Ziel:

$$Lu = f$$

L elliptisch, $f \in L^2$ plus Randbedinungen.
Gesucht in dieser Allgemeinheit $u \in H^2$.

$$\begin{aligned} Lu = f &\iff Lu - f = 0 \\ &\iff \langle Lu - f, \varphi \rangle = 0 \ \ \forall \varphi \in L^2. \end{aligned}$$

Erste Modifikation

Schwächer, hinreichend

$$\langle Lu - f, \varphi \rangle = 0 \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

denn C_0^∞ ist dicht in L^2.
Ist L in Divergenzform ($\rightarrow$ Detail: wie erhält man Divergenzform)

$$\begin{aligned} Lu = \sum_i \left(D_i \sum_j a^{ij} D_j u + b^i u \right) \\ + \sum_i c^i D_i u + du \end{aligned}$$

so kann dies umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Lu, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle \\ &= -\sum_i \langle \sum_j a^{ij} D_j u + b^i u, D_i \varphi\rangle \\ &\quad + \cdots - \langle f, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

In dieser Formulierung treten nur noch erste Ableitungen auf, also suchen wir nun ein $u \in H^1$. Integration der Randwerte in die Aufgabenstellung $\Rightarrow u \in H_0^1$) ($\rightarrow$ Detail: wie behandelt man andere Dirichletbedingungen)

Nun kann man in dieser letzten Form statt $\varphi \in C_0^\infty$ auch $v \in H_0^1$ einsetzen, d.h. man erhält

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_i \langle \sum_j a^{ij} D_j u + b^i u, D_i v\rangle \\ &\quad + \cdots - \langle f, v\rangle, \end{aligned}$$

für alle $v \in H_0^1$. Damit definiert man eine **Bilinearform**

$$\begin{aligned} B_L(u, v) &= -\sum_i \langle \sum_j a^{ij} D_j u + b^i u, D_i v\rangle \\ &\quad + \cdots + \langle du, v\rangle. \end{aligned}$$

Die zu lösende Gleichung lautet nun

$$B_L(u, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in H_0^1$$

wobei eine Funktion $u \in H_0^1$ gesucht wird. (Lösung mit $\longrightarrow$ Satz von Lax-Milgram)

Der Satz von Lax -Milgram:

Satz. Es sei X ein Hilbertraum, $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Ist B beschränkt und $\to$ koerziv, so gibt es zu jedem beschränkten linearen Funktional $x^* \in X^*$ ein $y \in X$ mit $B(y, x) = x^*(x)$.

Für uns ist

$$X = H_0^1$$

B die durch den elliptischen Operator gegebene Bilinearform. Der Satz sagt nun, dass zu jedem $x^* \in X^*$ ein $u \in X$ existiert mit

$$B(u, v) = x^*(v).$$

Beachte: Spezielle x^* sind Abbildungen

$$v \mapsto \langle f, v \rangle.$$

Allgemein kann man dies so schreiben es existiert eine Abbildung

$$K : X^* \to X : x^* \mapsto u.$$

Diese Abbildung ist linear und beschränkt.

Beachte: Wir können nicht nur die speziellen rechten Seiten $v \mapsto \langle f, v \rangle$ einsetzen, sondern beliebige Funktionale in X^* (Detail $\to$ $f + \sum_i D_i g^i$, $g^i \in L^2$ (Vergleiche Übungsaufgabe L^2 dicht in $(H_0^1)^*$)

Beachte: Auch bei stark elliptischen, gleichmäßig elliptischen Operatoren mit

(4.2.5) ist die zugeordnete Form i.a. <u>nicht</u> koerziv. Daher: betrachte $L_\sigma u = Lu - \sigma$. Für hinreichend großes σ ist die zugeordnete Form koerziv und der Satz von Lax-Milgram anwendbar.

Zweite Modifikation

$$L_\sigma u = L_{\sigma_0} u + (\sigma_0 - \sigma) u.$$

Unsere Gleichung lautet nun (etwas abstrahiert)

$$L_\sigma u = x^*$$

oder

$$L_{\sigma_0} u + (\sigma_0 - \sigma) u = x^*$$

Schreiben wir

$$\overset{-1}{L_{\sigma_0}} : (H_0^1)^* \to H_0^1$$

für den vom Satz von Lax-Milgram definierten Lösungsoperator, so erhalten wir zunächst formal

$$\mathbb{1} u + (\sigma_0 - \sigma) \overset{-1}{L_{\sigma_0}} u = \overset{-1}{L_{\sigma_0}} x^*.$$

Nun ist aber $u \in H_0^1$ und nicht in $(H_0^1)^*$, also $\overset{-1}{L_{\sigma_0}} u$, sollte ersetzt werden durch $\overset{-1}{L_{\sigma_0}} \mathbb{I} u$, wobei $\mathbb{I} : H_0^1 \longrightarrow (H_0^1)^*$ die Einbettungsabbildung ist, wir erhalten also die Gleichung

$$\mathbb{1}u + (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u = L_{\sigma_0}^{-1}x^*,$$

mit kompaktem $\mathbb{I}$ dadurch hat man eine Gleichung der Form

$$\mathbb{1}u + (\sigma_0 - \sigma)Tu = L_{\sigma_0}^{-1}x^*$$

mit kompaktem T.

$\mathbb{1}+sT$ ist also Fredholm-Operator vom Index 0, d.h. die Dimension des Kernes bestimmt die Kodimension des Bildes und es gilt sogar, dass $R(\mathbb{1}+sT)$ abgeschlossen ist (Übungsaufgabe), also

$$R(\mathbb{1}+sT) = (\ker(\mathbb{1}+sT)^*)^\perp$$

Kennen wir $\ker(\mathbb{1}+sT)^*$, so können wir das gesamte Bild bestimmen, dies ist die Aussage des letzten Satzes.

Satz.
Für einen beschränkten linearen Operator $S : X \to Y$ gilt
$$\overline{R(S)} = \ker(S^*)^\perp.$$
BEWEIS. $R(S) \subset \ker(S^*)^\perp$:

Für alle $x \in X$ und $y^* \in \ker(S^*)$ gilt
$$y^*(Sx) = S^*y^*(x) = 0.$$
Also gilt die obenstehende Inklusion. Die rechte Seite in dieser Inklusion ist abgeschlossen, also ist der Abschluss der linken Seite immer noch in der rechten Seite enthalten.

$\ker(S^*)^\perp \subset \overline{R(S)}$:
Man beachte, dass es zu jedem $y \notin \overline{R(S)}$ ein $y^* \in Y^*$ gibt, mit y^* verschwindet auf $\overline{R(S)}$ und $y^*(y) = 1$ (Satz von Hahn-Banach). Dann ist aber jedes Element außerhalb $\overline{R(S)}$ auch nicht in $\ker(S^*)^\perp$ und damit $\ker(S^*)^\perp \subset \overline{R(S)}$.