

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel machen wir einige einführende Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen. Danach betrachten einige Beispiele und zeigen daran Techniken, wie sie in der Theorie partieller Differentialgleichungen benötigt werden.

Inhaltsangabe

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Einführung | 2 |
| 1.2 | Die Wärmeleitungsgleichung | 4 |
| 1.3 | Die Wellengleichung | 8 |
| 1.4 | Navier-Stokes Gleichungen | 9 |
| 1.5 | Eine einfache Gleichung | 14 |
| 1.6 | Burgers Gleichung | 15 |
| 1.7 | Charakteristiken | 16 |
| 1.8 | Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung | 18 |
| 1.9 | Harmonische Funktionen | 21 |
| 1.10 | Die Poissonsche Gleichung | 23 |
| 1.11 | Das klassische Dirichlet-Problem | 28 |

1.1 Einführung

Nachdem Isaac Newton¹ und Gottfried Wilhelm Leibniz² unabhängig Theorien geschaffen hatten, die die Grundlage der Analysis geworden sind, hat Leonhard Euler³ die Bedeutung des Funktionsbegriffes erkannt und Gleichungen für Funktionen aufgeschrieben, vor allem um Probleme der realen Welt zu verstehen. Funktionen als eigenständige Größen aufzufassen, ebnete den Weg für neuartige und weitreichende Entwicklungen. So kann man damit Variationsprobleme formulieren. Joseph Louis Lagrange⁴ erkannte, dass die Bewegung eines Körpers die Energie minimiert. Damit kann man die Bewegung eines Körpers als Variationsproblem aufschreiben. Dies ist vergleichbar der Charakterisierung des Weges des Lichtes, wie sie schon von Pierre de

¹Isaac Newton (4.1.1643–31.3.1727) Berühmtester englischer Mathematiker, Physiker und Astronom, einer der wenigen Naturwissenschaftler, dem die Ehre zuteil wurde, in Westminster Abbey begraben zu werden, legte die Grundlagen des Verständnisses des Schwerkraft und damit der klassischen Mechanik, die er auf axiomatische Grundlagen stellte. Daneben hatte er als erster Einsicht in die Farbenlehre und begründete die moderne Optik. In der Mathematik war er einer der Wegbereiter der Differentialrechnung. Er erklärte Ebbe und Flut, vor allem auch den 12 stündigen Rhythmus und versuchte aus der Höhe der beobachteten Flut die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes des Erde/Mond Systems zu berechnen. In seinem Werk *Principia Mathematicae* wird dieser Schwerpunkt irrtümlich als außerhalb der Erde liegend angegeben.

²Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646–14.11.1716) war Philosoph, Mathematiker und Naturforscher. Seine Leistungen wurden nicht anerkannt. Er war einer der Begründer der Analysis und erzielte Erfolge bei der Summation von Reihen. Er erkannte, dass Differentiation und Integration sich umkehren und kannte Kettenregel und andere Differentiationsregeln. Auch er nutzte die neue Theorie, um Probleme der Realität zu lösen, u.a. Belastung eines Balkens. Die Entwicklung der Logik wurde durch seine Arbeiten begonnen.

³Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen. Die Herausgabe seines vollständigen Werkes ist bis heute nicht abgeschlossen. Er verbrachte längere Zeit an der Akademie der Wissenschaften in Potsdam und am Hofe der Zarin in St. Petersburg.

⁴Joseph Louis Lagrange (25.1.1736–10.4.1813) war Mathematiker, Physiker und Astronom. Er arbeitete zunächst über Variationsprobleme. Auf Einladung von Friedrich II verbrachte er 20 Jahre in Berlin und verfasste hier unter anderem sein Werk *Mécanique analytique*. Neben seinen Beiträgen zur Analysis (nach ihm sind eine Restgliedformel und der Multiplikator benannt) stammen auch algebraische Erkenntnisse von ihm.

Fermat⁵, gegeben wurde. Extremalprobleme in euklidischen Räumen werden durch Bedingungen an die Ableitung gelöst. Für Variationsprobleme übernehmen Funktionenräume die Rolle des euklidischen Raumes, die Bedingungen an die Ableitung führen auf partielle Differentialgleichungen. Damit hat man eine reiche Quelle verschiedenster partieller Differentialgleichungen. Wir werden darauf zurückkommen.

Partielle Differentialgleichungen sind, grob gesprochen, Gleichungen für Funktionen mehrerer Veränderlicher, in denen die Funktion und ihre partiellen Ableitungen vorkommen. Dabei lässt man i.a. nicht zu, dass die Funktion mit mehreren Argumenten (oder Integrale der Funktion usw.) in der Gleichung auftreten. Damit hat die einfachste partielle Differentialgleichung für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.1)$$

Wie man es schon von den gewöhnlichen Differentialgleichungen kennt, bestimmt die Gleichung allein noch nicht die Lösung. Bei partiellen Differentialgleichungen kommen noch weitere Fragen dazu: auf welchem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ soll die Lösung definiert sein? Wie glatt soll die Funktion sein? Sind alle Ableitungen in der Gleichung an allen Stellen erklärt? Bei den partiellen Differentialgleichungen, und das werden uns gleich die ersten Beispiele zeigen, gibt es keine einheitliche Methode, um alle Gleichungen zu behandeln. Vielmehr gibt es eine Fülle von Werkzeugen, die bei speziellen Gleichungen und Gleichungstypen weiterhelfen. Oft sind diese Gleichungen aus angewandten Wissenschaften und werden benannt nach demjenigen, der als erster diese Gleichungen als Modell für einen realen Vorgang aufgeschrieben hat. All dies hat die Theorie partieller Differentialgleichungen mit der gewöhnlicher Differentialgleichungen gemeinsam, nur ist die Heterogenität in Fragestellungen und Methoden vielleicht noch viel größer.

Bevor wir die oben genannte, einfachste Gleichung lösen, kommen wir zu Beispielen aus der Physik. Partielle Differentialgleichungen kommen allerdings nicht nur in der Physik, sondern z.B. auch in der Chemie, in der Biologie, in der Meteorologie, der Klimaforschung und in den Wirtschaftswissenschaften (z.B. Black-Scholes-Gleichung⁶ vor).

⁵Pierre de Fermat (20.8.1601–12.1.1665) französischer Jurist und Mathematiker. Er verfasste Arbeiten zur Geometrie und Zahlentheorie. Bekannt ist vor allem der nach ihm benannte große Satz von Fermat, der vor kurzem von Andrew Wiles bewiesen wurde.

⁶nach Fischer Scheffey Black (11.1.1938–30.8.1995) und Myron Samuel Scholes (geb.

In vielen Anwendungen werden diese Gleichungen mittels numerischer Verfahren näherungsweise gelöst. Algorithmen zur Lösung hochdimensionaler bzw. komplexer partieller Differentialgleichungen sind für die Mathematik eine große Herausforderung. Ziel muss neben dem Finden und Programmieren eines solchen Algorithmuses auch sein die Konvergenz- und Approximationseigenschaften zeigen zu können.

1.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Hier geht es darum, die Wärmeleitung in einem Medium zu modellieren. Dabei setzen wir voraus, dass ein Gebiet Ω des \mathbb{R}^3 von einem Medium ausgefüllt sei und an jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Temperatur

$$u_0(x) \tag{1.2}$$

vorgegeben sei. Wir interessieren uns für die Funktion $u(t, x)$ von zwei Veränderlichen, welche jedem $x \in \Omega$ und jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Temperatur an dieser Stelle und zu diesem Zeitpunkt zuordnet. Dabei machen wir eine von zwei üblichen zusätzlichen Annahmen: am Rand herrscht eine von außen gegebene Temperatur oder der Rand ist vollkommen isoliert, d.h.:

1. Für $x \in \partial\Omega$ ist $u(t, x)$ durch eine gegebene Umgebungstemperatur bestimmt. Oft wird diese Bedingung normalisiert, so dass man fordert

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Wir sprechen von Dirichlet–Randbedingungen⁷.

2. Die andere, häufig gestellte Bedingung am Rand unseres Mediums ist, dass kein Wärmefluss durch den Rand stattfindet (totale Isolation), d.h., dass am Rand kein Temperaturgradient auftritt, und damit, dass

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0 \tag{1.4}$$

1.7.1941), letzterer hat zusammen mit Robert C.Merton (geb. 31.7.1943) für das finanztheoretischen Modell, das durch diese Gleichungen beschrieben wird, den Nobelpreis für die Wirtschaftswissenschaften im Jahr 1997 erhalten.

⁷Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805-5.5.1859) Er bewies den großen Fermatschen Satz für $n = 5$. Bekannt sind vor allem die nach ihm benannten Reihen, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielen und sein Beitrag zur Variationsrechnung.

ist, wobei n den äußeren Normaleneinheitsvektor an den Rand von Ω im Punkt $x \in \partial\Omega$ bedeutet. In diesem Fall sprechen wir von Neumannschen Randbedingungen⁸.

3. Natürlich können auch Mischformen dieser Randbedingungen auftreten.

Nun kommen wir zur Modellierung im Inneren des Gebietes. Mit c sei die spezifische Wärme unseres Materials bezeichnet, mit γ das spezifische Gewicht. Dann stehen Temperaturänderung δu und Wärmeänderung δQ in einem Volumen V im Zusammenhang $\delta u c \gamma V = \delta Q$ oder

$$\delta u = \frac{\delta Q}{c\gamma V}. \quad (1.5)$$

Bei der Übersetzung von realen Problemen in die Sprache der Mathematik werden immer wieder solche Grundgleichungen, die aus der jeweiligen Fachwissenschaft kommen, benötigt. Sie werden oft als *konstitutive Gleichungen* bezeichnet. Sei nun $B_\varepsilon(x_0)$ eine Kugel, die so klein gewählt sei, dass die Temperatur in dieser Kugel als konstant angesehen werden kann, d.h.

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x) dx = u(x_0)V.$$

Dann ist

$$u(t+h, \omega_0) - u(t, \omega_0) = \frac{Q(t+h) - Q(t)}{c\gamma V}, \quad (1.6)$$

wobei Q nun die Wärmemenge in $B_\varepsilon(x_0)$ beschreibt. Nun nehmen wir an, dass die Veränderung der Wärme in der Kugel proportional zum Wärmefluss durch die Oberfläche ist, also

$$Q(t+h) - Q(t) = \tau h \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \langle \nabla u, n \rangle do, \quad (1.7)$$

wobei τ die Proportionalitätskonstante (*Wärmeleitfähigkeit*) und n die äußere Normale zur Kugel darstellt. ∇ bezieht sich auf die partielle Ableitung

⁸Franz Ernst Neumann (11.9.1798-23.5.1895) arbeitete vor allem zur mathematischen Physik.

bezüglich x . Nimmt man an, dass die Funktion u genügend glatt ist, so folgt aus dem Satz von Gauß⁹, dass

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \langle \nabla u, \nu \rangle d\sigma = \int_{B_\varepsilon(x_0)} \operatorname{div} \nabla u(t, x) dx. \quad (1.8)$$

Damit ergibt sich insgesamt, dass

$$\frac{1}{h}(u(t+h, x_0) - u(t, x_0)) = \frac{\tau}{c\gamma V} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \Delta u(t, x) dx. \quad (1.9)$$

Mit $k = \frac{\tau}{c\gamma}$ erhält man durch Grenzübergang ($h, \varepsilon \rightarrow 0$) die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u. \quad (1.10)$$

Im weiteren steht Δ für den Laplace-Operator¹⁰, d.h.

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u.$$

Eine Lösung dieser Gleichung, zusammen mit der Anfangsbedingung (1.2) und einer der Randbedingungen (1.3) oder (1.4) beschreibt für uns die Wärmeleitung in Ω . Eine Lösung dieser Gleichung, die nicht von $t \in \mathbb{R}$ abhängt, heißt stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Sie modelliert eine Temperaturverteilung in unserem Medium, die sich im Gleichgewicht befindet, so dass kein Wärmefluss auftritt. Nun wollen wir die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletschen Randbedingungen auf $[-\pi, \pi]$ mit $k = 1$ lösen. Wir wenden dabei das Verfahren der *Trennung der Veränderlichen* an

⁹Carl Friedrich Gauß (30.4.1777–23.2.1855) zeigte schon als Kind mathematische Genialität und wurde vom Großherzog Wilhelm Ferdinand gefördert. Im Jahr 1797 bewies er den Fundamentalsatz der Algebra. Sein wissenschaftliches Werk umfasst bedeutende Beiträge zu allen Bereichen der Mathematik, insbesondere Algebra, Zahlentheorie, reelle und komplexe Analysis und Differentialgeometrie. Darüberhinaus war er für lange Zeit Direktor des Göttinger Observatoriums.

¹⁰Pierre Simon Laplace (28.3.1749–5.3.1827) war während der französischen Revolution engagiert und wechselte danach mehrfach die politische Richtung. Seine mathematischen Untersuchungen betreffen partielle Differentialgleichungen, Kugelflächenfunktionen, Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und die Wahrscheinlichkeitstheorie.

und entwickeln $u(t, x)$ für jedes t in eine Fourierreihe¹¹, d.h. wir machen den Ansatz

$$u(t, x) = a_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}(t) \cos(\nu x) + b_{\nu}(t) \sin(\nu x))$$

mit ausreichend glatten Funktionen $a_{\nu}(t)$, $b_{\nu}(t)$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= a'_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a'_{\nu}(t) \cos(\nu x) + b'_{\nu}(t) \sin(\nu x)) \\ &= \Delta u \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\nu^2) (a_{\nu}(t) \cos(\nu x) + b_{\nu}(t) \sin(\nu x)). \end{aligned}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit Funktionen $\cos(\bar{\nu}x)$ ($\bar{\nu} \geq 0$), $\sin(\bar{\nu}x)$, ($\bar{\nu} > 0$) ergibt unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x) \cos(\bar{\nu}x) dx &= \delta_{\nu, \bar{\nu}} \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x) \sin(\bar{\nu}x) dx &= \delta_{\nu, \bar{\nu}} \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x) \cos(\bar{\nu}x) dx &= 0 \end{aligned}$$

eine unendliche Folge *gewöhnlicher* Differentialgleichungen für die Funktionen $a_{\nu}(t)$

$$\frac{da_{\nu}}{dt}(t) = -\nu^2 a_{\nu}(t)$$

¹¹Jean Baptiste Joseph de Fourier (21.3.1768–16.5.1830) war einer der Begründer der mathematischen Physik. Er beschäftigte sich mit der Wärmeleitung und trug zur Theorie partieller Differentialgleichungen bei. Er nahm am Feldzug Napoleons in Ägypten teil, war als Diplomat tätig und machte nebenbei mathematische Forschung. Nach der Rückkehr wurde er von Napoleon zum Präfekten des Departements d'Isère ernannt. Dies hinderte ihn nicht an einer weiteren fruchtbaren wissenschaftlichen Arbeit.

und entsprechendes auch für die Funktionen $b_\nu(t)$. Als Lösung erhält man

$$a_\nu(t) = a_\nu^0 e^{-\nu^2 t}.$$

Damit ergibt sich als eine Lösung der *partiellen Differentialgleichung* (1.10)

$$u(t, x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 t} (a_\nu^0 \cos(\nu x) + b_\nu^0 \sin(\nu x)),$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_ν^0, b_ν^0 . Diese erhält man aus der Fourierentwicklung des Anfangswertes $u_0(x)$. Aus der Dirichletschen-Randbedingung folgert man (für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $u(t, x)$ gegen a_0), dass $a_0 = 0$ ist.

Aufgabe 1.2.1

Bei einer stationären Temperaturverteilung erwartet man, dass die Temperatur $u(x)$ an der Stelle x gleich dem Mittelwert der Temperaturen in einer umgebenden Kugel ist:

Es sei Ω offen und $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, so dass die Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, und u eine stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Ω . Man zeige:

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x_0))} \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x) dx. \quad (1.11)$$

Dabei ist $\mu(B_\varepsilon(x_0))$ das Lebesgue-Maß der Kugel $B_\varepsilon(x_0)$.

1.3 Die Wellengleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Differentialgleichung für die schwingende Saite ableiten. Dabei sei zwischen $a, b \in \mathbb{R}$ eine Saite eingespannt, und $u(t, x)$ bezeichne die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t > 0$ an der Stelle $x \in [a, b]$. Wie zuvor sei $u_0(x)$ die Konfiguration der Saite zum Zeitpunkt 0 und entsprechend der Befestigung am Rande setzen wir Dirichlet-Randbedingungen (keine Auslenkung am Rand) voraus. Nach Newton ist die an einem Körper angreifende Kraft gleich dem Produkt aus Masse des Körpers und dessen Beschleunigung. Sei nun ein Stück der Länge ε der Saite (spezifisches Gewicht γ) gegeben, wir betrachten die Bewegung des Mittelpunktes x_0 . Die Masse ist nun $\gamma\varepsilon$, die Beschleunigung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_0)$ und damit ist die angreifende Kraft gleich $\gamma\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_0)$. Diese ist gegeben durch die Spannung, welche längs der Saite wirkt. Sei ξ ein Punkt auf der Saite in der Ausgangslage, dann ist die Länge $L(\xi)$ der ausgelenkten Saite bis zum Punkt der

über ξ liegt, gegeben durch $L(\xi) = \int_a^\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, y)\right)^2} dy$, die infinitesimale Längenänderung ist also

$$\frac{dL(\xi)}{d\xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi)\right)^2}. \quad (1.12)$$

Falls $\frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi)$ klein ist, ist diese Größe nach Taylor näherungsweise gleich $1 + \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi)$. Auf das Stück der Länge ε wirkt also eine Kraft proportional zu $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + \varepsilon/2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 - \varepsilon/2)$. Also gilt mit der Proportionalitätskonstante τ (Hookesches Gesetz¹²)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma} \varepsilon^{-1} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + \varepsilon/2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 - \varepsilon/2) \right). \quad (1.13)$$

Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \eta = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (1.14)$$

Die soeben hergeleitete Gleichung nennt man *eindimensionale Wellengleichung*.

Aufgabe 1.3.1

Man löse die Wellengleichung wie oben die Wärmeleitungsgleichung unter der Annahme Dirichletscher Randbedingungen und bei einer Ausgangsauslenkung $u_0(x)$. Sollte damit die Lösung nicht eindeutig bestimmt sein, überlege man sich weitere sinnvolle Bedingungen um eine eindeutige Lösbarkeit zu garantieren.

1.4 Kontinuitätsgleichung und Navier-Stokessche Gleichungen

Es sei zunächst $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ werde das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n bezeichnet.

¹²Robert Hooke (18.7.1635-3.3.1703) war Naturforscher und ab 1665 Professor für Geometrie in London. Er arbeitete an der Luftpumpe, normierte die Temperaturmessung und führte aufgrund mikroskopischer Beobachtungen den Begriff der Zelle ein.

Definition 1.4.1

Das Gebiet heißt von der Klasse C^1 (berandet), falls es zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U gibt, so dass $U \cap \partial\Omega$ Graph einer C^1 -Funktion $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, d.h. dass $\partial\Omega$ eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist.

Bei vielen physikalischen Vorgängen spielt die Zeit eine ausgezeichnete Rolle, man beschreibt Vorgänge, die mit der Zeit ablaufen. Der Buchstabe t ist im weiteren für die Zeit reserviert. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\Omega_t \subset \Omega$ ein Teilgebiet, das für jedes $t \in \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 ist. Ferner sei eine Funktion $\rho \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben, die wir als Dichte auffassen wollen. Wir werden die Ableitung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx \quad (1.15)$$

benötigen. Ferner sei eine Abbildung $\xi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ gegeben mit

$$\Omega_t = \{\xi(t, x) \mid x \in \Omega_0\}.$$

Dabei stellen wir uns unter $\xi(\cdot, x)$ die Stromlinie einer Flüssigkeit vor. Wir setzen voraus $\xi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ sei C^1 . Dann ist

$$v(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, x)|_{t=\tau}$$

eine stetige Abbildung.

Die Berechnung der Ableitung in Gleichung (1.15) erfolgt mittels der Differenzenquotienten, also:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{\Omega_{t+\delta t}} \rho(x, t + \delta t) dx - \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx \right\} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega_t} \frac{\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)}{\delta t} dx \\ &\quad + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{\Omega_{t+\delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x, t + \delta t) dx - \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta t}} \rho(x, t + \delta t) dx \right\}. \end{aligned}$$

Den ersten Ausdruck erhält man durch Vertauschung von Integral und Grenzwert als

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega_t} \frac{\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)}{\delta t} dx = \int_{\Omega_t} \rho_t dx.$$

Für den zweiten Ausdruck erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left(\int_{\Omega_{t+\delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x, t + \delta t) dx - \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta t}} \rho(x, t + \delta t) dx \right) = \\ & = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left(\int_{\Omega_{t+\delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x, t) dx - \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta t}} \rho(x, t) dx \right). \end{aligned}$$

Nun gilt es, die Differenz dieser beiden Integrale zu berechnen. Dazu approximieren wir den Rand $\partial\Omega_t$ durch Polyeder, wobei jede Seite eine durch eine Größe $\varepsilon > 0$ begrenzte Fläche habe und an einem Punkt tangential an $\partial\Omega_t$ sei. Sei nun $\mathcal{F}(\varepsilon) = \{F_1, \dots, F_{r(\varepsilon)}\}$ so eine Kollektion von Flächen und $x_j \in F_j$ die Kollektion der Punkte, wo F_j tangential an $\partial\Omega_t$ ist. Die Größe ε sei dabei genügend klein gewählt, so dass jede der Flächen F_j in einer Koordinatenumgebung U_j , welche in der Definition der C^1 -Glattheit von Ω auftritt, von x_j enthalten ist. Nun wird die Menge

$$\Omega_{t+\delta t} \setminus \Omega_t \cup \Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta t}$$

durch schiefe Zylinder mit Grundfläche F_j und Höhe

$$\delta t \langle v(x_j, t), n_j \rangle$$

in Richtung n_j , der äußeren Normalen zu $\partial\Omega_t$ in x_j , approximiert. Wir fixieren für den Moment $\delta t > 0$ und erhalten

$$\frac{1}{\delta t} \left(\int_{\Omega_{t+\delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x, t) dx - \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta t}} \rho(x, t) dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{r(\varepsilon)} \rho(x_j, t) \langle v(x_j, t), n_j \rangle |F_j| \\
&= \int_{\partial\Omega_t} \rho \langle v, n \rangle dF + O(\delta t)
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ liefert nun

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \rho_t(x, t) dx + \int_{\partial\Omega_t} \rho(x, t) \langle v, n \rangle dF. \quad (1.16)$$

Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\int_{\partial\Omega_t} \rho \langle v, n \rangle dF = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\rho v) dx.$$

Damit wird aus (1.16) die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} (\rho_t(x, t) + \operatorname{div}(\rho(x, t)v(x, t))) dx. \quad (1.17)$$

Wir kommen wieder zu physikalischen Anwendungen. Sei ρ die Dichte eines Gases oder einer Flüssigkeit (orts- und zeitabhängig). Dann ist

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx$$

die Gesamtmasse zum Zeitpunkt t . Da die Masse erhalten wird, hat man

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = 0. \quad (1.18)$$

Insbesondere folgt aus (1.17) und (1.18)

$$\int_{\Omega_t} (\rho_t(x, t) + \operatorname{div}(\rho(x, t)v(x, t))) dx = 0. \quad (1.19)$$

Da $\Omega_0 \subset \Omega$ beliebig ist, erhält man aus (1.19) die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Im folgenden betrachten wir den Fall einer idealen, kompressiblen Flüssigkeit im Gebiet Ω . Dabei sei $\rho(x, t)$ die Dichte am Ort x zum Zeitpunkt t und $v(x, t)$ der Geschwindigkeitsvektor an der Stelle $x \in \Omega$. Wir können uns $x(t)$ als die Bewegung eines Teilchens vorstellen, die Bewegung genügt dann der Gleichung

$$\dot{x} = v(x, t).$$

Für die Beschleunigung des Teilchens erhält man

$$\ddot{x} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Sei nun, wie oben, Ω_0 ein beliebiges Teilgebiet von Ω mit C^1 -Rand. Auf ein solches Gebiet wirken die folgenden Kräfte und sind im Gleichgewicht:

1. Beschleunigungskräfte:

$$\int_{\Omega_0} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx,$$

2. Kräfte aufgrund des Druckes:

$$\int_{\partial\Omega_0} p n do,$$

3. Externe Kräfte und Kräfte aufgrund von innerer Reibung

$$- \int_{\Omega_0} f dx.$$

Damit erhält man als Gleichung

$$\int_{\Omega_0} \rho (v_t + \langle v, \nabla \rangle v) dx = - \int_{\partial\Omega_0} p n do + \int_{\Omega_0} f dx. \quad (1.21)$$

Mit dem Satz von Gauß wird das Randintegral zu

$$\int_{\partial\Omega_0} pndo = \int_{\Omega_0} \nabla p dx.$$

Da Ω_0 beliebig war, erhält man daraus die Form

$$\rho (v_t + \langle v, \nabla \rangle v) = -\nabla p + f. \quad (1.22)$$

Diese Gleichung ist nach Euler benannt.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ergibt sich der folgende Spezialfall: ρ ist konstant oder $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ und aus der Kontinuitätsgleichung folgt $\operatorname{div} v = 0$. Die innere Reibung wird üblicherweise durch einen Term der Form $-\nu \Delta v$ modelliert. Damit ergibt sich dann insgesamt die Gleichung

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \Delta v + \langle v, \nabla \rangle v = -\nabla p + f_e. \quad (1.23)$$

Diese Gleichung ist nach Navier¹³ und Stokes¹⁴ benannt. Hier steht f_e für die externen Kräfte. Solche können Gravitationskräfte, elektrische oder magnetische Felder bei ionisierten Flüssigkeiten sein. Anwendungen mit solchen elektrisch nicht neutralen Flüssigkeiten finden sich beim Studium der Konvektionsströme im Erdinneren mit Anwendungen auf Orientierungswechsel des *Erdmagnetfeldes* oder auch bei der Untersuchung von *Fusionsreaktoren*.

1.5 Eine einfache Gleichung

In diesem und im nächsten Abschnitt wollen wir an ausgewählten Beispielen einige Phänomene studieren, zunächst ohne auf die physikalische Relevanz der Gleichungen zu achten.

¹³Claude Louis Marie Henri Navier (15.2.1785-21.8.1836) war als Professor für Mechanik an der École des Ponts et Chaussées in Paris tätig. Später wurde er Professor für Analysis und Mechanik an der École Polytechnique. Er gilt als Begründer der Elastizitätstheorie. 1824 gab er die Navier-Stokessche Gleichungen für die Bewegung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit an.

¹⁴Georg Gabriel Stokes (13.8.1819-2.2.1903) studierte und lehrte an der Universität Cambridge. Er erweiterte die von Navier angegebenen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen vom Fall der inkompressiblen auf den Fall der kompressiblen Flüssigkeit. Auf ihn geht der nach ihm benannte Integralsatz und der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz zurück.

Zunächst wollen wir die Konvention einführen, partielle Ableitungen als Indizes zu notieren, d.h. u_x steht für $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Satz 1.5.1

Jede stetig differenzierbare Lösung $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Gleichung $u_x - u_y = 0$ hat die Form $u(x, y) = v(x + y)$ für $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Jede Funktion dieser Gestalt löst die Differentialgleichung.

Beweis. Die Rückrichtung ist trivial: Wir differenzieren $u_x(x + y) = v'(x + y) = u_y(x, y)$ und erhalten $u_x - u_y = 0$.

Sei $u(x, y)$ eine Lösung, wir zeigen: u hängt nur vom Wert $x + y$ ab. Seien also zwei Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ mit $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ gegeben. Zu zeigen ist $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$. Aus $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ folgt $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. Nennen wir diese Zahl ξ_0 . Dann ist $x_2 = x_1 - \xi_0$ und $y_2 = y_1 + \xi_0$. Betrachte $h(\xi) = u(x - \xi, y + \xi)$. Da $h'(\xi) = 0$, ist h konstant und $h(0) = h(\xi_0)$. \square

1.6 Burgers Gleichung

Die nach Burgers¹⁵ benannte Gleichung hat die Form

$$u_x + uu_y = 0.$$

Diese Gleichung spielt eine gewisse Rolle in der Gasdynamik, es ist die 1-dimensionale Version der Gleichung (1.23) mit trivialer rechter Seite. Wir untersuchen inwieweit man stetige Lösungen dieser Gleichung erwarten darf. Sei $u(x, y)$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = u(x, y).$$

Ist $y(x)$ eine Lösung dieser Gleichung, so gilt

$$\frac{du}{dx}(x, y(x)) = u_x + u_y y' = u_x + uu_y = 0.$$

¹⁵Johannes Martinus Burgers (13.1.1895-7.6.1981) promovierte 1918 bei Ehrenfest mit einer Arbeit über das Bohrsche Atommodell. Danach war er einer der jüngsten Professoren an der Technischen Hochschule Delft. Er machte sich vornehmlich Gedanken über die Natur der Turbulenz und fasste die nach ihm benannte Gleichung als Modell dafür auf. Er gilt als einer der bedeutendsten niederländischen Strömungsmechaniker.

Also ist $u(x, y(x))$ konstant, d.h. u ist längs Kurven $(x, y(x))$ konstant $u = u_0$. Da aber $y' = u_0$ ist $y = u_0x + a$. Ist nun ein "Anfangswert"

$$u(x, 0) = \phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

gegeben, so ist u auf der Linie durch $(x, 0)$ mit Steigung $\phi(x)$ konstant und gleich $\phi(x)$. Ist ϕ nicht monoton fallend, schneiden sich diese Linien, und u kann im Schnittpunkt nicht stetig sein! Dies bedeutet natürlich zunächst gibt es $x < y$ mit $\phi(x) < \phi(y)$. Die Geraden durch die Punkte $(x, 0)$ mit Steigung $\phi(x)$ und $(y, 0)$ mit der Steigung $\phi(y)$ schneiden sich im Punkt $(y + \frac{(y-x)\phi(x)}{\phi(y)-\phi(x)}, \tau y - x)\phi(x)\phi(y)\phi(y) - \phi(x)$. In der Gasdynamik spricht man von *Stoßwellen*. Wir werden im zweiten Kapitel darauf zurückkommen.

1.7 Charakteristiken

Definition 1.7.1

Ist $F(x, u, D^{\alpha^1}u, \dots, D^{\alpha^m}u) = 0$ mit Multiindizes α^i eine partielle Differentialgleichung, so nennt man $\max\{|\alpha^i|\}$ die Ordnung der Differentialgleichung.

Definition 1.7.2

1. Eine partielle Differentialgleichung, welche in der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen linear ist, heißt linear.
2. Hängen die Terme höchster Ordnung linear von u ab, so heißt die Gleichung semilinear.
3. Sei m die Ordnung der Differentialgleichung. Ist die Gleichung linear in $D^{\alpha^i}u$ für alle α^i mit $|\alpha^i| = m$, so nennt man die Gleichung quasilinear.

Beispiel 1.7.3

1. $u_t = u_x$ ist eine lineare Gleichung.
2. $u_{xx} + uu_x = 0$ ist semilinear.
3. $u_t = uu_x$ ist quasilinear.

Eine Gleichung erster Ordnung hat die Gestalt

$$F(x, u, \nabla u) = 0.$$

Ist sie zusätzlich quasilinear, so lässt sie sich schreiben als

$$f_0(x, u) + \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0. \quad (1.24)$$

Ähnliche Methoden wie in den Abschnitten 1.5, 1.6 führen zum Verständnis, welche Anfangsdaten man vorschreiben darf. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und (1.24) eine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung über Ω und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -glatte Lösung. Setze

$$\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (u(x), x).$$

Dies definiert eine Fläche

$$G_\Psi = \{(u(x), x) \mid x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Tangentialvektoren an diese Fläche haben die Form $(\langle y, \nabla u \rangle, y)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$. Man sieht leicht:

auf dem Tangentialraum zu G_Ψ steht der Vektor $(-1, \nabla u)$ senkrecht, denn

$$\langle (-1, \nabla u), (\langle y, \nabla u \rangle, y) \rangle = 0.$$

Der Vektor

$$v(u, x) = (-f_0(x, u), f_1(x, u), \dots, f_n(x, u)) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

steht ebenfalls auf $(-1, \nabla u)$ senkrecht, da u die Differentialgleichung erfüllt. Damit ist $v(u, x)$ tangential an G_Ψ , und der zum Vektorfeld v gehörende Fluss Φ lässt die Fläche G_Ψ invariant.

Definition 1.7.4

Eine Lösungskurve der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{z} = v(z), \quad z = \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

heißt Charakteristik von (1.24).

Eine Methode zur Lösung der Gleichung (1.24) besteht nun darin, eine Hyperfläche $K(\Omega)$, wobei $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \times K$ eine Abbildung ist, zu bestimmen und u dann längs Charakteristiken mittels des Flusses von v fortzusetzen. Es ist klar, dass diese Methode funktioniert, wenn die Hyperfläche K transversal zu den Charakteristiken ist.

Aufgabe 1.7.5

Man betrachte die quasilineare Differentialgleichung

$$u(u_x + u_y) - 1 = 0$$

auf geeigneten Teilgebieten von \mathbb{R}^2 und bestimme die Charakteristiken. Bestimmen Sie eine Lösung $u(x, y)$ (durch Erraten) und zeigen Sie explizit, dass für diese Lösung die Fläche G_Ψ unter dem Fluss zur Gleichung (1.25) invariant ist. Bestimmen Sie eine Hyperfläche welche transversal zum Vektorfeld Φ ist.

1.8 Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung**Definition 1.8.1**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung hat die Form

$$Lu(x) = \sum_{i,j} a^{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_i b^i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x), \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad x \in \Omega. \quad (1.26)$$

(Für den Moment sei $u \in C^2(\Omega)$.)

Definition 1.8.2

1. L heißt im Punkt $x \in \Omega$ elliptisch, wenn die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit ist, d.h. wenn Zahlen $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ existieren mit

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \langle \xi, A(x)\xi \rangle \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

2. L heißt stark elliptisch, wenn ein $\lambda_0 > 0$ existiert mit $\lambda_0 \leq \lambda(x)$ für alle $x \in \Omega$.
3. Ist $\frac{\Lambda}{\lambda}$ auf Ω beschränkt, so nennt man L gleichmäßig elliptisch.
4. Ist L stark elliptisch und gleichmäßig elliptisch, so nennen wir L gleichmäßig stark elliptisch.

Neben den Annahmen, die sich auf die zweiten Ableitungen beziehen, benötigen wir oft noch Voraussetzungen, die die erste und zweite Ableitung in Beziehung setzen. Eine solche, in vielen Fällen nützliche, Annahme ist

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq \text{const.} < \infty, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega. \quad (1.27)$$

Die Eindeutigkeit der Lösung elliptischer Randwertprobleme folgt aus einem Maximumprinzip. Solche Prinzipien sind aus der Funktionentheorie bekannt. Die Verbindung wird hergestellt, da holomorphe Funktionen w die Cauchy¹⁶–Riemannsches¹⁷ Differentialgleichungen lösen. Die Realteile $u = \operatorname{Re} w$ dieser holomorphen Funktionen sind harmonische Funktionen und damit Lösungen von $\Delta u = 0$.

Satz 1.8.3 (Maximumprinzip)

Es sei L elliptisch im beschränkten Gebiet Ω , ferner gelte (1.27). Unter der Annahme $c = 0$ folgt aus $Lu \geq 0$ für ein solches $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, dass u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ annimmt. Genauer gilt

$$\sup \left\{ u(x) \mid x \in \Omega \right\} = \sup \left\{ u(x) \mid x \in \partial\Omega \right\}.$$

Ganz ähnlich erhält man aus $Lu \leq 0$

$$\inf \left\{ u(x) \mid x \in \Omega \right\} = \inf \left\{ u(x) \mid x \in \partial\Omega \right\}.$$

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir noch ein Lemma aus der linearen Algebra bereitstellen.

Definition 1.8.4

Eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A heißt positiv semidefinit, wenn für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$y^T A y = \langle y, A y \rangle \geq 0.$$

¹⁶Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoss demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war ungeheuer produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

¹⁷Bernhard Riemann (17.9.1826-20.7.1866) war Sohn eines Pastors und studierte auch anfänglich Theologie. Seine Dissertation widmete sich den Grundlagen der Funktionentheorie. In seinem Habilitationsvortrag legte er den Grundstein für ein modernes Verständnis der Geometrie. Obwohl er nicht einmal vierzig Jahre alt wurde, hat er die Mathematik und Physik grundlegend beeinflusst.

Lemma 1.8.5

Sind A, B positiv semidefinite $(n \times n)$ -Matrizen, so ist $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$. (Man beachte, dass das Produkt positiv semidefiniter Matrizen i. a. nicht positiv semidefinit ist.)

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für je zwei Matrizen A, B gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Ferner ist für eine positiv semidefinite Matrix A die Spur $\operatorname{tr}(A) \geq 0$. Zu jeder positiv semidefiniten Matrix B gibt es eine positiv semidefinite Quadratwurzel $B^{\frac{1}{2}}$. Also ist

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}).$$

Da $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ positiv semidefinit ist, ist deren Spur nicht negativ und damit ist das Lemma gezeigt. \square

Beweis von Satz 1.8.3.

Ist $Lu > 0$, so kann u im Inneren kein Maximum haben, denn sei $x_0 \in \Omega$ die Stelle an der $u(x_0)$ maximal ist, so ist $D_i u(x_0) = 0$ für alle i . Die Hessesche $\operatorname{Hess}(u(x_0))$ ist negativ semidefinit. Aufgrund der Elliptizität ist A positiv definit. Also gilt

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x_0) D_{ij} u(x_0) = \operatorname{tr}(A \operatorname{Hess} u(x_0)) \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $Lu > 0$.

Nun ist nach (1.27) $\frac{|b^i|}{\lambda} \leq b_0$, welches eine Konstante ist. Da $a^{11}(x) \geq \lambda(x)$ ist, gibt es eine genügend große Zahl $\gamma > 0$ mit

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1) e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1} > 0.$$

Also ist für alle $\varepsilon > 0$

$$L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$$

in Ω . Aus dem ersten Teil folgt nun

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung des Satzes. \square

Korollar 1.8.6

Es seien die Voraussetzungen wie oben erfüllt, zusätzlich gelte $c \leq 0$. Sei $u^+ = \max\{u, 0\}$. Dann ist

$$(a) \quad \sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} u^+(x).$$

Gilt zusätzlich $Lu = 0$ in Ω , so ist

$$(b) \quad \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \sup_{x \in \partial\Omega} |u(x)|.$$

Entsprechende Aussagen gelten für das Infimum und u^- .

Man vergleiche das Maximumprinzip für elliptische Differentialoperatoren mit dem Maximumprinzip der Funktionentheorie. Wie hängen diese Aussagen zusammen?

Korollar 1.8.7

Ist $c \leq 0$, $f \in C(\Omega)$ so hat

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \tag{1.28}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.29}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

1.9 Harmonische Funktionen

Definition 1.9.1

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$. u heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$. Entsprechend heißt u subharmonisch falls $\Delta u \geq 0$ und superharmonisch falls $\Delta u \leq 0$ in Ω .

In den Übungen hatten wir gesehen, dass harmonische Funktionen einer Mittelwerteigenschaft genügen: d.h. für $x \in \Omega$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} u(\xi) d\xi. \tag{1.30}$$

Zum Beweis dieser Aussage leitet man üblicherweise eine entsprechende Aussage für die Mittelwerte auf der Oberfläche einer kleinen Kugel her. Fast

gleichlautende Aussagen erhält man auf gleichem Wege auch für sub- bzw. superharmonische Funktionen und dies begründet letztendlich auch die Namensgebung für diese Funktionen. Wir fassen diese Resultate zusammen im folgenden Satz.

Satz 1.9.2

Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $u \in C^2(\Omega)$ und harmonisch (superharmonisch, subharmonisch), dann gelten die folgenden Mittelwert(un)gleichungen

$$u(x_0) = (\geq, \leq) \frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u dF$$

$$u(x_0) = (\geq, \leq) \frac{1}{\omega_n\rho^n} \int_{B_\rho(x_0)} u dx,$$

wobei ω_n für das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n steht.

Die Umkehrung dieses Resultates ist erstaunlicherweise ebenfalls wahr, wir halten dies im folgenden Satz fest.

Satz 1.9.3

Ist $u \in C(\Omega)$ und genügt der Mittelwerteigenschaft, so ist u harmonisch.

Bevor wir zum Beweis (im nächsten Abschnitt) kommen, wollen wir eine einfache Folgerung aus diesem Satz ziehen.

Korollar 1.9.4

Ist $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz konvergente Folge harmonischer Funktionen, so ist der Grenzwert harmonisch.

Beweis. Folgt sofort aus der Charakterisierung harmonischer Funktionen durch die Mittelwerteigenschaft. \square

Im letzten Abschnitt hatten wir Maximumprinzipien für Lösungen elliptischer Randwertprobleme abgeleitet, damit gelten diese natürlich auch für harmonische, bzw. subharmonische Funktionen. Wir wollen hier noch kurz zeigen, dass ähnliche Sätze auch für Funktionen mit Mittelwerteigenschaften gelten.

Satz 1.9.5 (Maximumprinzip und Mittelwerteigenschaft)

Gegeben sei $u \in C(\Omega)$ mit

$$u(x) \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} u(y) dy,$$

für jede kompakt in Ω liegende Kugel $B_\rho(x)$. Gibt es dann einen Punkt $y_0 \in \Omega$ mit $u(y_0) = \sup \{u(y) \mid y \in \Omega\}$, so ist u konstant.

Beweis. Sei $\Omega_{\max} = \{y \in \Omega \mid u(y) = u(y_0)\}$. $\Omega_{\max} \neq \emptyset$, Ω_{\max} ist relativ abgeschlossen in Ω . Können wir noch zeigen, dass Ω_{\max} offen in Ω ist, so folgt $\Omega_{\max} = \Omega$. Sei $x \in \Omega_{\max}$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subset \Omega$. Dann folgt

$$u(y_0) = u(x) \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} u(y) dy \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} u(y_0) dy = u(y_0).$$

Dann ist wegen der Stetigkeit von u auch $u = u(y_0)$ auf $B_\rho(x)$. \square

1.10 Die Poissonsche Gleichung

Wir beginnen mit der sogenannten zweiten Greenschen Formel (vgl. Übungen, Blatt 2, Aufgabe 2) für Funktionen $u, v \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dF. \quad (1.31)$$

Definition 1.10.1

Wir setzen für $x, a \in \mathbb{R}^n$ die Fundamentallösung des Laplaceoperators als

$$\Gamma_a(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & \text{für } n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \|x-a\| & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

Die Fundamentallösung hat die folgenden (einfach zu überprüfenden Eigenschaften): für $x \rightarrow a$ gilt $\Gamma(x-a) \rightarrow \infty$ und auf $\Omega \setminus \{a\}$ ist $x \mapsto \Gamma(x-a)$ harmonisch, d.h. sie löst die Gleichung

$$\Delta \Gamma(x-a) = 0 \quad \text{auf } \Omega \setminus \{a\}.$$

Letzteres sieht man indem man die obige Formel auf der Menge $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ auf die Funktion $v(x) = \Gamma(x - y) = \Gamma_y(x)$ anwendet:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(y)} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx &= \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) \right) dF \\ &+ \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) \right) dF. \end{aligned}$$

Das Integral über den Rand der ε -Kugel um y lässt sich in zwei Teile aufspalten und diese werden getrennt behandelt:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu} dF = \tilde{\Gamma}(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dF,$$

dabei steht $\tilde{\Gamma}$ für die Funktion $\tilde{\Gamma}(\|x\|) = \Gamma(x)$, da Γ nur von der Norm des Arguments abhängt. Das letzte Integral wird betragsmäßig durch

$$n\omega_n \varepsilon^{n-1} \max_{\partial B_\varepsilon(y)} \|\nabla u\|$$

abgeschätzt, wobei $\omega_n = \mu(B_1(0))$ ist. Man beachte, dass die Oberfläche der Einheitskugel durch $n\omega_n$ gegeben ist, vgl. Aufgabe 2 Blatt 2. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert dies gegen 0 und es bleibt das andere Integral. Hier beachtet man, dass für $x \in \partial B_\varepsilon(y)$ $\nabla \Gamma(x - y)$ colinear zu ν ist, und daher $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x - y) = \tilde{\Gamma}'(\varepsilon)$ ist, also hat man

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) dF = -\tilde{\Gamma}'(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dF = \frac{-1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dF \rightarrow -u(y)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Damit erhalten wir die sogenannte *Greensche Darstellungsformel*¹⁸

$$u(y) = \int_{\partial \Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) - \Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) dF + \int_{\Omega} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx.$$

¹⁸George Green (14.7.1793-31.5.1841) war britischer Mathematiker und Physiker und zum größten Teil Autodidakt. Er hat aufsehenerregende Arbeiten zur Analysis und Magnetismus geschrieben. Ferner stammen wichtige Beiträge zur Potentialtheorie von ihm.

Für harmonische Funktionen kann man u damit aus den Randdaten rekonstruieren.

Daraus ergeben sich zwei wichtige Spezialfälle. Erstens fällt für u mit kompaktem Träger das erste Integral weg und man erhält

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx.$$

Zweitens ist für harmonisches u das zweite Integral Null und man behält nur

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) \right) dF.$$

Der zweite Fall erlaubt uns einen typischen Regularitätsschluss, wie wir ihn noch öfters sehen werden: ist u harmonisch, so hat man u durch obiges Integral gegeben. Die rechte Seite ist C^∞ , ja sogar reell analytisch, also ist jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ reell analytisch. Damit erhält man Aussagen, die man für holomorphe Funktionen aus der Funktionentheorie kennt.

Die Darstellungsformel wird noch etwas vereinfacht, wenn man Γ modifiziert. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Der Raum $C^1(\bar{\Omega})$ besteht aus Funktionen, die C^1 auf einer offenen Menge sind, die $\bar{\Omega}$ enthält. Die Norm wird auf die übliche Weise erklärt. Hat man nun eine harmonische Funktion $h \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, so folgt aus der Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} h \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(h \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial h}{\partial\nu} \right) dF.$$

Setzen wir nun

$$G = \Gamma + h$$

so ergibt sich die neue Greensche Darstellungsformel

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial\nu} - G \frac{\partial u}{\partial\nu} \right) dF + \int_{\Omega} G \Delta u dx.$$

Definition 1.10.2

Ist $h \in C(\Omega \times \Omega)$, $h(\cdot, y)$ harmonisch für alle $y \in \Omega$, so heißt $G(x, y) = \Gamma(x-y) + h(x, y)$ eine Greensche Funktion, falls für jedes $y \in \Omega$ $G(\cdot, y)$ auf $\partial\Omega$ verschwindet.

Satz 1.10.3

Existiert eine Greensche Funktion, so ist sie eindeutig.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Maximumprinzip und dem daraus folgenden Eindeutigkeitssatz. \square

Bemerkung 1.10.4

Die **Bedeutung** der Greenschen Funktion liegt darin, dass man mit ihrer Hilfe harmonische Funktionen in $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ durch ihre **Randwerte** darstellen kann.

Im Spezialfall $\Omega = B_R(0)$ kann man die Greensche Funktion explizit konstruieren. Man erhält

$$G(x, y) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\|x - y\|) - \tilde{\Gamma}(\|y\|\|x - \bar{y}\|/R), & y \neq 0 \\ \tilde{\Gamma}(\|x\|) - \tilde{\Gamma}(R), & y = 0. \end{cases},$$

wobei $\bar{y} = \frac{R^2}{\|y\|^2}y$ die Spiegelung am Rand der Kugel vom Radius R sei.

Aufgabe 1.10.5

Man gebe eine geschlossene Formel für $G(x, y)$ auf $B_R(0)$ an und zeige $G(x, y) = G(y, x)$ und $G(x, y) \leq 0$. Man berechne die äußere Normalenableitung.

Satz 1.10.6 (Poissonsche¹⁹Darstellungsformel)

Ist $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ harmonisch, so erhält man folgende Poissonsche Darstellungsformel

$$u(y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u dx}{\|x - y\|^n}.$$

Beweis. Folgt sofort aus den vorherigen Aussagen. \square

Ist $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$, so existiert eine Folge $u_\nu \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$, mit $u_\nu \rightarrow u$ für $\nu \rightarrow \infty$. Dann folgt aus einfachen Konvergenzüberlegungen, dass der obige Satz auch für Funktionen mit nur stetigen Randwerten gilt. Eine Umkehrung dieser Aussage enthält der nächste Satz.

¹⁹Siméon Denis Poisson (21.6.1781-25.4.1842) war französischer Mathematiker, dessen Familie ihn ursprünglich nicht den Weg in die Wissenschaft ebnete. Er studierte an der École Polytechnique und war Schüler von Lagrange und Laplace, auch die Aufmerksamkeit von Legendre konnte er früh auf sich ziehen. er machte eine schnelle wissenschaftliche Karriere in Paris. Seine wesentlichen mathematischen Beiträge betreffen die Theorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, sowie die mathematische Physik.

Satz 1.10.7

Es sei $\varphi : \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = R\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann definiert

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - \|x\|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(y) dy}{\|x - y\|^n} & \text{für } \|x\| < R \\ \varphi(x) & \text{für } \|x\| = R \end{cases} \quad (1.32)$$

eine harmonische Funktion in $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$.

Beweis. Die Harmonizität von u folgt sofort aus der von G . Bleibt die Stetigkeit am Rand von $B_R(0)$ zu beweisen. Setzt man in die Poissonsche Darstellung die harmonische Funktion $u(x) = 1$ ein, so ergibt sich

$$1 = \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R \|x - y\|^n} dF_x$$

für alle $y \in B_R(0)$. Für den Integranden schreiben wir kurz $K(x, y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R \|x - y\|^n}$. Wir benutzen für den Beweis der Stetigkeit am Rand die klassische $\varepsilon - \delta$ -Methode. Seien $y_0 \in \partial B_R(0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$, so dass $\|y\| = R$ und $\|y - y_0\| < \delta$ impliziert, dass $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Sei nun $\|y - y_0\| < \delta/2$ dann folgt

$$\begin{aligned} |u(y) - u(y_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) (\varphi(x) - \varphi(y_0)) dF_x \right| \\ &\leq \int_{\partial B_R(0) \cap \|x - y_0\| \leq \delta} + \int_{\partial B_R(0) \cap \|x - y_0\| \geq \delta} K(x, y) |\varphi(x) - \varphi(y_0)| dF_x \\ &\leq \varepsilon + \frac{2M(R^2 - \|y\|^2)R^{n-2}}{(\delta/2)^n}. \end{aligned}$$

Ist nun y genügend nahe am Rand wird auch der zweite Term klein und wir haben die erforderliche Stetigkeit am Rand. \square

Beweis von Satz 1.9.3.

Gegeben sei eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$, die auf jeder Kugel $B_R(x_0) \subset \subset \Omega$

Ω der Mittelwerteigenschaft genügt. Nach dem vorhergehenden Satz existiert nun eine harmonische Funktion $h \in C^2(B_R(x_0))$, so dass $h = u$ auf dem Rand $\partial B_R(x_0)$. Die Differenz $w = u - h$ genügt nun auf $B_R(x_0)$ der Mittelwerteigenschaft und hat Randwerte 0. Das Maximumprinzip für Funktionen mit Mittelwerteigenschaft, siehe Satz 1.9.5, impliziert, dass $w = 0$. \square

1.11 Das klassische Dirichlet-Problem

Wir erweitern zunächst die Definition von subharmonischen Funktionen von C^2 -Funktionen auf beliebige stetige Funktionen.

Definition 1.11.1

Eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt subharmonisch, wenn zu jeder Kugel $B_\rho(x) \subset\subset \Omega$ und jeder harmonischen Funktion $h : B_\rho(x) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: ist $u \leq h$ auf $\partial B_\rho(x)$, so ist $u \leq h$ in $B_\rho(x)$. Entsprechend definieren wir den Begriff superharmonisch.

Aufgabe 1.11.2

Ist $u \in C^2(\Omega)$, dann ist u gemäß der neuen Definition genau dann subharmonisch falls $\Delta u \geq 0$.

Die wesentlichen Eigenschaften der neuen Funktionenklasse sind in den folgenden Sätzen enthalten.

Satz 1.11.3

1. Ist u subharmonisch, dann genügt u dem starken Maximumprinzip, d.h. ist $y_0 \in \Omega$ mit $u(y_0) = \sup \{u(z) \mid z \in \Omega\}$, so ist u konstant.
2. Ist v superharmonisch auf einem beschränkten Gebiet Ω , $v \geq u$ auf $\partial\Omega$. Dann ist entweder $v > u$ in Ω oder $u = v$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Aussage. Der Beweis beruht auf inzwischen bekannten Gedanken. Wir betrachten die Menge

$$\Omega_{max} = \{x \in \Omega \mid u(x) = u(y_0)\}.$$

Diese ist nach Annahme nichtleer und wegen der Stetigkeit von u relativ abgeschlossen. Wiederum müssen wir zeigen, dass Ω_{max} relativ offen ist.

Sei $x_0 \in \Omega_{max}$ und $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei h harmonisch auf $B_\rho(x_0)$ mit $h = u$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Dann ist

$$u(x_0) \leq h(x_0) = \frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} h dF \leq u(x_0),$$

da $h(x) \leq u(x_0)$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Also ist $u = h = u(x_0)$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Da dies für alle $0 < r < \rho$ gilt, ist Ω_{max} relativ offen in Ω und es gilt $\Omega = \Omega_{max}$.

Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir, dass $u - v$ subharmonisch ist und ≤ 0 . Gilt Gleichheit an einer Stelle, so gilt sie wegen der ersten Aussage überall. \square

Definition 1.11.4

Sei Ω ein Gebiet und $u \in C(\Omega)$ subharmonisch. Ferner sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ eine Kugel. Sei $h \in C^2(B_R(x_0))$ die harmonische Funktion auf $B_R(x_0)$ deren Randwerte mit denen von u auf $\partial B_R(x_0)$ übereinstimmt. Wir bezeichnen die Funktion

$$U(x) = \begin{cases} h(x) & x \in B_R(x_0) \\ u(x) & x \in \Omega \setminus B_R(x_0) \end{cases}$$

als harmonische Hebung von u bezüglich $B_R(x_0)$.

Satz 1.11.5

Die harmonische Hebung U bezüglich einer Kugel $B_R(x_0)$ einer subharmonischen Funktion $u \in C(\Omega)$ ist subharmonisch.

Beweis. Sei $\rho > 0$ und $B_\rho(y) \subset\subset \Omega$, $p \in C^2(B_\rho(y))$ harmonisch auf $B_\rho(y)$ mit $p \geq U$ auf $\partial B_\rho(y)$. Dann ist auf dem Rand $\partial B_\rho(y)$

$$p \geq U \geq u$$

und damit ist $p \geq u$, da u subharmonisch ist. Damit ist die Behauptung außerhalb von $B_R(x_0)$ gezeigt. Im Sonderfall $B_\rho(y) \subset B_R(x_0)$ ist die Behauptung trivial, ansonsten ist entweder $B_R(x_0) \subset B_\rho(y)$ oder $\partial(B_R(x_0) \cap B_\rho(y))$ besteht aus

$$((\partial B_R(x_0)) \cap B_\rho(y)) \cap (B_R(x_0) \cap \partial B_\rho(y))$$

und aus eventuell zwei weiteren Punkten. In jedem Fall ist auf $(\partial B_R(x_0)) \cap B_\rho(y)$ $U = u$ und daher $U \leq p$. Daher ist auf $\partial(B_R(x_0) \cap B_\rho(y))$ $U \leq p$. Da U, p in diesem Gebiet harmonisch sind, ist auch die Differenz $U - p$ harmonisch und wegen des Maximumprinzips im Inneren ≤ 0 . \square

Satz 1.11.6

Ist \mathcal{U} eine Familie stetiger subharmonischer Funktionen aus einem Gebiet Ω . Ist $\text{cal}\mathcal{U}$ endlich, so ist

$$U(x) = \sup \{u(x) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

subharmonisch. (Man beachte, dass diese Aussage für eine beliebige Menge \mathcal{U} gilt, wenn man in der Definition stetig durch oberhalb stetig ersetzt, d.h., wenn zu jedem $x_0 \in \Omega$ und ein $\delta > 0$ existiert, so dass $x \in B_\delta(x_0)$ impliziert $u(x) \geq u(x_0) - \varepsilon$.)

Beweis. Ist $B_\rho(y)$ gegeben und h harmonisch auf $B_\rho(y)$ mit $h \geq U$ auf $\partial B_\rho(y)$. Dann folgt $h \geq u$ für alle $u \in \mathcal{U}$ auf $B_\rho(y)$ und damit natürlich auch $h \geq U$. \square

Bevor wir den wichtigsten Satz dieses Abschnittes beweisen können, benötigen wir noch ein technisches Hilfsmittel. Es ist Prototyp einer Klasse von Resultaten, die in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine große Rolle spielen und unter dem Schlagwort „a-priori Abschätzung“ läuft. Dabei versucht man ohne Kenntnis der Lösung u , allein aufgrund der Tatsache, dass u eine gewisse Gleichung erfüllt Abschätzungen für Normen von Ableitungen von u zu bekommen. Oft steckt gerade in diesen Abschätzungen viel Arbeit und es ist dann vergleichsweise einfach, unter Verwendung allgemeiner Sätze weiter zu kommen.

Satz 1.11.7

Ist u harmonisch im Gebiet Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$, dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d} \right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|,$$

wobei $d = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ist.

Beweis. Wir wissen bereits, dass jede harmonische Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$ ist. Wählen wir eine spezielle Ableitung D^α aus, so gilt

$$\Delta D^\alpha u = D^\alpha \Delta u = 0.$$

Also ist jede Ableitung wieder harmonisch und genügt insbesondere der lokalen Mittelwertigkeit. Also hat man

$$\nabla u(y) = \frac{1}{\mu(B_R(0))} \int_{B_R(y)} \nabla u dx = \frac{1}{\mu(B_R(0))} \int_{\partial\mu(B_R(y))} u \nu dF$$

Insbesondere folgt nun durch Abschätzen des letzten Integrals durch

$$\sup |u(x)| \mu(\partial(B_R(0))),$$

dass

$$\|\nabla u\| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(y)} |u|.$$

Natürlich folgt durch Übergang $R \rightarrow d_y = \inf_{x \in \partial\Omega} \|y - x\|$, dass gilt

$$\|\nabla u\| \leq \frac{n}{d_y} \sup |u|.$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Formel für konzentrische Kugeln erhält man die behauptete Aussage. \square

Die Methode zur Lösung des Dirichletschen Randwertproblems für harmonische Funktionen

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

die der folgende Satz angibt geht auf Perron²⁰ zurück und wird als *Perronsche Methode* bezeichnet.

Satz 1.11.8 (Perron)

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Setze

$$\mathcal{U} = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u \text{ ist subharmonisch und } u \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Dann ist

$$U(x) = \sup \{u(x) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

harmonisch auf Ω .

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass \mathcal{U} nicht leer ist, denn jede Konstante $c < \inf_{\partial\Omega} \varphi$ ist in \mathcal{U} . Wegen des Maximumprinzips ist $u \in \mathcal{U}$ punktweise durch $\sup \varphi$ beschränkt und damit ist U definiert. Wähle $x \in \Omega$. Dann

²⁰O. Perron (7.5.1880-22.2.1975) studierte lehrte vornehmlich in München, bedeutende Beiträge zur Theorie von Differentialgleichungen, Kettenbrüchen und zur Analysis. Er war dezidierter Gegner des Nationalsozialismus und versuchte in dieser Zeit nach Kräften bei Berufungen, Habilitationen und Promotionen die wissenschaftliche Qualifikation als wesentliches Entscheidungskriterium zu erhalten

gibt es eine Folge $u_n \in \mathcal{U}$ mit $u_n(x) \rightarrow U(x)$. Nun sei $B_R(x) \subset\subset \Omega$ gewählt und U_n die harmonische Liftung von u_n bezüglich $B_R(x)$. Offenkundig ist $U_n \in \mathcal{U}$ für alle n und damit hat man auf $B_R(x)$ eine beschränkte Folge harmonischer Funktionen. Nach Satz 1.11.7 ist diese Folge für jedes $\rho < R$ auf $B_\rho(x)$ gleichgradig stetig und bei $x = 0$ konvergent. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine auf $B_\rho(x)$ konvergente Teilfolge U_{n_k} . Diese konvergiert gegen eine auf $B_\rho(x)$ harmonische Funktion v . Es gilt $v \leq U$ und $v(x) = U(x)$ (nach Konstruktion).

Wir zeigen nun $v = U$ auf $B_\rho(x)$. Ist $v(y) < U(y)$ für ein $y \in B_\rho(x)$, dann gibt es (wegen der Definition von U) ein $u \in \mathcal{U}$ mit $v(y) < u(y) \leq U(y)$. Sei $v_k = \max\{u, U_k\}$. Mit der harmonischen Hebung V_k von v_k auf $B_R(x)$ bekommen wir eine Folge harmonischer Funktionen

$$U_k \leq V_k \leq U$$

mit $V_k \rightarrow V$ und V ist harmonisch in $B_\rho(x)$. Also sind $v \leq V$ harmonisch auf $B_\rho(x)$ und $v(x) = V(x)$. Dann ist aber $v - V \leq 0$ und harmonisch in $B_\rho(x)$, also wegen des Maximumprinzips identisch 0. Dies widerspricht aber der Definition von u . \square

Damit haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um für stetige Funktionen $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Randwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu studieren.

Definition 1.11.9

Die oben im Satz 1.11.8 konstruierte harmonische Funktion heißt Perronsche Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Die Frage der Annahme der Randwerte auf $\partial\Omega$ ist dabei noch offen. Wir werden sehen, dass es eine Frage der lokalen Geometrie des Randes ist, in welcher Weise die Randwerte angenommen werden.

Definition 1.11.10

Sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\xi \in \partial\Omega$. Dann heißt eine Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ Schranke oder Barriere bei ξ , falls

1. w superharmonisch auf Ω ist, und
2. $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ und $w(\xi) = 0$

gilt. Eine lokale Schranke bei ξ ist eine Funktion, die auf einer Umgebung $B_\rho(\xi)$ definiert ist, so dass die Bedingungen auf $B_\rho(\xi) \cap \Omega$ erfüllt sind.

Lemma 1.11.11

Die Existenz einer lokalen Schranke impliziert die Existenz einer Schranke.

Beweis. Klar! □

Definition 1.11.12

Ein Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ heißt regulär, falls es eine Schranke bei ξ gibt.

Satz 1.11.13

Für die Perronsche Lösung u des obigen Randwertproblems gilt, dass $u(x) \rightarrow \varphi(\xi)$ konvergiert (für $x \rightarrow \xi$), falls ξ regulärer Punkt ist und φ bei ξ stetig ist.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $M = \sup|\varphi|$. da ξ regulärer Punkt ist, existiert eine Schranke w . Dann gibt es ein $\delta > 0$, $k > 0$ mit $\|x - \xi\| < \delta$ impliziert $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ und $kw(x) > 2M$, falls $\|x - \xi\| \geq \delta$. Dann sind $v_o = \varphi(\xi) + \varepsilon + w$ und $v_u = \varphi(\xi) - \varepsilon - w$ super- bzw. subharmonisch und $\geq \varphi$, bzw. $\leq \varphi$ auf $\partial\Omega$. Dann hat man in Ω

$$v_u \leq u \leq v_o$$

oder

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Da $w(\xi) = 0$ folgt der Satz unmittelbar. □

Wir fassen die Resultate zum klassischen Dirichletproblem zusammen.

Satz 1.11.14

Das klassische Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist für jede stetige Randfunktion φ genau dann lösbar, falls jeder Randpunkt regulär ist.

Beweis. Die eine Richtung wurde gerade gezeigt.

Für die Umkehrung wählen wir die spezielle Randfunktion

$$\varphi(x) = |x - \xi|.$$

Die zugehörige Lösung des klassischen Dirichletproblems ist harmonisch, und damit natürlich eine Schranke. Damit ist ξ regulär. \square