Partielle Differentialgleichungen

Vorlesung

Reiner Lauterbach

$$\boxed{\Delta u = f}$$

Universität Hamburg, WS 2010/11

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Partielle Differentialgleichungen treten sowohl innerhalb der mathematischen Theorie an vielen Stellen, wie auch in Anwendungen aus allen Bereichen der Wissenschaft auf. In dieser Vorlesung stehen weder die Anwendungen innerhalb noch außerhalb im Zentrum des Interesses. Wir wenden uns der Theorie partieller Differentialgleichungen zu und werden einige wichtige moderne Aspekte behandeln. Vollständigkeit ist dabei nicht das Ziel, dies wäre utopisch: diese Theorie hat sich über viele Jahrhunderte entwickelt und wird weltweit von einer großen Anzahl von Mathematikern weiter entwickelt. Daher soll unser Ziel sein einen Einstieg zu finden in die Theorie, ein Einstieg der es möglich machen soll selbst weiter zu arbeiten.
In den Anwendungen gibt es einen ganzen Zoo von Gleichungen, die mit verschiedensten Namen verbunden sind. Wir wollen im ersten Teil einige wenige von diesen Namen kennen lernen um grundlegende Phänomene zu studieren. Dann soll aber eine systematische Entwicklung eines Teiles der Theorie partieller Differentialgleichungen erfolgen. Im Anhang wird u.a. eine Liste von Gleichungen mit Kontext und üblicher Bezeichnung gegeben. Diese richtig einzuordnen kann erst geleistet werden, wenn man typische Phänomene und auch einige der Schwierigkeiten kennt.

In den Übungen werden wir uns mit einigen Beispielen partieller Differentialgleichungen beschäftigen, auch mit Darstellungsformeln für Lösungen wichtiger Gleichungstypen. Es zeigt sich, dass die Kenntnis von Lösungsdarstellungen auch im Kontext abstrakterer Methoden sinnvoll ist. Daher werden wir neben der Entwicklung einer, an manchen Stellen durchaus abstrakten Theorie, uns immer wieder mit konkreten Gleichungen befassen.

Diese Vorlesung baut auf einigen früheren Vorlesungen, die ich an der Universität Augsburg, der Freien Universität Berlin und hier an der Universität Hamburg gehalten habe, auf. Ich hoffe es stellt in manchen Punkten eine Verbesserung gegenüber den früheren Versionen dar. Ich danke allen Hörern und

Mitarbeitern die durch Fragen und Anmerkungen diese Vorlesung mitgestaltet haben. Hervorgehoben seien Dr. Christian Leis, der eine frühere Vorlesung an der FU Berlin begleitet hat und der auch die damaligen Übungsaufgaben mitgestaltet hat und Dr. Henning Bruhn, der eine Vorgängerversion kritisch gehört und gelesen hat und durch eine Vielzahl von Anmerkungen und Verbesserungsvorschlägen nachfolgende Versionen sehr beeinflusst hat.
Es gibt eine Reihe sehr guter Bücher zu diesem Thema, ich will hier einige erwähnen und auch auf geeignete weiterführende Literatur zu verschiedenen Themenbereichen hinweisen. Einige empfehlenswerte Lehrbücher sind: JOST [15], EVANS [7], FRIEDMAN, [9, 8], STRAUSS [19], das es auch in deutscher Übersetzung gibt, GILBARG & TRUDINGER [10], TAYLOR [20]. In der Vorbereitung habe ich vor allem mit den Werken von Friedman und von Gilbarg und Trudinger gearbeitet, so dass diese wohl der gewählten Darstellung am ehesten entsprechen. Im letzten Kapitel folgt die Darstellung der Theorie von Halbgruppen teilweise Kato [16], daneben wird auch das wichtige Werk von Henry [12] benutzt. Wir werden an den entsprechenden Stellen darauf verweisen.
Erforderliche Vorkenntnisse sind natürlich die Vorlesungen Analysis I-II, die Höhere Analysis und die Lineare Algebra I-II, wobei insbesondere die Höhere Analysis von zentraler Bedeutung ist. Ich werde einige Elemente der Funktionalanalysis hier ansprechen, setze aber weitgehend Grundkenntnisse in Funktionalanalysis voraus. Sie können diese entweder in meinem Skript aus dem vorigen Semester oder auch in einem der zahlreichen Werke nachlesen, erwähnen will ich Alt [3], Werner [22], Rudin [17], T. Kato [16] und Yosida [23]. An einigen Stellen ist das Buch von Adams [2] eine gute Ergänzung zur Vorlesung, allerdings werden alle benötigten Aspekte hier behandelt werden. An manchen Stellen werden elementare Kenntnisse aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt. Dies sind im wesentlichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Man findet dies in jedem Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen, siehe z.B. Amann [4], Arnol'd [5] und Heuser [13].
An einer Stelle werden wir die Elemente aus der Theorie von Fourierreihen benötigen, eine sehr schöne und geeignete Präsentation findet sich im Buch von Dym und McKean [6] oder im dem grundlegenden Werk über reelle Analysis von Hewitt und Stromberg [14]. Für die historischen Anmerkungen wurden folgende Quellen genutzt:

1. Die Internetseite von St. Andrews College:
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Indexes/HistoryTopics.html

2. Die Brockhaus Enzyklopädie [1]

3. Lexikon bedeutender Mathematiker [11]