

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Blatt 6

Aufgabe 21 (i) Zeigen Sie, dass $W^{1,1}((0,1);\mathbb{R})$ in $C([0,1];\mathbb{R})$ eingebettet ist. Ist die Einbettung kompakt?

(ii) Ist die Funktion

$$u(x) = \sqrt{|x|}$$

in $W^{1,p}((-1,1))$, $p \geq 1$?

Aufgabe 22 Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $M : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sei bilinear mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} M(u, v) &= M(v, u) \quad \forall u, v \in X \text{ (Symmetrie) ,} \\ \exists C > 0 : \quad |M(u, v)| &\leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in X \text{ (Stetigkeit)} \\ \exists c > 0 : \quad M(u, u) &\geq c \|u\|^2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jede abgeschlossene und konvexe Teilmenge $V \subset X$ und jede beschränkte lineare Abbildung $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau ein Element $v \in V$ existiert, welches das Funktional

$$J(u) = M(u, u) + \ell(u)$$

auf V minimiert.

Aufgabe 23 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $G \subset \mathbf{O}(n)$ die Untergruppe, mit

$$A\Omega = \Omega \quad \forall A \in G.$$

Zeigen Sie: gilt für eine Randfunktion $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dass $g(Ax) = g(x)$ so hat jede Lösung u des Problems $\Delta u = 0$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$ die Invarianzeigenschaft

$$u(Ax) = u(x) \quad \forall A \in G.$$

Hinweis: Ist Ihnen diese Aufgabe zu schwer, beschränken Sie sich auf die Aussage, für radialsymmetrische Gebiete im $\mathbb{R}^2$ sind die harmonischen Funktionen mit radialsymmetrischen Randwerten radialsymmetrisch.

Aufgabe 24 Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Randbedingung (a) $g(\varphi) = \sin(\varphi)$ und (b) $g(\varphi) = |\sin(\varphi)|$. Zeigen Sie, dass das Dirichletintegral $\mathcal{D}$ im Fall (a) den minimalen Wert π annimmt, im Fall (b) das Minimum kleiner als π ist. (**Hinweis:** Zerlegen sie den Kreis und suchen Sie eine stückweise lineare Funktion mit den geeigneten Randwerten.)

Abgabe: 3.12.2012