Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen

Blatt 1

Aufgabe 1 Bei einer stationären Temperaturverteilung sollte die Temperatur $u(x)$ an der Stelle x gleich dem Mittelwert der Temperaturen in einer umgebenden Kugel sein:
Es sei Ω offen und $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, so dass die Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ ist, und u sei eine stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Ω.
Man zeige:

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x_0))} \int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)dx.$$

Dabei ist $\mu(B_\varepsilon(x_0))$ das Lebesgue-Maß der Kugel $B_\varepsilon(x_0)$).

Aufgabe 2 Man löse die Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

mit Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ und einer Anfangsauslenkung $u_0(x)$ der schwingende Saite durch Trennung der Veränderlichen (vgl. die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung in der Vorlesung). Ist die Lösung durch die Angaben eindeutig bestimmt? Falls nicht, überlege man sich weitere sinnvolle Forderungen, die die Lösung eindeutig machen.

Aufgabe 3 Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_x + u_y = 0$$

für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $v \in C^1(\mathbb{R})$ gilt: $u(x, y) = v(x - y)$ löst die Gleichung.

(b) Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ eine Lösung der Gleichung, dann gibt es ein $V \in C^1(R)$ mit $u(x, y) = v(x - y)$.

Aufgabe 4 Gegeben sei eine ebene quadratische, homogene Kartoffel, die oBdA das Gebiet $\Omega = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ ausfülle. Am Rand herrsche eine konstante Temperatur von $373, 15^0$ Grad Kelvin (entspricht 100^0 C). Die Kartoffel habe eine räumlich konstante Anfangstemperatur von $283, 15^0$ K. Die Wärmeleitzahl setzen wir $k = 1$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen $\sin(\nu x)\sin(\mu y), \sin(\nu x)\cos(\mu y), \cos(\nu x)\sin(\mu y)$ und $\cos(\nu x)\cos(\mu y)$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ sind Eigenfunktionen von Δ auf Ω.

(b) Ist $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ und gilt für jede der oben beschriebenen Funktionen g

$$\int_\Omega fg \, d(x,y) = 0$$

so ist $f = 0$. (Verwenden Sie eine entsprechende Eigenschaft für Funktionen auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ und überlegen Sie sich die Bedeutung dieser Eigenschaft für das Lösen der Wärmeleitungsgleichung).

(c) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung für die entsprechenden Daten und schätzen Sie ab, wann die Temperatur an jedem Punkt der Kartoffel mindestens 80^0 C beträgt.

(d) Plotten Sie für $t = 10, 20$ relevante Höhenlinien der Temperatur (mittels matlab oder Octave).

Abgabe: 29.10.2010