Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 16 (a) Zeigen Sie, dass die klassische Lösung von Burgers Gleichung, die zum Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 - x, & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0. & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

korrespondiert für $0 < t < 1$ definiert ist und die Form

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 1 & , \ x < t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & , \ t \le x \le 1, \\ 0 & , \ x > 1, t < 1 \end{cases} .$$

hat.
(b) Zeigen Sie durch explizites Nachprüfen, dass die in der Vorlesung auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ angegebene schwache Lösung des vorstehendem Anfangswertproblems tatsächlich eine schwache Lösung ist.

Aufgabe 17 Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit dem Anfangswert $u_0(x) = -1$ für $x < 0$ und $u_0(x) = 1$ für $x \ge 0$. Zeigen Sie,
(a) dass

$$u_e(t,x) = \begin{cases} -1, & \text{für} \quad x \le -1 \\ \frac{x}{t}, & \text{für} \quad -t < x < t \\ 1, & \text{für } x \ge t \end{cases}$$

eine Lösung ist, die der Entropiebedingung genügt.
(b) Zeigen Sie, dass die Entropiebedingung die folgende Entropieungleichung impliziert:

$$f'(u_l) > s > f'(u_r)$$

wobei $u_r,\ u_l,\ s$ wie in der Vorlesung definiert seien.

Aufgabe 18 Betrachten Sie Burgers Gleichung mit dem Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0,\ x > 1 \\ 1 & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Versuchen Sie eine schwache Lösung, die sowohl der Entropiebedingung, wie auch der Rankine-Hugoniot-Bedingung genügt, auf dem Intervall $0 \le t \le 2$ zu finden.

Aufgabe 19 Setzen Sie die eben bestimmte Lösung unter Beachtung von Rankine-Hugoniot-Bedingung und Entropiebedingung für $t > 2$ fort.

Abgabe: 26.11.2010