Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 8

Aufgabe 28 Wir betrachten die Abbildung

$$S : H_0^1((0,1)) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_0^1 \left((|u'(x)| - 1)^2 + u^2 \right) \, dx.$$

Zeigen Sie: (a) $S \geq 0$.
(b) Es gibt eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1((0,1))$ mit $\lim_{n\to\infty} S(u_n) = 0$.
(c) Es gibt kein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $S(u) = 0$.

Aufgabe 29 Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $M : X \times X \to \mathbb{R}$ sei bilinear mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} M(u,v) &= M(v,u) \ \ \forall u,v \in X \text{ (Symmetrie)}, \\ \exists C > 0 : \quad M(u,v)| &\leq C\|u\|\|v\| \ \ \forall u,v \in X \text{ (Stetigkeit)} \\ \exists c > 0 : \quad M(u,u) &\geq c\|u\|^2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jede abgeschlossene und konvexe Teilmenge $V \subset X$ und jede beschränkte lineare Abbildung $\ell : X \to \mathbb{R}$ genau ein Element $v \in V$ existiert, welches das Funktional

$$J(u) = M(u,u) + \ell(u)$$

auf V minimiert.

Aufgabe 30 Es sei Ω von der Klasse C^m und $u \in C^m(\overline{\Omega})$ mit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} u(x) = 0 \ \ \forall |\alpha| \leq m-1, \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: $u \in H_0^m(\Omega)$.

Aufgabe 31 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $G \subset \mathbf{O}(n)$ die Untergruppe, mit

$$A\Omega = \Omega \ \forall A \in G.$$

Zeigen Sie: gilt für eine Randfunktion $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dass $g(Ax) = g(x)$ so hat jede Lösung u des Problems $\Delta u = 0$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$ die Invarianzeigenschaft

$$u(Ax) = u(x) \ \forall A \in G.$$

Hinweis: Ist Ihnen diese Aufgabe zu schwer, beschränken Sie sich auf die Aussage, für radialsymmetrische Gebiete im $\mathbb{R}^2$ sind die harmonischen Funktionen mit radialsymmetrischen Randwerten radialsymmetrisch.

Abgabe: 17.12.2010