Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Blatt 12

Aufgabe 44 Betrachten Sie $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $L = -\Delta$. Zeigen Sie, dass die erste Eigenfunktion, also die für den kleinsten Eigenwert $\lambda_1(n)$ für das Dirichletproblem

$$Lu = \lambda u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

radialsymmetrisch ist. Bestimmen Sie (für kleine n) $\lambda_1(n)$ möglichst genau (analytisch oder numerisch). Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n)?$$

Wenn ja, können Sie eine Abschätzung/Asymptotik angeben? Hinweis: Man kann die Eigenwerte für verschiedene Gebiete vergleichen.

Aufgabe 45 Entscheiden Sie soweit möglich für die höheren Eigenwerte der vorigen Aufgabe aus für $n = 2$ folgende Fragen (manche können auch in größerer Allgemeinheit beantwortet werden, mache können auch schwer sein):
(a) Jede höhere Eigenfunktion hat Vorzeichenwechsel.
(b) Es gibt höhere Eigenfunktionen, deren Nullstellengebilde den Rand nicht erreichen.
(c) Es gibt höhere Eigenfunktionen, deren Nullstellengbilde den Rand erreicht.
(d) Alle Eigenwerte sind einfach oder doppelt.

Aufgabe 46 (a) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und beweisen Sie explizit die Abschätzungen für $\lambda > 0$

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(At)\, dt \right\| \le \frac{M}{\lambda},$$

bzw.

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(At)\, dt \right\| \le \frac{M}{\lambda^n}.$$

(b) Beweisen Sie, dass für eine Matrix A das obige Integral die Resolvente darstellt, indem Sie für $\lambda > \max\left\{ |\sigma| \;\middle|\; \sigma \in \Sigma(A) \right\}$ (direkt) zeigen

$$(\lambda \mathbb{1} - A) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(At)\, dt = \mathbb{1}.$$

Hinweis: Zu Teil (b) gibt es eine sehr kurze Lösung.

Abgabe: 28.1.2011