Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Blatt 6

Aufgabe 20 Überprufen Sie welche der folgenden Funktionen in $W^{1,1}(\Omega)$ sind, belegen Sie Ihre Aussage und bestimmen Sie falls möglich die schwachen Ableitungen erster Ordnung:

(a) $u(x) = |x|$, für $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$,

(b) $u(x) = \frac{x}{|x|}, x \neq 0, u(0) = 0$, $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

(c) $u(x) = \|x\|$, $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 21 Man zeige, hat eine Funktion $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ eine schwache Ableitung $D_i u$, so gilt dies auch für die Funktionen

$$\max\{u, 0\},\ \min\{u, 0\},\ |u|.$$

Hinweis: man betrachte geeignete Approximationen für u.

Aufgabe 22 Bestimmen Sie mögliche Konstanten für die Poincaré Ungleichung für $\Omega = (0, 1), B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, das offene Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Sind diese optimal?

Aufgabe 23 Man betrachte das Poisson'sche Problem ($\Delta u = 0$ auf $B_1(0)$ und $u = \varphi$ auf $\partial B_1(0)$) auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und schreibe ein Programm (Matlab, Octave, C, Maple) zur numerischen Lösung dieses Problems mit Hilfe des Poisson Kernes. Lösen Sie das Problem für die Randwerte $\varphi(x, y) = \sin(\psi), |\sin(\psi)|$ und

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \cos(\psi) + 1 & y \geq 0 \\ -\cos(\psi) - 1 & y < 0 \end{cases},$$

wobei $\psi \in S^1$ den Winkel angibt. Erzeugen Sie eine Graphik der Lösung, speziell nahe der Unstetigkeitsstellen von φ, bzw. φ'.

Abgabe: 3.12.2010