Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 5 Man betrachte die quasilineare Differentialgleichung

$$u(u_x + u_y) - 1 = 0$$

auf geeigneten Teilgebieten von $\mathbb{R}^2$ und bestimme die Charakteristiken. Bestimmen Sie eine Lösung $u(x, y)$ (durch Erraten) und zeigen Sie explizit, dass für diese Lösung die Fläche G_Ψ unter dem Fluss zur Gleichung (1.25) invariant ist. Bestimmen Sie eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$ welche transversal zum Vektorfeld v ist.

Aufgabe 6 Wir untersuchen die Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten für eine Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$u_t + \langle b, \nabla u \rangle = 0,$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ fest ist und ∇ sich auf die Variablen in $\mathbb{R}^n$ bezieht. Geben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der Lösung der Transportgleichung mit Anfangsbedingung

$$u(0, x) = g(x)$$

für $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ an. (Hinweis: Aufgabe 3))

Aufgabe 7 Man untersuche die Gleichung

$$u_t + \langle b, \nabla u \rangle = f(t, x), (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = g(x).$$

Bestimmen Sie eine Darstellung für die Lösung.

Aufgabe 8 Wir betrachten nochmals die (eindimensionale) Wellengleichung

$$Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u.$$

Die Faktorisierung

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

erlaubt uns die Lösung der Wellengleichung auf die allgemeine Lösung der Transportgleichung zurückzuführen (man beachte Aufgabe 3). Man nutze dies für eine Darstellung der Lösung.

Abgabe: 5.11.2010