

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 5 (a) Man zeige: Ist $u \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ und hat u eine Darstellung als Fourierreihe

$$u(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(2j\pi x) + b_j \sin(2j\pi x))$$

so dass für $k = 0, 1, \dots, r$ gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|)$$

ist konvergent, so ist die Funktion $u \in C^r(0, 1) \cap C([0, 1])$.

(b) Ist $u(t, x)$ eine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert $u_0 \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ (der eine Darstellung als Fourierreihe besitzt), so ist $u(t, \cdot) \in C^\infty((0, 1))$ für jedes $t > 0$.

Aufgabe 6 Es sei u auf $\mathbb{R}^n$ harmonisch und beschränkt. Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Aufgabe 7 (a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gebiet. Mit u_{x_i} bezeichnen wir $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Man zeige: Sind $u, v \in C^1(\Omega)$ und verschwindet u auf $\partial\Omega$ so gilt

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx.$$

(b) Wie lautet eine entsprechende Formel für auf dem Rand nichtverschwindende Funktionen u, v .

(c) (Green'sche Formel) Ist Ω wie zuvor und sind $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, so gelten

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dF$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF.$$

Dabei bedeutet $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung bezüglich des äußeren Normalenvektors, also

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u(x), n(x) \rangle.$$

Aufgabe 8 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man prüfe ob (bzw. für welche Parameterwerte) die folgenden Funktionen auf Ω subharmonisch sind:

- (a) $\|x\|^\alpha$, $\alpha > 0$.
- (b) u^β , $\beta > 0$ für u harmonisch auf Ω .
- (c) $-\log u$ für harmonisches u .

Abgabe: 2.11.2012