Kapitel 3

Sobolev–Räume

Sobolev-Räume sind das zentrale Hilfsmittel der modernen Theorie elliptischer Gleichungen. Man schwächt den Differenzierbarkeitsbegriff und damit den Lösungsbegriff ab, zeigt Existenz und Eindeutigkeit für den modifizierten Lösungsbegriff und zeigt nachträglich für geeignete Probleme, dass die neuen Lösungen auch klassiche Lösungen sind. Dafür werden einige funktionalanalytische Grundlagen benötigt. Wir stellen hier die wesentlichen Begriffe zusammen, für die Beweise verweisen wir auf mein Skript über Funktionalanalysis [17], sowie auf die Werke von Gilbarg und Trudinger [10] und Adams [2].

Inhaltsangabe

3.1 Schwache Ableitungen

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mit $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der reellwertigen C^∞–Funktionen mit kompaktem Träger. Wie üblich steht $L^p(\Omega)$ für den Raum der Funktionen, deren Betrag zur p–ten Potenz integrierbar ist, mit der üblichen Norm, welche wir mit $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ bezeichnen. $L^1_{loc}(\Omega)$ steht für den Raum aller messbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$, so dass $u \in L^1(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wir nennen diesen Raum den *Raum der lokal integrierbaren Funktionen.*

Definition 3.1.1
Es sei u eine lokal integrierbare Funktion auf Ω.
(a) Die lokal integrierbare Funktion v heißt die schwache Ableitung *von u nach x_i, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v\varphi dx.$$

(b) Ist α ein Multiindex, v lokal integrierbar, so sagen wir $v = D^\alpha u$ im schwachen Sinn, *falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi dx.$$

Aufgabe 3.1.2
Man zeige, dass eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m$ schwache Ableitungen $D^\alpha u$ besitzt und dass diese mit den klassischen Ableitungen zusammen fallen.

Lemma 3.1.3
Besitzt die lokal integrierbare Funktion u eine schwache Ableitung $D^\alpha u$ und $D^\alpha u$ wiederum eine schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$, so hat u auch eine schwache Ableitung der Form $D^{\alpha+\beta}u$ und es gilt $D^{\alpha+\beta}u = D^\beta(D^\alpha u)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann folgt

$$\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega (D^\alpha u)\,\varphi dx$$

Ist $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und schreiben wir $D^\beta\psi = \varphi$, so folgt

$$\int\limits_\Omega (D^\alpha u)\,\varphi dx = \int\limits_\Omega (D^\alpha u)\left(D^\beta\psi\right)dx = (-1)^{|\beta|}\int\limits_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi dx$$

und insgesamt

$$\int\limits_\Omega uD^{\alpha+\beta}\psi dx = (-1)^{|\alpha+\beta|}\int\limits_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi dx$$

□

Definition 3.1.4
Mit $W^{m,p}(\Omega)$ werde für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ der Raum

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \; \exists v \in L^p(\Omega), \textit{ so dass } v = D^\alpha u\}$$

bezeichnet. $W^{m,p}(\Omega)$ heißt Sobolevraum[1].

Satz 3.1.5

1. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum mit Norm*
$$\|u\|^{\Omega}_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1}$$
(Für $p = \infty$ betrachtet man die Summe der L^∞-Normen). Für $p < \infty$ ist dieser Banachraum separabel.

2. *Für $p \in (1, \infty)$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ reflexiv.*

3. *Für $p = 2$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Hilbertraum. Dieser wird mit $H^m(\Omega)$ bezeichnet.*

Beweis. Der Beweis ist sehr einfach, wir werden in den Übungen darüber sprechen.

□

3.2 Approximation durch glatte Funktionen

Definition 3.2.1
Eine Glättungsfunktion (engl. mollifier) *ist eine Funktion $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit*

1. *$\rho = 0$ außerhalb $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.*

2. *$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.*

[1] Sergej Lwowitsch Sobolev (6.10.1908–3.1.1989) erkannte aufgrund von physikalischen Überlegungen, dass es sinnvoll ist den Lösungsbegriff für partielle Differentialgleichungen abzuschwächen. Später konnte er diese verallgmeinerten Lösungen als Funktionale interpretieren und schuf damit die Grundlage der Theorie der Distributionen. Er war damit der Wegbereiter für den Gebrauch funktionalanalytischer Methoden in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Diese sind heute auch aus der Numerik partieller Differentialgleichungen nicht mehr wegzudenken. Auch für diese Entwicklungen legte er den Grundstein in einer Arbeit mit W. I. Smirnow.

3. $\rho \geq 0$.

Beispiel 3.2.2

$$\rho_c(x) = \begin{cases} ce^{-\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Glättungsfunktion, falls $c > 0$ *so gewählt wird, dass*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_c(x)dx = 1.$$

Definition 3.2.3
Für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h > 0$ *und eine Glättungsfunktion* ρ *ist*

$$(J_h u)(x) = \frac{1}{h^n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy$$

die Regularisierung *von* u. *Diese ist für alle* $x \in \Omega$ *mit*

$$h < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

definiert.

Bemerkung 3.2.4
Für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ *ist* $u_h = J_h u \in C^\infty(\Omega')$, *sofern* $h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Lemma 3.2.5
Ist $u \in C(\Omega)$, *so konvergiert* $u_h \to u$ *gleichmäßig auf jedem Kompaktum* $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis. Findet man in den oben angegebenen Literaturstellen.

□

Lemma 3.2.6
Es sei $1 \leq p < \infty$. *Ist* $u \in L^p(\Omega)$ *oder* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, *so konvergiert* u_h *für* $h \to 0$ *gegen* u *im Sinne der Konvergenz in* $L^p(\Omega)$ *beziehungsweise in* $L^p_{loc}(\Omega)$.

(Konvergenz in $L^p_{loc}(\Omega)$ bedeutet

$$u_m \stackrel{L^p_{loc}(\Omega)}{\longrightarrow} u \Longleftrightarrow u_m \stackrel{L^p(\Omega')}{\longrightarrow} u \;\forall\, \Omega' \subset\subset \Omega.)$$

Beweis. Siehe die Literatur über Funktionalanalysis. □

Satz 3.2.7
Es seien $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $v = D^\alpha u$. Dann konvergiert u_h gegen u und $D^\alpha(u_h)$ gegen v in Sinne der Konvergenz von $L^p_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Siehe Funktionalanalysisliteratur. □

Definition 3.2.8
Seien $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Mit $\hat{C}^{m,p}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilmenge mit

$$\|u\|^{\Omega}_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Bemerkung 3.2.9
$\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist ein normierter linearer Raum, der jedoch nicht *vollständig ist.*

Satz 3.2.10 (Meyers[2] und Serrin[3](1964))
Die Vervollständigung von $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\| \cdot \|^{\Omega}_{m,p}$ ist $W^{m,p}(\Omega)$.

Bemerkung 3.2.11
$W^{m,p}_0(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. Ist Ω beschränkt, so ist

$$W^{m,p}_0(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)!$$

3.3 Sobolev-Ungleichungen

Wir beginnen mit einem wichtigen Spezialfall, der uns an vielen Stellen ausreichen wird. Die Beweise der stärkeren Formen der Sobolev-Ungleichungen sind sehr technisch und sind der Vollständigkeit halber hier angegeben.

[2] N. G. Meyers ist Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Seine Arbeiten betreffen vornehmlich elliptische Differentialgleichungen.

[3] James Serrin ist emeritierter Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Er hat Arbeiten zu vielen Aspekten partieller Differentialgleichungen und deren Anwendungen speziell in der Mechanik und Hydrodynamik geschrieben. Er war für viele Jahre einer der Herausgeber des Archive for rational mechanics and analysis, einer der führenden Zeitschriften auf diesem Gebiet.

Satz 3.3.1
Es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\Omega)$, die nur vom Gebiet Ω abhängt, so dass für alle Funktionen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ gilt:

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \le C \int\limits_\Omega \|\nabla u\|^p \, dx. \tag{3.2}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für Funktionen in $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Der allgemeine Fall folgt dann aus der Dichtheit dieser Funktionen und der Stetigkeit der Normen, bzw. des Integrales. Der Induktionsanfang besteht darin eine Funktion $u \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R})$ zu betrachten. Wir wählen einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $u(x_0) = 0$ und schreiben

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} u'(s) \, ds.$$

Insbesondere folgt dann

$$|u(x)| \le \int\limits_{x_0}^{x} |u'(s)| \, ds \le \int\limits_a^b |u'(s)| \, ds$$

Für $p = 1$ folgt nun

$$\int\limits_a^b |u(x)| \, dx \le \int\limits_a^b |u'(s)| \, ds(b - a).$$

Im allgemeinen Fall benötigen wir die Höldersche Ungleichung. Nun ist wegen der Beschränktheit des Intervalls die Funktion $1 \in L^q((a, b))$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und es gilt

$$\int\limits_a^b |u| \, dx = \int\limits_a^b |u| 1 \, dx \le \|u\|_{L^p} \|1\|_{L^q}.$$

Insbesondere ist

$$\left(\int\limits_a^b |u| \, dx \right)^p \le \int\limits_a^b |u|^p \, dx \|1\|^p_{L^q}.$$

Dann ist wie oben

$$|u(x)|^p \leq \left(\int_a^b |u'(s)| \, ds \right)^p$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b |u|^p \, dx &\leq \left(\int_a^b |u'(s)| \, ds \right)^p (b-a) \\ &\leq \int_a^b |u'(s)|^p \, ds \;\; \|1\|_{L^q}^p (b-a). \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|u'\|_{L^p} \|1\|_{L^q} (b-a)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u'\|_{L^p} (b-a)^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u'\|_{L^p} (b-a). \end{aligned}$$

Sei nun zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

mit $\Omega \subset\subset Q$ gewählt und $u \in C_0^\infty(\Omega)$ durch Null auf Q fortgesetzt. Integriere nun die Ungleichung

$$\int_{a_1}^{b_1} |u|^p \, dx_1 \leq (b-a)^p \int_{a_1}^{b_1} |\partial_{x_1} u(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \, dx_1$$

bezüglich $x_2, \ldots, x_n$ über $[a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Dies ergibt

$$\int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} |u(x)|^p \, dx_1 \ldots \, dx_n \leq (b-a)^p \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} |\partial_{x_1} u(x)|^p \, dx_1 \ldots \, dx_n.$$

Dies impliziert

$$\int_Q |u|^p \, dx \leq (b_1 - a_1) \int_Q \|\nabla u\|^p \, dx.$$

□

Definition 3.3.2
Die Ungleichung (3.2) wird als Poincaréungleichung[4] *bezeichnet.*

Bemerkung 3.3.3
Die Bedeutung der Poincaréungleichung liegt darin, dass der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ aufgrund der Poincaré-Ungleichung eine zur üblichen Norm äquivalente Norm besitzt, in der nur die Ableitungen auftreten. Dies ist für viele Schlüsse ein zentraler Gedanke.

Satz 3.3.4
Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ von der Klasse C^2, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, p, m)$ und zu jedem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Konstante $C = C(\Omega, m, p, \varepsilon)$, so dass für alle $u \in C^m(\overline{\Omega})$ die Sobolevsche Ungleichung *gilt*

$$\|u\|_{m-1,p}^{\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p}^{\Omega} + C\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus: $\exists \varepsilon_0(i) > 0$: $\forall \varepsilon < \varepsilon_0(i)$ $\exists C = C(p, i, \Omega, \varepsilon)$ mit

$$\sum_{|\alpha|=i} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=i+1} \int_\Omega |D^\beta u|^p \, dx + C \int_\Omega |u|^p \, dx \tag{3.3}$$

mit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $C = C(p, i, \Omega, \varepsilon)$ und $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Denn mit der Bezeichnung $|D^i u|^p = \sum_{|\alpha|=i} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx$ gilt für $\varepsilon_0 = \min_{i=1,\ldots,m-1}(\varepsilon_0(i))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und $C = \max_{i=1,\ldots,m-1}(C(i))$

$$\begin{aligned} \|u\|_{m-1,p}^p = \sum_{i=0}^{m-1} |D^i u|^p &\leq |D^0 u|^p + \sum_{i=1}^{m-1} (\varepsilon |D^{i+1} u|^p + C|D^0 u|^p) \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{m,p}^p + ((m-1)C + 1)\|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

[4]Jules Henri Poincaré (29.4.1854-17.7.1912) war ein Zeitgenosse Hilberts und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie auch des Jahrhunderts. Er führte topologische Methoden bei der Untersuchung analytischer Probleme ein und wurde damit auch zu einem Mitbegründer der algebraischen Topologie.

Mit dem üblichen 2^p-Trick und einer Neuanpassung der Konstanten bekommt man nun die Behauptung.

Wir beweisen die Abschätzung (3.3) durch vollständige Induktion und beginnen mit dem Fall $i = 1, m = 2, n = 1$. Sei $0 < \varepsilon < 2^p|\Omega|^p$, wobei hier $|\Omega|$ die Intervallänge ist. Wir unterteilen Ω in Intervalle der Länge

$$L \in [\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \varepsilon^{\frac{1}{p}}].$$

Sei (a, b) eines dieser Teilintervalle. Setze $\alpha = \frac{b-a}{4}$. Wähle Punkte $x_1 \in (a, a + \alpha)$, $x_2 \in (b - \alpha, b)$. Für ein $x_{12} \in (x_1, x_2)$ gilt

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = Du(x_{12}).$$

Es gilt

$$Du(x) = Du(x_{12}) + \int_{x_{12}}^{x} D^2u(\xi)d\xi.$$

Daraus folgt nun

$$|Du(x)| \leq \frac{|u(x_1)| + |u(x_2)|}{2\alpha} + \int_a^b |D^2u(\xi)|d\xi.$$

Integration dieser Ungleichung über $x_1 \in (a, a + \alpha)$, $x_2 \in (b - \alpha, b)$ ergibt

$$\alpha^2|Du(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |u(\xi)|d\xi + \alpha^2\int_a^b |D^2u(\xi)|d\xi.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir durch Potenzieren

$$|Du(x)|^p \leq \frac{c}{\alpha^{p+1}}\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi + c\alpha^{p-1}\int_a^b |D^2u(\xi)|^p d\xi \tag{3.4}$$

mit $c = c(p)$. Man beachte dazu, dass wegen

$$\int_a^b 1|u(\xi)|d\xi \leq \left(\int_a^b 1^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \leq (4\alpha)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

und einer entsprechenden Abschätzung für $\int_a^b |D^2u|dx$ gilt

$$\begin{aligned}
\alpha^{2p}|Du(x)|^p &\leq 2^p\left(\int\limits_a^b |u(\xi)|d\xi\right)^p + 2^p\alpha^{2p}\left(\int\limits_a^b |D^2u(\xi)|d\xi\right)^p \\
&\leq 2^{p(1+\frac{2}{q})}\alpha^{\frac{p}{q}}\int\limits_a^b |u(\xi)|^p d\xi + 2^{p(1+\frac{2}{q})}\alpha^{\frac{p}{q}}\alpha^{2p}\int\limits_a^b |D^2u(\xi)|^p d\xi.
\end{aligned}$$

Aus der Bedingung $p^{-1}+q^{-1}=1$ schließt man (3.4). Wir integrieren nun (3.4) bezüglich x und erhalten

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b |Du(x)|^p dx &\leq \frac{c}{\alpha^p}\int\limits_a^b |u(x)|^p dx + c\alpha^p\int\limits_a^b |D^2u(x)|^p dx \\
&\leq \frac{c'}{\varepsilon}\int\limits_a^b |u(x)|^p dx + c'\varepsilon\int\limits_a^b |D^2u(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

Aufaddieren über alle Teilintervalle ergibt das Teilergebnis. Hier, wie im folgenden bedeuten gleiche Konstanten nicht notwendig das gleiche, hängen aber von den gleichen Größen ab. Im Regelfall kann man alle gleichen Konstanten durch die jeweils Größte ersetzen. Verschiedene Konstanten werden eingeführt um den Überblick zu behalten, in welcher Reihenfolge neue Konstanten eingeführt werden müssen.

Der nächste Schritt besteht darin, Würfel mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen zu betrachten. Im wesentlichen wird dabei der gleiche Trick wiederholt, d.h. wir betrachten Würfel $Q=[a_1,b_1]\times\ldots[a_i,b_i]\ldots[a_n,b_n]$ der Kantenlänge L, wie im ersten Schritt. Dann ergibt sich für einen solchen Würfel und eine Koordinatenparallele $x^i=(x_1^0,\ldots,x_i,\ldots,x_n^0)$, wobei x_i in einem Intervall der Länge L variiert

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} |D_iu(x^i)|^p dx_i \leq \varepsilon\int\limits_{a_i}^{b_i} |D_{ii}u(x^i)|^p dx_i + \frac{c'}{\varepsilon}\int\limits_{a_i}^{b_i} |u(x^i)|^p dx_i.$$

Integration bezüglich der anderen Variablen x_j, $j \neq i$ ergibt

$$\int_Q |D_i u|^p dx \leq c'\varepsilon \int_Q |D_{ii} u|^p dx + \frac{c'}{\varepsilon} \int_Q |u|^p dx.$$

Addition der entsprechenden Ausdrücke für die verschiedenen Ableitungen $D_i u$ und aufaddieren über die Würfel Q, ergibt die Gleichung (3.3).

Im folgenden schreiben wir $|D^k u|^p$ für $\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p$. Der Rest ist eine Induktion über m: für $m = 2$ ist die Behauptung gezeigt für $i = 1$ (trivial für $i = 0$). Angenommen die Gleichung ist wahr für $m = 2, \ldots, j$.

Sei $k = m$ und $i = k - 1$. Wir wenden obiges Resultat für $i = 1,\ m = 2$ auf die $(k-1)$–ste Ableitung an und erhalten (mit $\varepsilon/2$ statt ε)

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_1}{\varepsilon} |D^{k-1} u|^p dx.$$

Die Induktionsvoraussetzung für $k = m,\ i = k - 1$ ergibt nun

$$\int_\Omega |D^{k-1} u|^p dx \leq \delta \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_2}{\delta^{k-1}} \int_\Omega |u|^p dx$$

Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{2C_1}$. Damit erhalten wir

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{C_2}{\varepsilon^{k-1}} (2C_1)^{k-1} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Alles in allem wird dies zu

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \varepsilon \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{\tilde{C}_1}{\varepsilon^k} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Dies ist die Behauptung für $m = k + 1, i = k$.

Als nächstes wollen wir den Induktionsschritt $(i, k) \to (i, k{+}1)$ durchführen. Wir schreiben die Behauptung für $i = k, m = k + 1$ als

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \mu \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_4}{\mu^k} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Dies ergibt mit der Induktionsannahme für allgemeines (i,k)

$$\int\limits_\Omega |D^i|^p \, dx \leq \delta \int\limits_\Omega |D^k u|^p \, dx + \frac{C_3}{\delta^{\frac{i}{k-i}}} \int\limits_\Omega |u|^p \, dx \tag{3.5}$$

$$\int\limits_\Omega |D^i u|^p \, dx \leq \delta\mu \int\limits_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_4 \delta}{\mu^k} \int\limits_\Omega |u|^p \, dx + \frac{C_3}{\delta^{i/(k-i)}} \int\limits_\Omega |u|^p \, dx.$$

Mit der Wahl

$$\delta = \varepsilon^{\frac{k-i}{k+1-i}}, \qquad \mu = \varepsilon^{\frac{1}{k+1-i}}$$

ergibt sich $\delta\mu = \varepsilon$ und $\mu^k = \varepsilon^{\frac{k}{k+1-i}}$, $\delta^{\frac{i}{k-i}} = \varepsilon^{\frac{i}{k+1-i}}$. Ist $m = k+1$ folgt daher $\mu^k = \delta^{\frac{i}{m-i}}$. Damit hat man die Behauptung für i, $m = k+1$. □

Definition 3.3.5

1. *Der* Standardkegel *mit Öffnung* $\rho > 0$ *im* $\mathbb{R}^n$ *ist die Teilmenge*

$$K_\rho^S = \{tx \mid x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), \|x'\| < \rho, x_n = 1\}.$$

2. *Der Standardkegel mit Öffnung* ρ *und Höhe* $h > 0$ *ist*

$$K_{\rho,h}^S = K_\rho^S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < h\}.$$

3. *Jedes Bild* $K_{\rho,h} = f(K_{\rho,h}^S)$, *wobei* $f(x) = Ax + b, A \in \mathbf{O}(n), b \in \mathbb{R}^n$, *heißt Kegel mit Öffnung* ρ *und Höhe* h. *Dabei wird* b *die Spitze von* $K_{\rho,h}$ *genannt.*

Definition 3.3.6

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt eine (gleichmäßige) Kegelbedingung mit Kegelkonstanten $\rho > 0$, $h > 0$, *falls zu jedem Punkt* $x \in \Omega$ *ein Kegel* $K_{\rho,h}$ *mit Spitze in* x *existiert, so dass* $K_{\rho,h} \subset \Omega$.

Satz 3.3.7 (Einbettungssatz)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet, welches einer Kegelbedingung mit Konstanten* $\rho, h > 0$ *genüge. Ist* $u \in C^m(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, $m > \frac{n}{p}$, *so gibt es eine Konstante* $C = C(\rho, h, n, p)$ *mit*

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \|u\|_{m,p}^\Omega.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für $p > 1$, für $p = 1$ muss man den Beweis geringfügig modifizieren. Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 1 \\ 1 & t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für festes $x \in \Omega$ führen wir im $K_{\rho,h}$ mit Spitze x Polarkoordinaten $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ um x ein. Mit diesen gilt

$$u(x) = -\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr. \tag{3.6}$$

Man beachte, dass die Stammfunktion von $\frac{\partial}{\partial r}\left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r,\theta)\right)$ für $r = 0$ den Wert $u(0, \theta) = u(x)$ und für $r = 1$ den Wert 0 hat. Integration der Gleichung (3.6) führt auf

$$u(x) = -\frac{1}{\mu(S_\rho)} \int_{S_\rho} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr\, d\theta.$$

Dabei bezeichnet $S_\rho \subset (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$ die Menge der Winkel, so dass (r, θ) in dem Kegel $K_{\rho,h}$ liegt. Mehrmaliges Anwenden partieller Integration der Form

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr = -\int_0^h r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr$$

führt auf

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!\mu(S_\rho)} \int_{S_\rho} \int_0^h r^{m-1} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr\, d\theta.$$

Mit $r^{m-1} = r^{m-n} r^{n-1}$, $r^{n-1} d\theta\, dr = dV$ und der Hölderschen Ungleichung schätzt man ab

$$|u(x)| \leq C \left(\int_{K_{\rho,h}} \left| \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) \right|^p dV \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Um die Höldersche Ungleichung anwenden zu können muss r^{m-n} in $L^q(K_{\rho,h})$ sein, $q = p/(p-1)$. Betrachte

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K_{\rho,h}} r^{(m-n)q}\,dx &= \int\limits_{K_{\rho,h}} r^{(m-n)\frac{p}{p-1}}\,dx \\
&= \int\limits_{S_\rho}\int\limits_0^h r^{n-1} r^{(m-n)\frac{p}{p-1}}\,dr\,d\theta \\
&= \mu(S_\rho)\int\limits_0^h r^{\frac{(m-n)p+(n-1)(p-1)}{p-1}}\,dr.
\end{aligned}$$

Der Exponent hat die Form

$$\frac{mp-p-n+1}{p-1} = \frac{mp-n}{p-1} - 1 > -1.$$

Aus der obigen Beziehung folgt die Behauptung unmittelbar. □

Satz 3.3.8
Sei $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $r > n$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^{1-n/r}} \le C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Setze $d = \|x-y\|$, $S_x = B_d(x)$, $S = S_x \cap S_y$. Integration der Dreiecksungleichung liefert die Abschätzung

$$|u(x)-u(y)|\mu(S) \le \int\limits_S |u(x)-u(z)|dz + \int\limits_S |u(z)-u(y)|dz.$$

Wir erhalten eine obere Abschätzung, indem wir das erste Integral über S_x und das zweite über S_y auswerten. Wir schreiben $z(s) = x + s\frac{z-x}{\|z-x\|}$. Dann ist mit $\rho = \|z-x\|$

$$u(z)-u(x) = \int\limits_0^\rho \frac{\partial}{\partial s} u(z(s))ds.$$

Also folgt

$$\int_{S_x} |u(x) - u(z)| dz \leq \int_{S_x} \int_0^\rho \left| \frac{\partial}{\partial s} u(z(s)) \right| ds dz.$$

Mit Polarkoordinaten (r, θ) um x kann dies wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}
\int_{S_x} \left(\int_0^\rho \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| ds \right) \rho^{n-1} d\theta d\rho &\leq d^{n-1} \int_{S_x} \left(\int_0^\rho \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| ds \right) d\theta d\rho \\
&\leq d^{n-1} \int_{S_x} \left(\int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| ds \right) d\theta d\rho \\
&\leq C d^n \int_{S_x} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right| \frac{dz}{\rho^{n-1}} \\
&\leq C d^n \left(\int_{S_x} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^r dz \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{S_x} \rho^{\frac{(1-n)r}{r-1}} dz \right)^{\frac{r-1}{r}}.
\end{aligned}$$

Die gleiche Abschätzung für das zweite Integral ergibt

$$|u(x) - u(y)| \mu(S) \leq c d^{n+1-n/r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |D_i u|^r dz \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Da $\mu(S)$ proportional zu d^n ist, folgt die Behauptung nach Division durch $\mu(S)$. □

3.4 Einbettungssätze

Satz 3.4.1 (Sobolevscher Einbettungssatz)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das einer Kegelbedingung mit Kegelkonstanten ρ, h genüge. Falls $u \in W^{j,p}(\Omega)$, $j > m + \frac{n}{p}$, so gibt es einen Repräsentanten von u in $C^m(\Omega)$.

Beweis. $\hat{C}^{j,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{j,p}(\Omega)$. Es sei $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \hat{C}^{j,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|^{\Omega}_{j,p}$. Für α mit $0 \le |\alpha| \le m$ gilt mit Satz 3.3.7 angewendet auf $D^\alpha u \in W^{j-|\alpha|,p}(\Omega)$

$$\sup_\Omega |D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu| \to 0 \text{ mit } \nu, \mu \to \infty.$$

Damit ist $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = \tilde{u} \in C^m(\Omega)$. □

Definition 3.4.2

1. *Es seien X, Y Banachräume. Wir sagen, der Banachraum X ist* beschränkt in den Banachraum Y eingebettet, *wenn $X \subset Y$ und die Abbildung $T : X \to Y : x \mapsto x$ beschränkt ist. T wird die* Einbettungsabbildung *genannt. Wir schreiben $X \stackrel{\subset}{\to} Y$.*

2. *Die Einbettung heißt* kompakt, *wenn die Einbettungsabbildung kompakt ist ($X \stackrel{\subset\subset}{\to} Y$).*

Korollar 3.4.3
Mit der Bezeichnung $C^m_*(\Omega)$ für den Unterraum von $C^m(\Omega)$ von Funktionen, für die gilt

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)| < \infty,$$

hat man für $j > m + \frac{n}{p}$ eine beschränkte Einbettung $W^{j,p}(\Omega) \to C^m_*(\Omega)$. (Beachte, $\|\cdot\|_m$ macht $C^m_*(\Omega)$ zum Banachraum.)

Lemma 3.4.4 (Verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung)
Es seien $p_1, \dots, p_\ell > 1$ und $\sum p_i^{-1} = 1$, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^{\ell} f_i \in L^1(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega |\prod_{i=1}^{\ell} f_i| dx \le \prod_{i=1}^{\ell} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

Beweis. Übung! □

Satz 3.4.5
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) & p < n \\ C(\overline{\Omega}) & p > n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Außerdem existieren Konstanten $C = C(n,p)$ mit

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \le C\|Du\|_{L^p(\Omega)} & p < n \\ \sup_\Omega |u(x)| \le C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} & p > n. \end{cases} \tag{3.8}$$

Beweis. Wir beweisen dies für Funktionen $u \in C_0^1(\Omega)$ und führen dann die gleichen Grenzübergänge wie oben durch. Für $u \in C_0^1(\Omega)$ und $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$|u(x)| \le \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \tag{3.9}$$

und daher

$$|u(x)|^n \le \prod_{i=1}^n \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i. \tag{3.10}$$

Wir beweisen den Satz zunächst für $p = 1$. Betrachte also

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \left(\prod_{i=1}^n \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{3.11}$$

Wir wollen das Integral

$$\int_\Omega |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx$$

abschätzen. Es gilt

$$\int_\Omega |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \dots dx_n.$$

Wir nutzen dies zur iterativen Berechnung (per Induktion) aus:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{konstant bzgl. } x_1} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \underbrace{\left(\int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\in L^{n-1}(\mathbb{R})} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung verwendet.

Dies war der erste Schritt in der Induktion. Wir nehmen nun an, nach j Schritten (für $j \in \{1, \ldots, n\}$) sei gezeigt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \ldots dx_j \leq & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_j \ldots dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_j \ldots dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \left(\prod_{i=j+1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_j \ldots dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Nun erhält man durch Integration bezüglich x_{j+1}

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1\dots dx_j dx_{j+1} \le \int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\bigg(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}|D_ju|dx_1\dots dx_j\bigg)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$
\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^{j-1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_i u|dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \left.\left(\prod_{i=j+1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty}|D_i u|dx_i dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_{j+1} \\
\leq \; & \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}|D_j u|dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right. \\
& \left(\prod_{i=1}^{j-1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_i u|dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_{j+1}u|dx_{j+1}dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{konstant bez. } x_{j+1}} \\
& \left.\left(\prod_{i=j+2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty}|D_i u|dx_i dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_{j+1} \\
\leq \; & \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|D_{j+1}u|dx_1\dots dx_{j+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|D_i u|dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right. \\
& \left.\prod_{i=j+2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty}|D_i u|dx_i dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_{j+1}.
\end{aligned}
$$

Eine erneute Anwendung der verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung ergibt (3.12) für $j+1$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left(\prod_{i=1}^n \int\limits_\Omega |D_i u| dx\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \frac{1}{n}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |D_i u| dx \text{ (geom. Mittel} \leq \text{arith. Mittel)} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|Du\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die weiteren Fälle bekommt man durch Betrachten von Potenzen von u. Ist $\gamma > 1$, so gilt

$$\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-1}|Du| dx \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)} \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad (3.13)$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ist. Wähle γ so, dass

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}, \text{ d.h. } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p} \quad (p < n). \quad (3.14)$$

Wegen (3.13) hat man die Abschätzung

$$Q = \frac{\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)}}{\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für den Zähler von Q ergibt sich

$$\begin{aligned}
\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} &= \left(\int\limits_\Omega |u|^{\gamma\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \left(\int\limits_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\right)^{\frac{n-1}{n}}
\end{aligned}$$

und für den Nenner

$$\left.\begin{aligned} \||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)p'}\right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\right)^{1/p'}. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Also hat man für Q wegen $\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'} = \frac{n-p}{np}$ die Gleichung

$$Q = \left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\right)^{\frac{n-1}{n}-\frac{1}{p'}} = \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)}.$$

Wir bemerken zum Fall $p > n$ zunächst, dass für Gebiete, die einer Kegelbedingung genügen, bereits aus Satz 3.3.7 die stetige Einbettung von $W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $C(\overline{\Omega})$ folgt. Hier geht es darum, eine vergleichbare Behauptung ohne Kegelbedingung (aber für $W_0^{1,p}(\Omega)$-Gebiete zu zeigen. Für Gebiete mit Kegelbedingung folgt die Form der Abschätzung auch aus dem Beweis von Satz 3.3.7. Wir kommen zum Beweis im allgemeinen Fall. Es sei $p > n$. Wir definieren für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine neue Funktion

$$v = \sqrt{n}\frac{|u|}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Ferner setzen wir voraus, dass $|\Omega| = 1$ ist. Dann gilt

$$\|v^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} \le \gamma\|v^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

mit

$$n' = \frac{n}{n-1}, \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

und $p' < n'$ und $\gamma > 1$ wie oben, denn aus dem ersten Teil des Beweises folgt dann

$$\begin{aligned}
\|v^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} &\leq \left(\frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}\right)^\gamma \||u|^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} \\
&\leq \gamma\sqrt{n}^{\gamma-1}\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}\frac{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}{\|Du\|^\gamma_{L^p(\Omega)}} \\
&\leq \gamma\sqrt{n}^{\gamma-1}\frac{\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}}{\|Du\|^{\gamma-1}_{L^p(\Omega}} \\
&= \gamma\|v^\gamma\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\|v\|_{L^{\gamma n'}(\Omega)} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\|v\|^{1-\frac{1}{\gamma}}_{L^{(\gamma-1)p'}(\Omega)}.$$

Die rechte Seite wird wegen $|\Omega| = 1$ durch

$$\gamma^{\frac{1}{\gamma}}\|v\|^{1-\frac{1}{\gamma}}_{L^{\gamma p'}(\Omega)}$$

nach oben abgeschätzt. Sei $\delta = \frac{n'}{p'} > 1$ und $\gamma = \delta^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$. Dies ergibt

$$\|v\|_{L^{n'\delta^\nu}(\Omega)} \leq \delta^{\nu\delta^{-\nu}}\|v\|^{1-\delta^{-\nu}}_{L^{n'\delta^{\nu-1}}(\Omega)},$$

wegen $\gamma p' = \delta^\nu p' = n'\delta^{\nu-1}$.
Setze zunächst $\nu = 1$ und erhalte eine Abschätzung

$$\|v\|_{L^{n'\delta^\nu}(\Omega)} \leq \delta^{\delta^{-1}}\|v\|^{1-\delta^{-1}}_{L^{n'}(\Omega)}.$$

Hier kann $\|v\|_{L^{n'}(\Omega)}$ durch

$$\|v\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}\|u\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}\|Du\|_{L^1(\Omega)}$$

unter Verwendung von 3.15 abgeschätzt werden. Aus

$$\frac{\|Du\|_{L^1(\Omega)}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \leq 1$$

erhält man für beliebiges ν

$$\|v\|_{L^{n'\delta^\nu}(\Omega)} \leq \delta^{\sum_\nu \nu\delta^{-\nu}}C = K,$$

für eine Konstante K. Man beachte die Iteration deren Anfang für $\nu = 2$ so aussieht

$$\|v\|_{L^{n'\delta^2}(\Omega)} \leq \delta^{2\delta^{-2}} \|v\|^{1-\delta^{-2}}_{L^{n'\delta}(\Omega)} \leq \delta^{2\delta^{-2}} \delta^{\delta^{-1}} \|v\|^{(1-\delta^{-1})(1-\delta^{-2})}_{L^{n'}(\Omega)}$$

Mit $\nu \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen $\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, also

$$\sup_\Omega v \leq \tilde{K}.$$

Damit ist

$$\sup_\Omega |u| \leq \frac{\tilde{K}}{\sqrt{n}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Durch eine Koordinatentransformation erhält man das Resultat auch für Gebiete mit $|\Omega| \neq 1$. $\square$