Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 7

Aufgabe 24 (i) Zeigen Sie, dass $W^{1,1}((0,1);\mathbb{R})$ in $C([0,1];\mathbb{R})$ eingebettet ist. Ist die Einbettung kompakt?
(ii) Ist die Funktion

$$u(x) = \sqrt{|x|}$$

in $W^{1,p}((-1,1))$, $p \geq 1$?

Aufgabe 25 (a) Es sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit

$$\Omega_i = (i-2, i-1) \times (-1,1), i = 1,2.$$

Geben Sie eine Funktion u an mit

$$u \in W^{1,3}(\Omega) \text{ und } u \notin C(\overline{\Omega}).$$

(b) Geben Sie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ an, so dass u nicht Grenzwert einer Folge in $C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, wobei die Konvergenz im Sinne von $W^{1,p}$ zu betrachten ist.

Aufgabe 26 Wir betrachten den Raum $X = \left\{ u \in C([0,1];\mathbb{R}) \;\middle|\; u(0) = u(1) = 0 \right\}$ und $L : X \to X$, $D(L) = C^2_*((0,1);\mathbb{R}) \cap X$ mit

$$L : X \to X : u \mapsto u''.$$

Zeigen Sie, L ist nicht beschränkt, ist abgeschlossen und bestimmen Sie das Spektrum von L und zeigen Sie L hat kompakte Resolvente.

Aufgabe 27 Wir betrachten den Raum X aus der vorigen Aufgabe, sei $W = X \cap C^2_*((0,1);\mathbb{R})$ und $q : W \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$q(u) = \int_0^1 |u'(x)^2 - 1| \, dx$$

Zeigen Sie:

(a) q ist stetig bezüglich der Norm auf dem Raum W.

(b) q nimmt in W kein Minimum an.

Abgabe: 10.12.2010