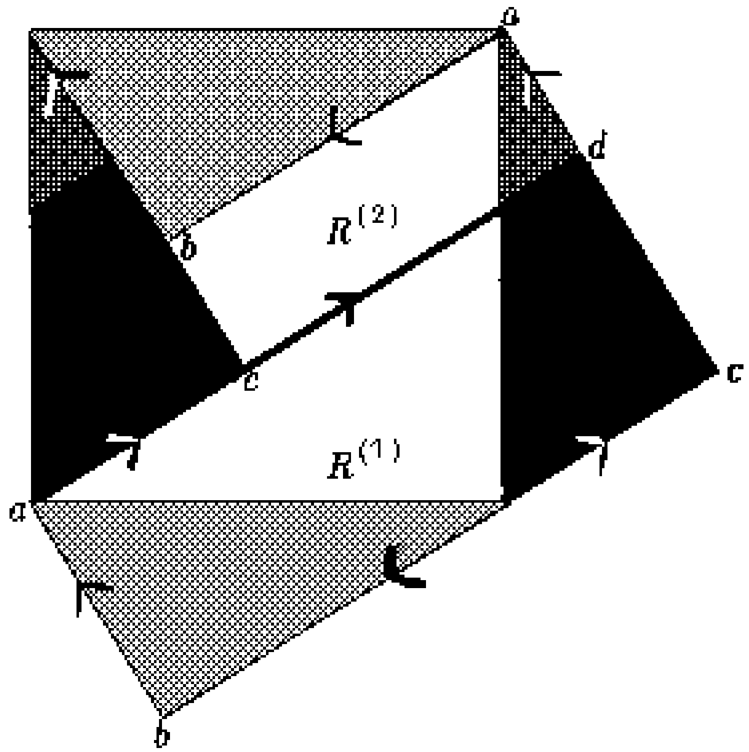
$(x,y) \in W^u((0,0)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^{-n}(x,y) = (0,0)$.

Der Abstand entlang $W^u((0,0))$ geht bei Rückwärtsiteration expontentiell mit λ_1^{-n} gegen Null.

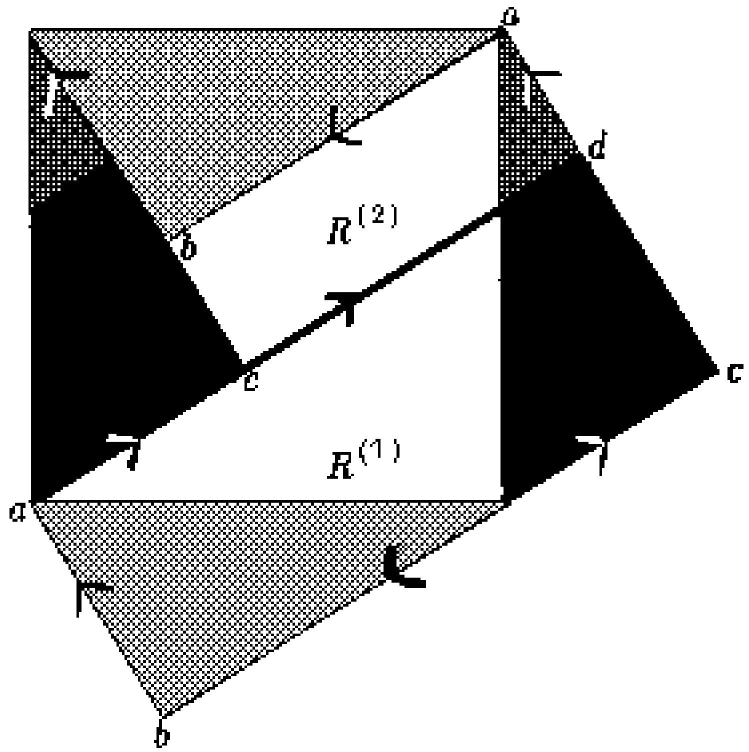

a
d
b
$R^{(2)}$
c
c
$R^{(1)}$
a
b



Horizontale und vertikale Richtung waren genau die Eigenrichtungen.
Daher will man die Rechtecke Δ^i mit Seiten parallel zu den Eigenvektoren wählen.

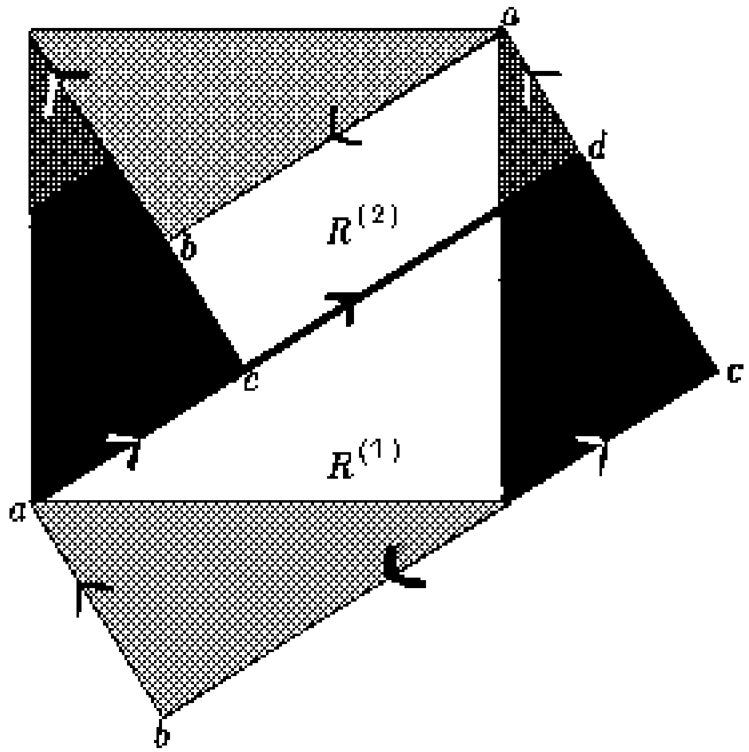


Horizontale und vertikale Richtung waren genau die Eigenrichtungen.
Daher will man die Rechtecke Δ^i mit Seiten parallel zu den Eigenvektoren wählen.
Verlängert man die Eigenvektoren von $(0,0)$ bis man die Schnittpunkte b, c und d erhält, so erhält man das obige Bild.



Horizontale und vertikale Richtung waren genau die Eigenrichtungen.
Daher will man die Rechtecke Δ^i mit Seiten parallel zu den Eigenvektoren wählen.
Verlängert man die Eigenvektoren von $(0,0)$ bis man die Schnittpunkte b, c und d erhält, so erhält man das obige Bild.

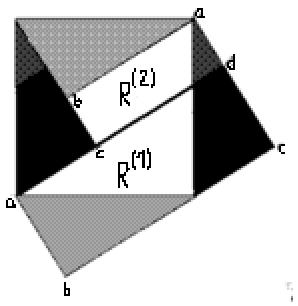
Man definiert die Rechtecke $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$.
Auf diesen könnte man dann symbolische Dynamik betreiben.
Aber: Die symbolische Dynamik wäre dann exakt die gleich wie beim Horseshoe.
Woran liegt das?



Horizontale und vertikale Richtung waren genau die Eigenrichtungen.
Daher will man die Rechtecke Δ^i mit Seiten parallel zu den Eigenvektoren wählen.
Verlängert man die Eigenvektoren von $(0,0)$ bis man die Schnittpunkte b, c und d erhält, so erhält man das obige Bild.

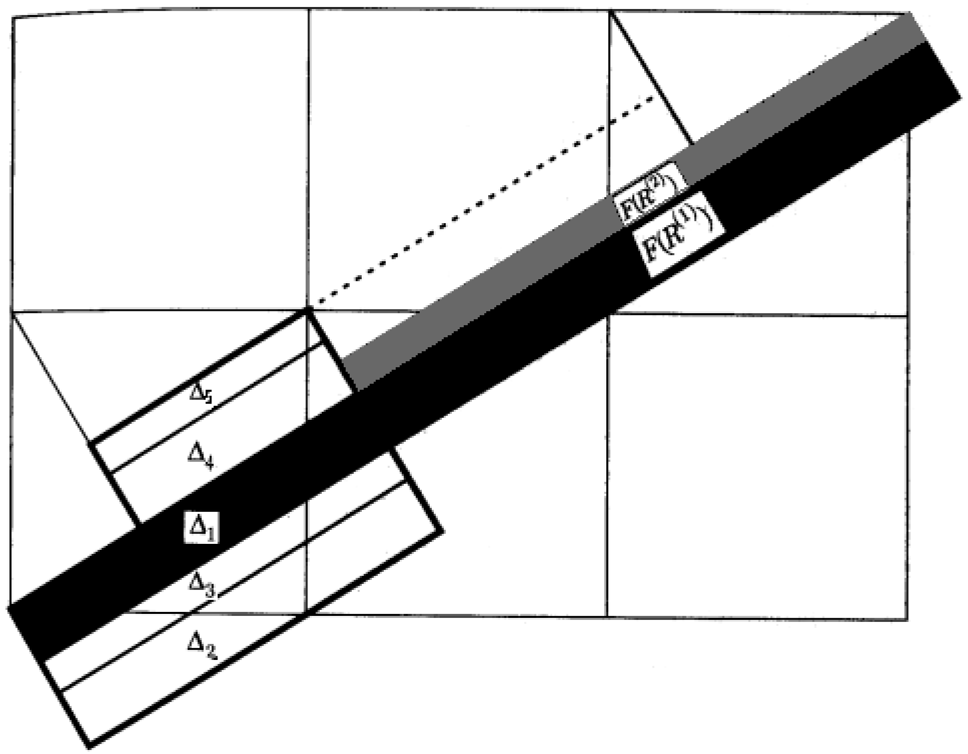
Man definiert die Rechtecke $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$.
Auf diesen könnte man dann symbolische Dynamik betreiben.
Aber: Die symbolische Dynamik wäre dann exakt die gleich wie beim Horseshoe.
Woran liegt das?
Im Gegensatz zum Horseshoe wird man hier keinen Homeomorphismus h finden.

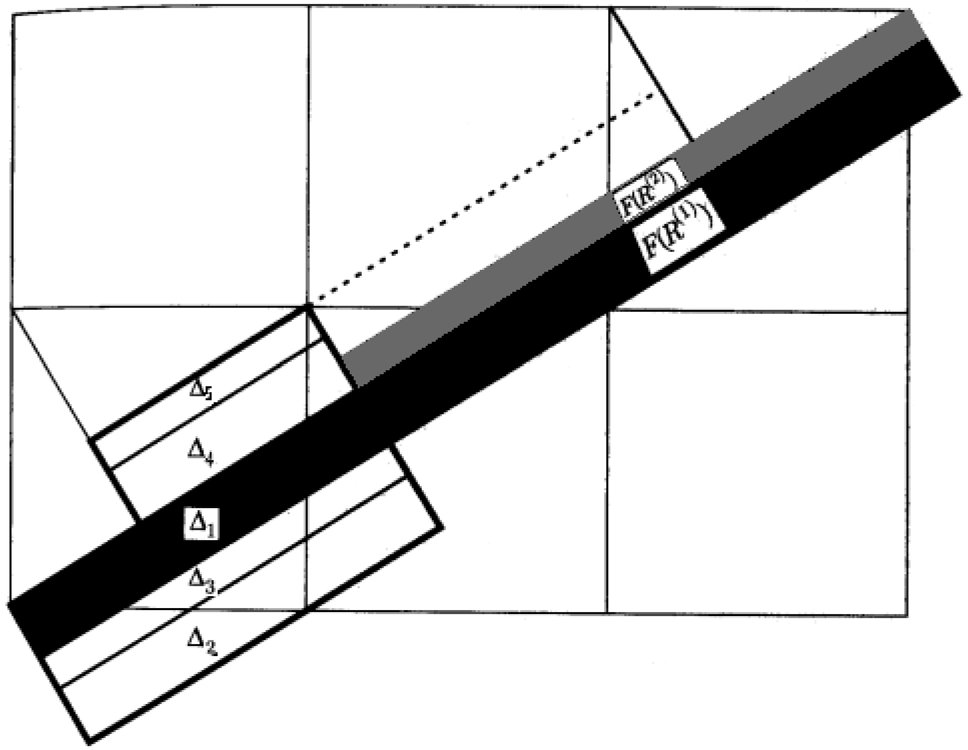
Z.B. liegen alle Iterationen von b sowohl in $R^{(1)}$ als auch in $R^{(2)}$.
Also muss man andere Gebiete wählen.



Man wählt daher

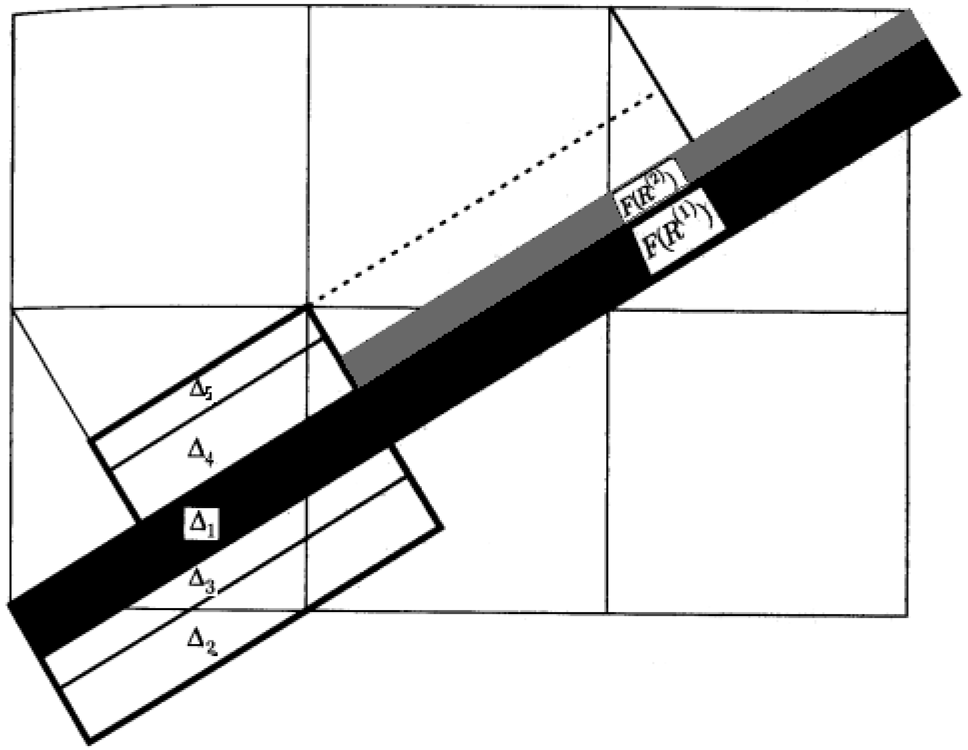
$\Delta^1 \subset F(R^{(1)}) \cap R^{(1)} \qquad \Delta^2 \subset F(R^{(1)}) \cap R^{(1)} \qquad \Delta^3 = F(R^{(2)}) \cap R^{(1)} \qquad \Delta^4 = F(R^{(1)}) \cap R^{(}$





f kontrahiert in horizontaler Richtung und f^{-1} kontrahiert in vertikaler Richtung. Daher besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, a_i \in \{1,2,3,4,5\}$ aus maximal einem Punkt.

Für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, bei der $f(\Delta^{a_i}) \cap \Delta^{a_{i+1}}$ innere Punkte enthält, ist $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i}) \neq \emptyset$.



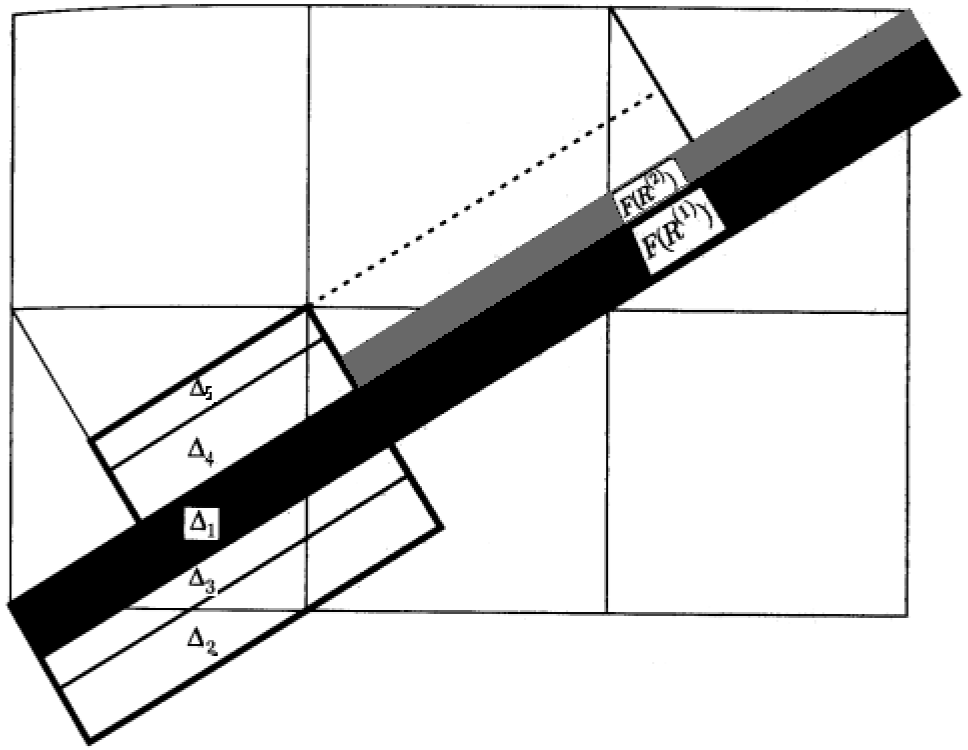
f kontrahiert in horizontaler Richtung und f^{-1} kontrahiert in vertikaler Richtung. Daher besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, a_i \in \{1,2,3,4,5\}$ aus maximal einem Punkt.
Für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, bei der $f(\Delta^{a_i}) \cap \Delta^{a_{i+1}}$ innere Punkte enthält, ist $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i}) \neq \emptyset$.
Man definiert dann die Übergangsmatrix A über $A_{ij} = 1$ genau für $f(\Delta^i) \cap \Delta^j$ enthält innere Punkte.

Hier ist dies

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man definiert dann einen Teilmenge Σ_A von Σ für eine $n \times n$-Matrix als

$$\Sigma_A = \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} | a_i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und } A_{a_i, a_{i+1}} = 1\}$$



f kontrahiert in horizontaler Richtung und f^{-1} kontrahiert in vertikaler Richtung. Daher besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, a_i \in \{1,2,3,4,5\}$ aus maximal einem Punkt.

Für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, bei der $f(\Delta^{a_i}) \cap \Delta^{a_{i+1}}$ innere Punkte enthält, ist $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i}) \neq \emptyset$.

Man definiert dann die Übergangsmatrix A über $A_{ij} = 1$ genau für $f(\Delta^i) \cap \Delta^j$ enthält innere Punkte.

Hier ist dies

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man definiert dann einen Teilmenge Σ_A von Σ für eine $n \times n$-Matrix als

$$\Sigma_A = \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} | a_i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und } A_{a_i,a_{i+1}} = 1\}$$

Wie beschrieben besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ aus einem Punkt. Daher existiert eine Semikonjugation $h : \Sigma_A \to \mathbb{T}^2 : (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ mit $f \circ h = h \circ \sigma$.
Um die Dynamik zu verstehen, muss man feststellen, welche Folgen auf identische Punkte abgebildet werden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie beschrieben besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ aus einem Punkt. Daher existiert eine Semikonjugation $h : \Sigma_A \longrightarrow \mathbb{T}^2 : (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ mit $f \circ h = h \circ \sigma$.
Um die Dynamik zu verstehen, muss man feststellen, welche Folgen auf identische Punkte abgebildet werden.

Σ_A hat 3 Fixpunkte (...1111...),(...22222...) und (...5555...). f hat jedoch nur einen Fixpunkt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie beschrieben besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ aus einem Punkt. Daher existiert eine Semikonjugation $h : \Sigma_A \to \mathbb{T}^2 : (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ mit $f \circ h = h \circ \sigma$.
Um die Dynamik zu verstehen, muss man feststellen, welche Folgen auf identische Punkte abgebildet werden.

Σ_A hat 3 Fixpunkte (...1111...),(...22222...) und (...5555...). f hat jedoch nur einen Fixpunkt.
In Σ_A ist die Zahl der periodischen Punkt der Periode n gegeben durch $\mathrm{tr}A^n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + 0^n + 0^n + 0^n$. f hat aber nur $P_n(f) = \lambda_1^n + \lambda_2^n - 2$ Punkte der Periode n.
$(P_n(f) = |\det(f^n - \mathbb{1})| = (\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - 1))$.

Genau die Punkte $x \in \mathbb{T}^2$ haben ein eindeutiges Urbild in Σ_A, deren Orbit nie auf dem Rand von $R^{(1)}$ oder $R^{(2)}$ liegt. Denn dies sind genau die Punkte, deren Orbit nie auf einem Rand einer der Δ^i liegt.

Daher betrachtet man die Abbildung nicht auf ganz Σ_A, sondern nimmt Folgen heraus,

- deren rechtes Ende der Folge konstant 1 oder konstant 5 ist. (...1111), (...555)
- deren linkes Ende entweder nur aus 5en besteht oder aus 1en und 2en.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie beschrieben besteht $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ aus einem Punkt. Daher existiert eine Semikonjugation $h : \Sigma_A \longrightarrow \mathbb{T}^2 : (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(\Delta^{a_i})$ mit $f \circ h = h \circ \sigma$.
Um die Dynamik zu verstehen, muss man feststellen, welche Folgen auf identische Punkte abgebildet werden.

Σ_A hat 3 Fixpunkte (...1111...),(...22222...) und (...5555...). f hat jedoch nur einen Fixpunkt.
In Σ_A ist die Zahl der periodischen Punkt der Periode n gegeben durch $\mathrm{tr}A^n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + 0^n + 0^n + 0^n$. f hat aber nur $P_n(f) = \lambda_1^n + \lambda_2^n - 2$ Punkte der Periode n.
$(P_n(f) = |\det(f^n - \mathbb{1})| = (\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - 1))$.

Genau die Punkte $x \in \mathbb{T}^2$ haben ein eindeutiges Urbild in Σ_A, deren Orbit nie auf dem Rand von $R^{(1)}$ oder $R^{(2)}$ liegt. Denn dies sind genau die Punkte, deren Orbit nie auf einem Rand einer der Δ^i liegt.

Daher betrachtet man die Abbildung nicht auf ganz Σ_A, sondern nimmt Folgen heraus,

- deren rechtes Ende der Folge konstant 1 oder konstant 5 ist. (...1111), (...555)
- deren linkes Ende entweder nur aus 5en besteht oder aus 2en und 1en.

Damit ergibt sich der Satz:
Die Semikonjugation zwischen σ und f ist bijektiv für alle periodischen Punkte außer den Fixpunkten. Die Anzahl der Urbilder jedes Punktes, der nicht negativ asymptotisch zu einem der Fixpunkte ist, ist beschränkt.

Definition von Markovpartitionen

Λ sei eine maximale, invariante, unzerlegbare Menge für eine Funktion $f : \Lambda \to \Lambda$, wobei *unzerlegbar* bedeutet, dass es zu jedem ϵ und jedes Paar $x, y \in \Lambda$ eine ϵ-Kette von x zu y gibt. Also gibt es $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = y$ mit $|f(x_i) + x_{i+1}| \leq \epsilon$.

Definition von Markovpartitionen

Λ sei eine maximale, invariante, unzerlegbare Menge für eine Funktion $f : \Lambda \to \Lambda$, wobei $unzerlegbar$ bedeutet, dass es zu jedem ϵ und jedes Paar $x, y \in \Lambda$ eine ϵ-Kette von x zu y gibt. Also gibt es $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = y$ mit $|f(x_i) + x_{i+1}| \leq \epsilon$.

Unstabile Mannigfaltigkeit $W_\epsilon^u(x)$ bzw. stabile Mannigfaltigkeit $W_\epsilon^s(x)$ ist definiert für kompakte, invariante Λ, auf denen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^r-Diffeomorphismus ist und die eine hyperbolische Struktur $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ haben.
Und zwar so, dass $y \in W_\epsilon^s(x) \Leftrightarrow \|f^n(x), f^n(y)\| \geq \epsilon$ und
$y \in W_\epsilon^u(x) \Leftrightarrow \|f^n(x), f^n(y)\| \leq \epsilon$.
Und $W_\epsilon^s(x)$, $W_\epsilon^u(x)$ zusammenhängend mit $x \in W_\epsilon^s(x)$ und $x \in W_\epsilon^u(x)$.

Daraus ergibt sich sofort exponentielle Annährung.

Definition von Markovpartitionen

Λ sei eine maximale, invariante, unzerlegbare Menge für eine Funktion $f : \Lambda \to \Lambda$, wobei *unzerlegbar* bedeutet, dass es zu jedem ϵ und jedes Paar $x, y \in \Lambda$ eine ϵ-Kette von x zu y gibt. Also gibt es $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = y$ mit $|f(x_i) + x_{i+1}| \leq \epsilon$.

Unstabile Mannigfaltigkeit $W^u_\epsilon(x)$ bzw. stabile Mannigfaltigkeit $W^s_\epsilon(x)$ ist definiert für kompakte, invariante Λ, auf denen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^r-Diffeomorphismus ist und die eine hyperbolische Struktur $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ haben.
Und zwar so, dass $y \in W^s_\epsilon(x) \Leftrightarrow \|f^n(x), f^n(y)\| \geq \epsilon$ und
$y \in W^u_\epsilon(x) \Leftrightarrow \|f^n(x), f^n(y)\| \leq \epsilon$.
Und $W^s_\epsilon(x)$, $W^u_\epsilon(x)$ zusammenhängend mit $x \in W^s_\epsilon(x)$ und $x \in W^u_\epsilon(x)$.

Daraus ergibt sich sofort exponentielle Annährung.

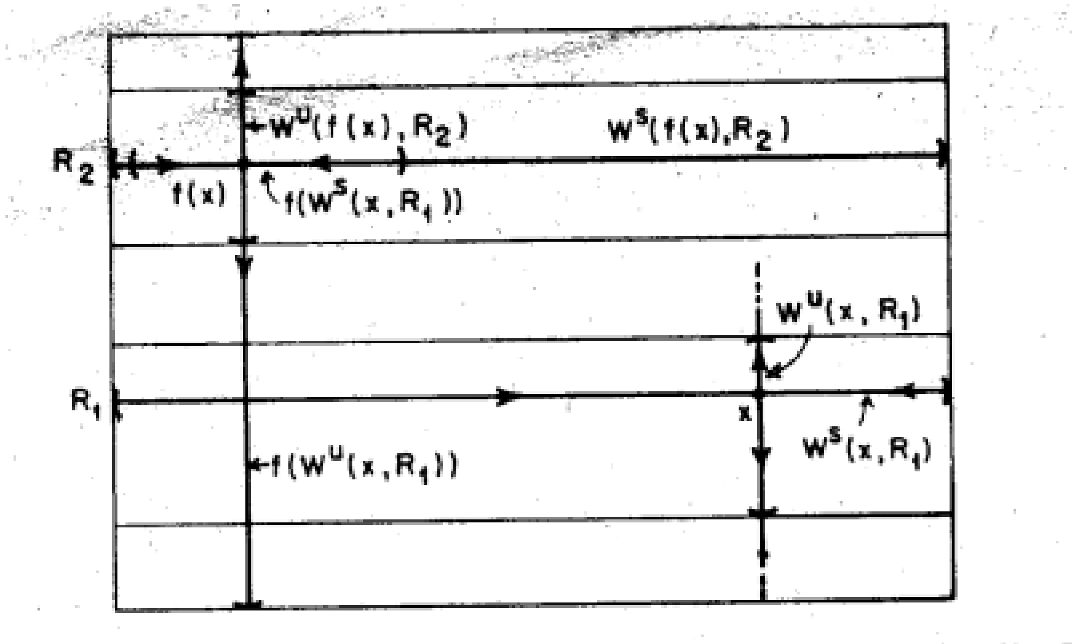
Ein *Rechteck* R für Λ ist ein abgeschlossene Teilmenge von Λ mit der Eigenschaft:

$$x, y \in R \Rightarrow W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \in R \text{ und ist genau ein Punkt.}$$

Das stable-manifold-theorem sagt, dass es unter diesen Voraussetzungen $\delta, \epsilon > 0$ gibt mit $\|x - y\| < \delta \Rightarrow W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ ist genau ein Punkt.

Markovparition für Λ ist eine endliche Menge von Rechtecken $\{R_1, ...R_m\} = \mathcal{R}$ mit

1. $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$
2. $\mathrm{int} R_i \cap \mathrm{int}\ R_j = \emptyset$ für $i \neq j$
3. $(f(W_\epsilon^u(x) \cap R_i) \supset (W_\epsilon^u(f(x)) \cap R_j$ und $(f(W_\epsilon^s(x) \cap R_i) \subset (W_\epsilon^s(f(x)) \cap R_j$ wann immer $x \in \mathrm{int}\ R_i$ und $f(x) \in \mathrm{int}\ R_j$.



Kompakte, maximale, unzerlegbare, hyperbolische, invariante Mengen haben Markovpartitionen.

Smale-Birkhoff Homoclinic Theorem
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, p hyperbolischer Fixpunkt, $q \neq p$ ein transversaler Schnittpunkt zwischen $W^u(p)$ und $W^s(p)$. Dann hat f eine hyperbolische invariante Menge Λ, auf der f konjugiert ist zu einem Shift σ.