Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 11

Aufgabe 40 (a) Es sei $\Omega = (0, \pi)$, $L = -\frac{d^2}{dx^2}$. Man bestimme L^f und die Menge Σ aus dem Satz 5.2.27. Beweisen Sie ohne Rückgriff auf den Beweis des Satzes, dass für $\sigma \notin \Sigma$ und für jede rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ das Randwertpoblem

$$\left.\begin{array}{rcll} L_\sigma u &=& f & \text{in} \quad \Omega \\ u &=& 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{1}$$

eindeutig lösbar ist. Schreiben Sie dazu die gewöhnliche Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um.
(b) Es sei $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ und $L = -\Delta$. Bestimmen Sie für das RWP (1) die Menge Σ und bestimmen Sie für $\sigma \in \Sigma$ und $f \in L^2(\Omega)$ die Bedingungen zur Lösbarkeit des Problems. (**Hinweis:** Fourierreihen)

Aufgabe 41 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet (mit hinreichend glattem Rand). Gibt es $m, p \geq 1$, so dass für $u \in W^{m,p}(\Omega)$ folgt $u^2 \in W^{m,p}(\Omega)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 42 Wir betrachten einen stark elliptischen Operator L in Divergenzform auf einem glatt berandeten, beschränktem Gebiet Ω und nehmen an, $b^i = c^i = d = 0$ und fassen L als Abbildung $H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)^*$ auf. Zeigen Sie:
(a) Die zugeordnete Bilinearform B_L ist koerziv, also o.B.d.A. $\sigma_0 = 0$. Sei $L_0^{-1} : (H_0^1(\Omega))^* \to H_0^1(\Omega)$ der zugeordnete Lösungsoperator und

$$S = L_0^{-1}|_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

(b) S ist symmetrisch, d.h.

$$\langle Su, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Sv\rangle_{L^2(\Omega)},$$

und kompakt, das Spektrum von S ist reell, und besteht aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die alle positiv sind.
(c) Die normierten Eigenfunktionen von S bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\Omega)$. (Verwenden Sie Aussagen aus der Theorie kompakter Operatoren.)

Aufgabe 43 Unter den Voraussetzungen der vorherigen Aufgabe ist der kleinste Eigenwert von L_0 einfach und die zugörige Eigenfunktionen hat keinen Vorzeichenwechsel.

Abgabe: 21.1.2011