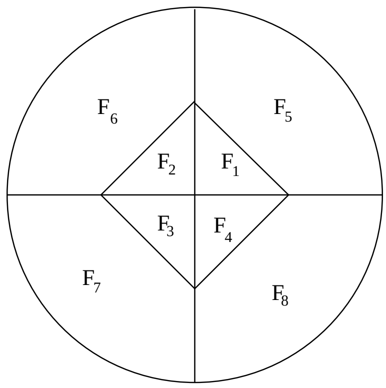
Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 9

Aufgabe 32 Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Randbedingung (a) $g(\varphi) = \sin(\varphi)$ und (b) $g(\varphi) = |\sin(\varphi)|$. Zeigen Sie, dass das Dirichletintegral $\mathcal{D}$ im Fall (a) den minimalen Wert π annimmt, im Fall (b) das Minimum kleiner als π ist. (**Hinweis:** Zerlegen sie den Kreis und suchen Sie eine stückweise lineare Funktion mit den geeigneten Randwerten.)

Aufgabe 33 Betrachten Sie das Problem (b) aus der vorigen Aufgabe. Bestimmen Sie eine Funktion $g \in H^1(B_1(0))$, die auf dem Rand die geforderten Werte annimmt. Zerlegen Sie den Kreis in Flächen, entsprechende der folgenden Abbildung mit inneren Eckpunkten bei $(0, \pm\frac{1}{2})$, bzw. bei $(\pm\frac{1}{2}, 0)$. Machen Sie auf



jeder Fläche F_j einen Ansatz der Form $a_j x + b_j y + c_j$, so dass die Funktion u, die durch $x \mapsto a_j x + b_j y + c_j,\ x \in F_j$ auf $B_1(0)$ definiert wird, stetig ist und $u - g \in H_0^1(B_1(0))$ ist. Bestimmen Sie das Minimum des Dirichletintegrals in der Menge der stetigen, auf F_j linearen Funktionen mit $u - g \in H_0^1(B_1(0))$. Plotten Sie die minimierende Funktion.

Aufgabe 34 Betrachten Sie in der vorigen Aufgabe, Randpunkte $(0, \pm s)$, bzw. $(\pm s, 0)$ und bestimmen Sie den minimalen Wert des Dirichletintegrals, wenn $s \in (0, 1)$ variiert.

Aufgabe 35 Schreiben Sie ein Programm, das auf einer feineren Zerlegung des Kreises (mit Dreiecken im Inneren) den Ansatz aus den vorigen Aufgaben wiederholt und bestimmen Sie in der Klasse der stetigen, auf Ihren Gitterflächen linearen Funktionen (mit geeeigneten Randwerten) den minimalen Wert des Dirichletintegrals. Plotten Sie die minimierende Funktion.

Abgabe: 7.1.2011