

# Kapitel 5

## Parabolische Gleichungen

### 5.1 Analytische Halbgruppen

**Definition 5.1.1** Eine Familie  $\{T(t) \mid t \geq 0\}$  beschränkter linearer Operatoren auf einem Banachraum  $X$  heißt stark stetige Halbgruppe, falls gilt

- (i)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ ,  $t, s > 0$ ,
- (ii)  $T(0) = \mathbb{1}$ ,
- (iii) für jedes  $x \in X$  ist  $t \mapsto T(t)x$  stetig.

**Definition 5.1.2** (i)  $D \subset X$  ist definiert durch

$$D = \left\{ x \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existiert} \right\}.$$

(ii) Definiere für  $x \in D$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

$A$  heißt infinitesimaler Erzeuger der Halbgruppe  $T(t)$ .

(iii) Man sagt,  $A : X \rightarrow X$  erzeugt eine stark stetige Halbgruppe, falls  $A$  mit dem infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe zusammenfällt.

**Lemma 5.1.3** Sei  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger  $A$ . Ist  $x \in D(A)$ , so gilt  $T(t)x \in D(A)$  für alle  $t \geq 0$  und man hat  $AT(t)x = T(t)Ax$ .

**Beweis:** Ist  $x \in D(A)$ , so gilt

$$T(t) \frac{T(h)x - x}{h} = \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}$$

$$\downarrow_{h \rightarrow 0} \quad \downarrow_{h \rightarrow 0}$$

$$T(t)Ax \quad AT(t)x.$$

Damit ist  $T(t)x \in D(A)$  und  $T(t)Ax = AT(t)x$ . □

**Satz 5.1.4** Ist  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger  $A$ , so gilt für jedes  $x \in D(A)$

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

**Beweis:** Nach Lemma 5.1.3 ist für  $x \in D(A)$  auch  $T(t)x \in D(A)$  und es gilt  $AT(t)x = T(t)Ax$ . Ist  $t > 0, h > 0$  so folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} T(t) \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax = AT(t)x$$

□

**Definition 5.1.5** Eine stark stetige Halbgruppe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  heißt analytische Halbgruppe, falls die Zuordnung  $t \rightarrow T(t)x$  für alle  $x \in X$  reell analytisch ist.

**Definition 5.1.6** Ein linearer Operator  $A : X \rightarrow X$  mit  $D(A) \subset X$  wird als vom Typ  $(\Phi, M)$ ,  $\Phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $M > 0$ , bezeichnet, falls

- (i)  $A$  abgeschlossen und  $D(A)$  dicht in  $X$  ist,
- (ii) die Resolventenmenge von  $A$

$$S_\Phi = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \frac{1}{2}\pi - \Phi < \arg(z) < \frac{3}{2}\pi + \Phi \right\}$$

umfaßt und für alle  $\lambda \in S_\Phi$  die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \quad (5.1.1)$$

gilt.

Der Operator  $A$  heißt sektoriell, falls es ein  $\tau \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $A - \tau\mathbb{1}$  ist vom Typ  $(\Phi, M)$ .

**Lemma 5.1.7** Es sei  $A$  abgeschlossen,  $u : [0, T) \rightarrow X$  stetig, so daß  $u(s) \in D(A)$   $\forall s \in [0, T)$  und  $s \rightarrow Au(s)$  auf  $[0, T)$  stetig ist. Wir nehmen an, daß die uneigentlichen Integrale  $\int_0^T u(s)ds, \int_0^T Au(s)ds$  existieren. Dann ist  $\int_0^T u(s)ds \in D(A)$  und

$$A \int_0^T u(s)ds = \int_0^T Au(s)ds. \quad (5.1.2)$$

**Beweis:** Die Integrale von 0 bis  $\bar{T}$  werden für  $\bar{T} < T$  mittels Riemann Summen definiert. Aus der Abgeschlossenheit von  $A$  und der Tatsache, daß das Integral

$$\int_0^{\bar{T}} Au(s)ds \text{ (wegen der Stetigkeit von } Au(s))$$

existiert folgt, daß  $\int_0^{\bar{T}} u(s)ds \in D(A)$  und die obige Gleichung 5.1.2 mit  $T$  durch  $\bar{T}$  ersetzt gilt. Erneute Anwendung der Definition von Abgeschlossenheit liefert das Ergebnis.  $\square$

**Satz 5.1.8 (Hille, Phillips, Yosida)** *Es sei  $A$  dicht definierter und abgeschlossener linearer Operator. Dann gilt:  $A$  ist genau dann Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe, wenn es reelle Konstanten  $M, \beta > 0$  gibt, so daß*

$$(i) \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi > \beta\} \subset R(A),$$

$$(ii) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \|R(\xi, A)^n\| \leq M(\xi - \beta)^{-n}.$$

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “ Für  $\xi > \beta$  sind die Operatoren  $Q_\xi = -\xi(1 - \xi R(\xi, A))$  definiert und beschränkt. Einsetzen in die Exponentialreihe ergibt

$$\exp(tQ_\xi) = \exp(-\xi t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 t)^n}{n!} (R(\xi, A))^n.$$

Damit hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\exp(tQ_\xi)\| &\leq M \exp(-\xi t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 t)^n}{n!} (\xi - \beta)^{-n} \\ &= M \exp(-\xi t) \exp(\xi^2 t (\xi - \beta)^{-1}) \\ &= M \exp(\xi \beta t (\xi - \beta)^{-1}) \\ &\leq M \exp(t\omega) \end{aligned}$$

für  $\omega > \beta$  und  $\xi$  genügend groß, da

$$\xi \beta (\xi - \beta)^{-1} = \beta (1 - (\beta/\xi)^{-1}) > \beta \rightarrow \beta \text{ für } \beta > 0 \text{ und } \xi \rightarrow \infty.$$

Für  $x \in D(A)$  und  $\xi \rightarrow \infty$  gilt  $Q_\xi \rightarrow Ax$ :  
wir betrachten

$$-R(\xi, A)Ax = R(\xi, A)(\xi 1 - A)x - \xi R(\xi, A)x = x - \xi R(\xi, A)x, \quad (5.1.3)$$

also gilt für  $x \in D(A)$

$$\|\xi R(\xi, A)x - x\| = \|R(\xi, A)Ax\| \leq M \|Ax\| (\xi - \beta)^{-1} \rightarrow 0 \text{ für } \xi \rightarrow \infty. \quad (5.1.4)$$

Da  $\xi R(\xi, A)x$  wegen (ii) für  $\xi > \xi_0 > \beta$  gleichmäßig in  $\xi$  beschränkt ist, folgt aus  $D(A)$  dicht in  $X$  und  $\xi R(\xi, A)x \rightarrow x$  für  $\xi \rightarrow \infty$  und  $x \in D(A)$ , daß  $\xi R(\xi, A)x \rightarrow x$  für  $\xi \rightarrow \infty \forall x \in X$ . Multipliziert man (5.1.3) mit  $-\xi$ , so hat man für  $x \in D(A)$

$$\xi R(\xi, A)Ax = Q_\xi x.$$

Also gilt (mit (5.1.4))

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} Q_\xi x = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi R(\xi, A)Ax = Ax.$$

(hier ist es wichtig, daß (5.1.4) für alle  $x \in X$  richtig ist, da i.a.  $Ax \notin D(A)$ ). Wir definieren

$$S_\xi(t) = \exp(tQ_\xi).$$

Da die Resolventen an zwei verschiedenen Argumenten miteinander vertauschen, haben wir  $Q_\xi Q_\zeta = Q_\zeta Q_\xi$  und damit auch  $Q_\zeta S_\xi(t) = S_\xi(t)Q_\zeta$ . Von dieser Gleichung ausgehend, können wir die Konvergenz der  $S_\xi(t)$  untersuchen. Für  $x \in D(A)$  gilt

$$S_\xi(t)x - S_\zeta(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds}(S_\zeta(t-s)S_\xi(s))x ds = \int_0^t (S_\zeta(t-s)S_\xi(s))(Q_\xi - Q_\zeta)x ds.$$

Sind nun  $\xi$  und  $\zeta$  genügend groß, so können wir  $\|S_\zeta(t-s)S_\xi(s)\| < M^2 \exp(\omega t)$  abschätzen und erhalten insgesamt:

$$\|S_\xi(t)x - S_\zeta(t)x\| < M^2 t \|(Q_\xi - Q_\zeta)x\| \exp(\omega t) \quad \forall x \in D(A). \quad (5.1.5)$$

Da  $Q_\xi x \rightarrow Ax$  für  $x \in D(A)$  und  $\xi \rightarrow \infty$  konvergiert, wird die rechte Seite, für  $\xi, \zeta$  genügend groß, beliebig klein. Wegen der Dichtheit von  $D(A)$  und der Beschränktheit von  $S_\xi(t) - S_\zeta(t)$  existiert der Grenzwert  $\lim_{\xi, \zeta \rightarrow \infty} \|S_\xi(t)x - S_\zeta(t)x\| = 0$  für alle  $x \in X$ .

Deshalb existiert der Grenzwert  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} S_\xi(t) = S(t)$ .

Offensichtlich hat man die Abschätzung  $\|S(t)\| \leq M \exp(\omega t)$ . Wegen (5.1.5) hat man für  $x \in D(A)$  eine gleichmäßige Konvergenz der  $S_\xi(\cdot)x$  gegen  $S(\cdot)x$  auf beschränkten Intervallen. Gleichmäßige Beschränktheit der  $S_\xi$  auf beschränkten Intervallen und Dichtheit von  $D(A)$  ermöglicht es, diese Gleichmäßigkeit für alle  $x \in X$  zu zeigen:

seien  $x \in X, I \subset \mathbb{R}_+$  eine beschränkte Teilmenge und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir finden  $y \in D(A)$  mit  $\|x - y\| < \delta = \frac{1}{4}\varepsilon M \exp(-\omega T)$ ,  $T = \sup I$ . Sei  $t \in I$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \|S(t)x - S_\xi(t)x\| &\leq \|S(t)x - S(t)y\| + \|S(t)y - S_\xi(t)y\| + \|S_\xi(t)y - S_\xi(t)x\| \\ &\leq \delta M \exp(\omega T) + \delta + \delta M \exp(\omega T) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

solange nur  $\xi > \xi(\delta, y)$ , das so gewählt wird, daß der mittlere Ausdruck  $< \delta$  wird.

Die Halbgruppeneigenschaft von  $S(t)$  folgt sofort aus der für  $S_\xi(t)$ . Es folgt daher, daß  $S(t)$  eine stark stetige Halbgruppe ist. Zu zeigen bleibt, daß ihr Erzeuger  $\bar{A}$  mit

$A$  zusammenfällt.

1. Schritt:  $\bar{A} \supset A$ .

Sei  $x \in X$  und  $t > 0$ . Dann gilt  $S_\xi(t)x - x = \int_0^t \frac{d}{ds} S_\xi(s)x ds = \int_0^t S_\xi(s)Q_\xi x ds$ . Für  $x \in D(A)$  und  $0 \leq s \leq t$  gilt

$$\begin{aligned} \|S_\xi(s)Q_\xi x - S(s)Ax\| &\leq \|S_\xi(s)Q_\xi x - S_\xi(s)Ax\| + \|S_\xi(s)Ax - S(s)Ax\| \\ &\leq \|S_\xi(s)\| \|Q_\xi x - Ax\| + \|(S_\xi(s) - S(s))Ax\| \\ &\leq M \exp(\omega t) \|Q_\xi x - Ax\| + \|(S_\xi(s) - S(s))\| \|Ax\|. \end{aligned}$$

Deshalb konvergiert der Integrand für  $x \in D(A)$  gleichmäßig gegen  $S(t)A$ . Also hat man

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)A x ds \text{ solange nur } x \in D(A).$$

Es folgt (Division durch  $t$ ,  $t \rightarrow 0$ )  $\bar{A} \supset A$ .

2. Schritt:  $\bar{A} = A$ .

Ist  $R(\bar{A}) \cap R(A) \neq \emptyset$ , so hat man für ein  $z \in R(\bar{A}) \cap R(A)$ , daß

$$(z\mathbb{1} - \bar{A})D(A) = (z\mathbb{1} - A)D(A) = X \text{ und } (z\mathbb{1} - \bar{A})D(\bar{A}) = X.$$

Wegen der Injektivität von  $(z\mathbb{1} - \bar{A})$  und der schon gezeigten Beziehung

$$D(\bar{A}) \supset D(A)$$

folgt die Gleichheit beider Mengen. Um ein gemeinsames Element beider Resolventenmengen zu finden, zeigen wir, daß genügend große reelle Zahlen in  $R(\bar{A})$  liegen. Sei  $\lambda > \omega$  und

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) S(t)x dt, \quad x \in X. \quad (5.1.6)$$

Wegen des Wachstums von  $\|S(t)\|$  ist dieses Integral konvergent und definiert einen beschränkten linearen Operator. Man betrachte für

$$A_\xi x = \frac{S(\xi)x - x}{\xi}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} A_\xi R(\lambda)x &= \frac{S(\xi)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{\xi} \\ &= \xi^{-1} \int_0^\infty \exp(-\lambda t) S(t+\xi)x dt - \xi^{-1} \int_0^\infty \exp(-\lambda t) S(t)x dt \\ &= \left[ \frac{\exp(\lambda\xi) - 1}{\xi} \right] \int_0^\infty \exp(-\lambda t) S(t)x dt - \left[ \frac{\exp(\lambda\xi)}{\xi} \right] \int_0^\xi \exp(-\lambda t) S(t)x dt. \end{aligned}$$

Mit  $\xi \rightarrow 0$  konvergiert die linke Seite gegen  $\overline{A}R(\lambda)x$ , die rechte gegen  $\lambda R(\lambda)x - x$ . Also ist

$$R(\lambda)x \in D(\overline{A}) \text{ und } (\lambda \mathbb{1} - \overline{A})R(\lambda)x = x \quad \forall x \in X.$$

Es gilt dann

$$\overline{A}R(\lambda)x = \overline{A} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) S(t)x dt = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) S(t) \overline{A}x dt = R(\lambda) \overline{A}x.$$

Für  $x \in D(\overline{A})$  gilt dann  $R(\lambda)(\lambda \mathbb{1} - \overline{A})x = x$ . Daher ist  $R(\lambda)$  die Inverse von  $(\lambda \mathbb{1} - \overline{A})$ . Wir haben also gezeigt, daß die Bedingung aus dem Satz hinreichend ist.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $T(t)$  eine entsprechende Halbgruppe. Wegen der Halbgruppeneigenschaft ist die Funktion

$$g(t) = \log(\|T(t)\|)$$

subadditiv. Sei  $t_0 \in (0, \infty)$  fest. Dann kann jedes  $t \in \mathbb{R}_+$  in der Form  $t = nt_0 + s$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq s < t_0$  geschrieben werden. Damit gilt

$$\frac{g(t)}{t} \leq \frac{ng(t_0)}{t} + \frac{g(s)}{t} \rightarrow \frac{g(t_0)}{t_0} \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Daher existierten  $M, \gamma > 0$  mit

$$\|T(t)\| < M \exp(\gamma t).$$

Die obige Rechnung zeigt, daß

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) T(t)x dt.$$

Die Resolventengleichung lautet:  $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$ . Deshalb kann man  $R(\lambda, A)$  nach  $\lambda$  differenzieren und erhält

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2.$$

Induktion ergibt

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}.$$

Nun kann man die Ableitung von  $R(\lambda, A)$  mittels der Definition (5.1.6) ausrechnen und in die eben erhaltene Gleichung einsetzen. Man hat dann

$$R(\lambda, A)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) t^{n-1} T(t) dt.$$

Übergang zur Norm liefert:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \exp(-(\lambda - \gamma)t) dt = \frac{M}{(\lambda - \gamma)^n}.$$

Damit ist die Bedingung aus dem Satz nachgewiesen.  $\square$

Ein entsprechender Satz gilt auch für analytische Halbgruppen.

**Satz 5.1.9** *Ist  $A$  sektoriell, so erzeugt  $(-A)$  eine analytische Halbgruppe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  und es gilt:*

(i)  $AT(t)$ ,  $\frac{d}{dt}T(t)$  sind für  $t > 0$  beschränkte lineare Operatoren mit

$$\frac{d}{dt}T(t)x = -AT(t)x \quad \forall x \in X, t > 0.$$

(ii)  $T$  läßt sich zu einer analytischen Funktion fortsetzen, die auf einem Sektor  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \varphi_1\}$  definiert ist, und der die positive reelle Halbachse umfaßt. Dort gilt die Halbgruppeneigenschaft.

(iii) Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß für alle  $t \in S$  gilt  $\|T(t)\| \leq C \exp(-at)$  und  $\|AT(t)\| \leq \frac{C}{|t|} \exp(-at)$ .

**Bemerkung 5.1.10** *Die Umkehrung ist auch richtig, d.h. ist  $A$  Erzeuger einer analytischen Halbgruppe, so ist  $-A$  sektoriell.*

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $\tau = 0$ . Andernfalls betrachten wir  $A_0 = A - \tau 1$ . Dann genügt  $A_0$  den Voraussetzungen und erzeugt eine Halbgruppe  $T_0(t)$ , wie gleich gezeigt werden wird. Dann hat die Halbgruppe  $T(t) = \exp(-\tau t)S_0(t)$  die behaupteten Eigenschaften.

Sei also  $A$  vom Typ  $(M, \Phi)$ . In der Resolventenmenge von  $-A$  definieren wir folgendermaßen eine Kurve  $\Gamma$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{die beiden Strahlen } \{r \exp(\pm i\phi_0) \mid 1 \leq r < \infty\} \\ \text{den Kreisbogen } \{\exp(i\phi) \mid -\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0\} \end{array} \right\} \frac{\pi}{2} < \phi_0 < \frac{\pi}{2} + \Phi,$$

wobei  $\Phi$  der Winkel aus der Definition des Operators vom Typ  $(\Phi, M)$  ist.

Wir wollen annehmen, daß für ein genügend kleines  $\varepsilon > 0$  sogar gilt, daß  $\phi_0 > \frac{\pi}{2} + \Phi - \varepsilon$ . Die Größe dieser Zahl ist nur für die Größe des Sektors wichtig auf dem die Holomorphie von  $T(t)$  gezeigt werden kann.

Wir definieren für  $t$  mit  $|\arg t| < \Phi - \varepsilon$ ,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, -A) \exp(\lambda t)x d\lambda.$$

Wir werden alternativ für  $T(t)$  auch  $e^{-At}$  oder  $\exp(-At)$  schreiben. Die Rechtfertigung dieser Notation ergibt sich aus den Eigenschaften der Halbgruppe.

Als erstes gilt es, die Existenz dieses Integrals zu zeigen. Dabei sei die Orientierung von  $\Gamma$  so festgelegt, daß  $\sigma(-A)$  zur Linken liegt. Der Integrand ist eine stetige Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(X)$ , wobei  $\mathcal{B}(X)$  die Banach-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf  $X$  ist. Deshalb existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  das Integral über  $\Gamma_n = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$ . Wegen der Abschätzung für die Resolvente existiert das Integral über  $\Gamma$  und stellt einen beschränkten linearen Operator dar. Nun sei  $\Gamma_0$  eine Kurve, die aus  $\Gamma$  durch Translation nach rechts um ein  $\varepsilon_0 > 0$  entsteht, so daß das obige uneigentliche Integral längs  $\Gamma_0$  existiert. Um einen Schnitt der beiden Kurven zu verhindern, kann man den Radius des Kreisbogens um die Null etwas vergrößern. Sei  $f \in X^*$  ein stetiges lineares Funktional, dann ist

$$f(R(\lambda, -A) \exp(\lambda t)x)$$

holomorph in  $\lambda$ . Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(R(\lambda, -A) \exp(\lambda t)x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} f(R(\lambda', -A) \exp(\lambda' t)x) d\lambda'.$$

Dies gilt für jedes  $f \in X^*$  und jedes  $x \in X$ . Daher sind die mittels  $\Gamma$  bzw.  $\Gamma_0$  definierten Operatoren gleich. Deshalb kann man zum Nachweis der Halbgruppeneigenschaft folgendermaßen vorgehen:

$$\exp(-tA) \exp(-sA) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_0} R(\lambda, -A) R(\lambda', -A) \exp(\lambda t + \lambda' s) d\lambda' d\lambda.$$

Mit der Resolventengleichung (s. S. Beweis des Hille-Phillips-Yosida Satzes) erhält man (man beachte, daß für  $\lambda \in \Gamma$  und  $\lambda' \in \Gamma_0$  immer  $\lambda \neq \lambda'$  gilt)

$$T(t)T(s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_0} (R(\lambda, -A) - R(\lambda', -A))(\lambda' - \lambda)^{-1} \exp(\lambda t + \lambda' s) d\lambda' d\lambda.$$

Nun wendet man den Cauchyschen Integralsatz erneut an und erhält, daß

$$\int_{\Gamma_0} \exp(\lambda t)(\lambda' - \lambda)^{-1} d\lambda = 0 \text{ für } \lambda' \in \Gamma_0.$$

Mit dem Residuensatz (oder durch explizites Ausrechnen) findet man

$$\int_{\Gamma_0} \exp(\lambda' s)(\lambda' - \lambda)^{-1} d\lambda' = 2\pi i \exp(\lambda s) \text{ für } \lambda \in \Gamma.$$

Zusammen genommen ergibt dies

$$\exp(-tA) \exp(-sA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda(t+s)) R(\lambda, -A) d\lambda = \exp(-(t+s)A).$$

Aufgrund der Abschätzung für die Resolvente eines sektoriellen Operators erhält man

$$\|R(\frac{\lambda}{|t|}, -A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} |t| \text{ falls } t \neq 0 \text{ und } \lambda \in \Gamma.$$

Wir modifizieren die Kurve  $\Gamma$  durch  $\Gamma' = \{ |t|\lambda \mid \lambda \in \Gamma \}$ . Wegen des Cauchyschen Integralsatzes stimmen die obigen Integrale über  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  überein. Also gilt ( $\lambda' = |t|\lambda$ ,  $t = |t| \exp(i\phi)$ ,  $\gamma = \exp(i\phi)$ )

$$\exp(-tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda\gamma|t|) (R(\lambda, -A)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \exp(\lambda'\gamma) R(\frac{\lambda'}{|t|}, -A) \frac{d\lambda'}{|t|}.$$

Wir setzen die zuvor hergeleitete Abschätzung für  $R(\frac{\lambda'}{|t|}, -A)$  hier ein:

$$\|\exp(-tA)\| \leq M \int_{\Gamma'} |\exp(\lambda'\gamma)| \frac{d\lambda'}{|\lambda'|} \leq C_0(\gamma).$$

Betrachtet man  $A + \varepsilon \mathbb{1}$  für kleines  $\varepsilon$  erhält man das exponentielle Verhalten. Da  $A$  abgeschlossen ist, kann man  $A$  in das Integral über  $\Gamma$  hineinziehen (ein ähnliches Argument hatten wir schon mehrfach). Daher haben wir einen Ausdruck für  $A \exp(-At)$  durch

$$A \exp(-At) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda'\gamma) A R(\frac{\lambda'}{|t|}, -A) \frac{d\lambda'}{|t|}.$$

Um die Konvergenz dieses Integrals zu zeigen, schreibt man

$$A = (A + \frac{\lambda'}{|t|} \mathbb{1}) - \frac{\lambda'}{|t|} \mathbb{1}.$$

Einsetzen ergibt für die Norm

$$\|A \exp(-At)\| \leq \frac{C}{|t|}.$$

nämlich:

$$A \exp(-At) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda'\gamma) (\mathbb{1} - \frac{\lambda'}{|t|} R(\frac{\lambda'}{|t|}, -A)) \frac{d\lambda'}{|t|},$$

und der Übergang zur Norm ergibt

$$\|A \exp(-At)\| \leq \int_{\Gamma'} |\exp(\lambda'\gamma)| (1 + M) \frac{d\lambda'}{|t|}.$$

Aus der Integraldarstellung für die Halbgruppe  $\exp(-tA)$  folgt unmittelbar die komplexe Differenzierbarkeit, da die Exponentialfunktion komplex differenzierbar ist und der abgeleitete Integrand gleichmäßig konvergiert. Es ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d}{dt} \exp(-tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda R(\lambda, -A) \exp(\lambda t) d\lambda.$$

Nun ist  $\lambda R(\lambda, -A) = (A + \lambda - A)R(\lambda, -A) = \mathbb{1} - AR(\lambda, A)$  und  $\int_{\Gamma} \exp(\lambda t) d\lambda = 0$ .

Also hat man

$$\frac{d}{dt} \exp(-tA) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} AR(\lambda, -A) \exp(\lambda t) d\lambda.$$

Die Abgeschlossenheit von  $A$  erlaubt uns  $A$  herauszuziehen und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \exp(-tA) = -A \exp(-tA).$$

Für  $x \in D(A)$  erhält man in gleicher Weise:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(-tA)x &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} AR(\lambda, -A) \exp(\lambda t)x d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, -A) \exp(\lambda t)(-A)x d\lambda \\ &= \exp(-tA)(-A)x. \end{aligned}$$

Um  $\lim_{t \rightarrow 0} \exp(-tA)x = x$  für alle  $x \in X$  nachzuweisen, nutzen wir wieder den Cauchyschen Integralsatz ( $\Gamma$  umschließt 0):

$$\exp(-tA)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda t)(R(\lambda, -A)x - \frac{1}{\lambda}x) d\lambda.$$

Wegen der obigen Gleichung  $\lambda R(\lambda, -A) = (A + \lambda \mathbb{1} - A)R(\lambda, -A) = \mathbb{1} - AR(\lambda, -A)$  ergibt sich für  $x \in D(A)$

$$\exp(-tA)x - x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda t) R(\lambda, -A) Ax \frac{1}{\lambda} d\lambda.$$

Damit bekommen für  $x \in D(A)$

$$\|\exp(-tA)x - x\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(\lambda t) M \frac{1}{|\lambda|^2} d\lambda \|Ax\|.$$

Mit der Substitution  $\lambda t = \lambda'$  wird dies zu

$$\|\exp(-tA)x - x\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'} \exp(\lambda') M \frac{1}{|\lambda'|^2} t d\lambda' \|Ax\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0.$$

Da  $D(A) \subset X$  dicht liegt, folgt die Behauptung für jedes  $x \in X$  durch Approximation und aus der Tatsache, daß  $\exp(-tA)$  beschränkt ist. Als letzten Schritt müssen wir zeigen, daß  $-A$  der infinitesimale Erzeuger von  $\exp(-tA)$  ist. Dieser Beweis

wird wieder in zwei Schritten erbracht. Der zweite ist dabei identisch mit dem zweiten Schritt im entsprechenden Teil des Beweises des Hille-Phillips-Yosida Theorems. Der erste ist etwas einfacher:

$$\frac{\exp(-tA)x - x}{t} = -\frac{1}{t} \int_0^t \exp(-\tau A) d\tau Ax \rightarrow -Ax \text{ für } t \searrow 0.$$

□

## 5.2 Eigenschaften elliptischer Operatoren

Zur Erinnerung: Hat ein Operator  $A$  eine kompakte Resolvente, so gilt für alle  $\rho \in P(A)$   $(A - \rho \mathbb{1})^{-1}$  ist kompakt. Dies folgt aus der sogenannten Resolventengleichung

$$R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A).$$

**Bemerkung 5.2.1** *Im Folgenden benötigen wir Aussagen über Eigenschaften von elliptischen Operatoren der Form  $(L - \sigma \mathbb{1})$  für  $\sigma \in \mathbb{C}$ . Daher müssen wir die Operatoren auf komplexwertige Funktionen anwenden. Dies ist natürlich einfach, indem man die Operatoren getrennt auf Real- und Imaginärteil anwendet. Dann liegt es aber auch nahe, Operatoren mit komplexwertigen Koeffizienten zu betrachten. In diesem Fall definieren wir Elliptizität als*

$$\operatorname{Re}(A\xi, \xi) \geq \lambda \|\xi\|^2$$

und erkennen, daß Elliptizität wiederum die Koerzivität der zugeordneten Bilinearform für einen Operator der Form  $(L + \sigma \mathbb{1})$ ,  $\sigma$  reell und genügend groß, zur Folge hat. Da der Satz von Lax-Milgram nicht die Realität des Raumes gebraucht hat, folgt dann die Existenztheorie in der gleichen Weise. Auch bei der Regularitätstheorie brauchten wir nie explizit die Tatsache, daß die Funktionen reell sind. Daher gelten die gleichen Aussagen auch für elliptische Operatoren mit komplexen Koeffizienten und angewendet auf komplexwertige Funktionen.

**Satz 5.2.2** *Ist  $L$  stark elliptisch mit gleichmäßig Lipschitz-stetigen Koeffizienten  $a^{ij}$ ,  $b^i$  und wesentlich beschränkten Koeffizienten  $c^i$ ,  $d$ , so ist  $L$  als Operator von  $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  dicht definiert, abgeschlossen und hat kompakte Resolvente.*

**Beweis.** Der Definitionsbereich  $D(L)$  von  $L$  ist gegeben durch  $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  und ist damit dicht in  $L^2(\Omega)$ . Es sei  $\{u_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D(L)$ , welche bezüglich der  $L^2$ -Norm gegen  $u \in L^2(\Omega)$  konvergiere. Gleichzeitig sei  $v_\ell = Lu_\ell \rightarrow v$  im Sinne der  $L^2(\Omega)$ -Norm konvergent. Da

$$\|u_\ell - u_m\|_{2,2}^\Omega \leq C (\|v_\ell - v_m\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\ell - u_m\|_{L^2(\Omega)}),$$

folgt die Konvergenz der Folge in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Also ist  $u \in D(L)$ . Wäre  $Lu \neq v$ , so gäbe es eine Nullfolge  $\{u_\ell - u\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ , so daß  $L(u - u_\ell) \rightarrow v - Lu \neq 0$  konvergiert.

Dies widerspricht der apriori–Abschätzung. Wir haben bereits gesehen, daß  $L_\sigma$  für genügend großes  $\sigma \in \mathbb{R}$  eine kompakte Resolvente hat.  $\square$

Wir kommen nun zu einer Resolventenabschätzung, welche von großer weiterer Bedeutung sein wird.

**Satz 5.2.3** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{2m}$ . Ferner sei  $L$  stark elliptisch mit  $a^{ij} \in C(\overline{\Omega})$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  positive Konstanten  $C, \Lambda_0$ , so daß für  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  gilt*

$$|\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)} + |\lambda|^{1/2} \|u\|_{2,2}^\Omega + \|u\|_{2,2}^\Omega \leq \|(L + \lambda)u\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.2.7)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg(\lambda) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ,  $|\lambda| \geq \Lambda_0$ .

**Beweis.** Setze

$$L_0 = L - e^{i\theta} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Dann ist  $L_0$  elliptisch,  $L_0$  ist sogar auf jedem Zylinder

$$\Omega_T = \Omega \times \{t \mid |t| \leq T\}$$

stark elliptisch. Da  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^2$  ist, gibt es ein Gebiet  $\Omega^*$  mit  $\Omega_2 \subset \Omega^* \subset \Omega_3$  mit Rand von der Klasse  $C^2$ . Sei

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & t > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Setze

$$v(x, t) = u(x) e^{i\mu t} \zeta(t) \in H^2(\Omega^*) \cap H_0^1(\Omega^*)$$

für alle  $\mu \in \mathbb{R}$ . Aufgrund der apriori Abschätzung, angewendet für den Operator  $L_0$  erhält man

$$\|v\|_{2,2}^{\Omega^*} \leq C(\|L_0 v\|_{L^2(\Omega^*)} + \|v\|_{L^2(\Omega^*)}).$$

Daraus folgt dann

$$\|ue^{i\mu t}\|_{2,2}^{\Omega_1} \leq C\|Lu + \mu^2 e^{i\theta} u\|_{L^2(\Omega)} + c|\mu| \|u\|_{L^2(\Omega)} + c\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da

$$(\|ue^{i\mu t}\|_{2,2}^{\Omega_1})^2 = 2 \sum_{j=0}^2 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq j} |D^\alpha u|^2 |\mu|^{2(2-j)} \|u\|_{2,2}^\Omega,$$

erhält man aus der vorigen Abschätzung für  $|\mu| \geq \mu_0$ ,  $\mu_0$  genügend groß, das Resultat mit  $\lambda = \mu^2 e^{i\theta}$ .  $\square$

**Satz 5.2.4** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $L$  stark elliptisch und  $a^{ij} \in C(\overline{\Omega})$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Zahlen  $C, \Lambda_0 > 0$ , so daß für  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  die Ungleichung (5.1.7) für  $-\pi + \varepsilon < \arg(\lambda) < \pi - \varepsilon$  und  $|\lambda| > \Lambda_0$  erfüllt ist.*

**Beweis.** Betrachte den elliptischen Operator  $e^{i\mu} L$  und wende den vorigen Satz an.  $\square$

**Satz 5.2.5** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^2$ ,  $L$  stark elliptisch auf  $\Omega$  mit Koeffizienten  $a^{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $b^i \in C(\overline{\Omega})$ . Dann existieren  $k, C > 0$ , so daß die Resolventenabschätzung

$$\|(L - \lambda \mathbb{1})^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda| + 1}$$

für alle  $\lambda$  mit

$$\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} \leq \arg(\lambda + k) \leq \frac{3}{2}\pi \right\}$$

gilt.

**Beweis.** Es ist klar, daß im Bereich  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg(\lambda) \leq \frac{3}{2}\pi - \varepsilon$  für betragsmäßig genügend großes  $\lambda$  die Resolvente existiert und eine entsprechende Abschätzung gilt. Die Aussage folgt nun, wenn wir die folgenden Schritte beweisen:

(i) Für  $u \in D(L)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  gilt

$$\|Lu + (\sigma_0 + i\tau)u\|_{l_2} \geq c|\tau|\|u\|_{l_2}.$$

(ii) Gilt die Aussage des Satzes für  $\arg \lambda = \theta_0$ , so existiert ein  $\delta > 0$ , so daß die Aussage für  $|\arg \lambda - \theta_0| \leq \delta$  richtig ist.

(iii) Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $A$  ein abgeschlossener linearer Operator auf einem Banachraum  $X$  und  $c > 0$  eine Konstante, so daß für alle  $\lambda \in D$  gilt

$$\|Au - \lambda u\|_X \geq c\|x\|_X,$$

dann ist entweder  $D \cap P(A) = \emptyset$  oder  $D \subset P(A)$ .

Wir zeigen den ersten Schritt. Es gilt

$$\operatorname{Re}(\langle (L + (\sigma_0 + i\tau))u, u \rangle) \geq \sigma_0\|u\|_{l_2}^2 + c_0(\|u\|_{1,2}^\Omega)^2 - k_0\|u\|_{l_2}^2 = c_0(\|u\|_{1,2}^\Omega)^2,$$

falls wir  $\sigma_0 = k_0$  wählen. Außerdem gilt  $\langle Lu, u \rangle \leq C(\|u\|_{1,2}^\Omega)^2$ . Damit folgt

$$\operatorname{Im}(\langle (L + (\sigma_0 + i\tau))u, u \rangle) + \frac{C}{c_0}\operatorname{Re}(\langle (L + (\sigma_0 + i\tau))u, u \rangle) \geq c|\tau|\|u\|_{l_2}^2.$$

Insbesondere folgt hieraus die Behauptung (i). Die beiden restlichen Behauptungen sind einfach (?!). Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

## 5.3 Das Cauchy-Problem

Für zwei Klassen von abgeschlossenen, linearen Operatoren auf einem Banachraum  $X$  hatten wir die Lösbarkeit der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -Ax, \quad x(0) = x_0$$

untersucht. Nun wollen wir die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = -Ax + f(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.3.8)$$

für eine geeignete Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  betrachten. Dies ist natürlich ein erster Schritt zur Untersuchung des Anfangswertproblems für nichtlineare Gleichungen. Eine wesentliche Rolle spielt dabei die Formel der Variation der Konstanten. Dazu sei  $T(t)$  eine Halbgruppe linearer Operatoren mit infinitesimalem Erzeuger  $-A$ . Wir wollen der Frage nachgehen, ob die durch die nachstehende Gleichung definierte Abbildung  $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  eine Lösung von (5.3.9) darstellt:

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (5.3.9)$$

Geht man von einer stark stetigen Halbgruppe  $T(t)$  aus, und nimmt man an, daß  $x(\cdot)$  die Gleichung (5.3.9) löst, so ergibt sich für die Ableitung von  $T(t-s)x(s)$  nach  $s$ :

$$\frac{d}{ds}T(t-s)x(s) = AT(t-s)x(s) - AT(t-s)x(s) + T(t-s)f(s). \quad (5.3.10)$$

Integration dieser Gleichung zwischen 0 und  $t$  ergibt Gleichung (5.3.10). Damit ist (5.3.10) notwendig für eine Lösung von (5.3.9). Wir wollen noch zeigen, daß (5.3.10) auch eine solche Lösung definiert. Dazu ein Lemma.

**Lemma 5.3.1** *Sei  $T(t)$  eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger  $(-A)$  und entweder  $x \in D(A)$  oder  $A$  sektoriell. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i)

$$A \int_r^t T(s)x ds = (T(r) - T(t))x \text{ für } 0 \leq r \leq t,$$

(ii)

$$A \int_r^t T(t-s)x ds = (\mathbb{1} - T(t-r))x \text{ für } 0 \leq r \leq t.$$

*Insbesondere sind die Integrale in  $D(A)$ .*

**Beweis:** Die Tatsache, daß die Integrale in  $D(A)$  sind folgt aus der Abgeschlossenheit von  $A$  durch den schon öfters gezeigten Standardschluß. Dann zieht man den Operator unter das jeweilige Integral und die Aussage folgt sofort.  $\square$

**Satz 5.3.2** (i) *Sei  $(-A)$  Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $T(t)$  und sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  stetig differenzierbar. Dann ist für jedes  $x_0 \in D(A)$  die durch (5.3.10) gegebene Abbildung  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  stetig differenzierbar und löst (5.3.9).*

(ii) Ist  $A$  sektoriell und  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  Hölder-stetig mit Exponenten  $\kappa \leq 1$ , so löst die für  $x_0 \in X$  durch (5.3.10) gegebene Abbildung die Gleichung (5.3.9). Die Abbildung  $x(\cdot)$  ist stetig auf  $\mathbb{R}_+$  und stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .

**Bemerkung 5.3.3** Der Existenzsatz von Peano, welcher für gewöhnliche Differentialgleichungen die Lösbarkeit bei stetigen rechten Seiten garantiert, ist in Banachräumen, selbst bei stetigem  $A$  nicht gültig.

**Beweis:** (i) Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (5.3.10) erfüllt die homogene Differentialgleichung und nimmt für  $x_0 \in D(A)$  den Anfangswert an. Daher reicht es, zu zeigen, daß der zweite Term

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

für  $t \rightarrow 0$  verschwindet und bei  $t$  die Ableitung  $(-A)v(t) + f(t)$  besitzt. Es gilt

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t T(t-s) \left( f(0) + \int_0^s f'(r)ds \right) ds \\ &= \left( \int_0^t T(t-s)ds \right) f(0) + \int_0^t T(t-s) \int_0^s f'(r)dr ds \\ &= \left( \int_0^t T(t-s)ds \right) f(0) + \int_0^t \left( \int_r^t T(t-s)ds \right) f'(r)dr. \end{aligned}$$

Damit folgt aus Lemma 5.3.1, daß  $v(t) \in D(A)$  und

$$\begin{aligned} Av(t) &= (\mathbb{1} - T(t))f(0) + \int_0^t (\mathbb{1} - T(t-r)) f'(r)dr \\ &= f(t) - T(t)f(0) - \int_0^t T(t-r)f'(r)dr. \end{aligned}$$

Durch Substitution ergibt sich  $v(t) = \int_0^t T(s)f(t-s)ds$  und somit

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds.$$

Vergleicht man die beiden letzten Resultate, so erhält man  $v'(t) = (-A)v(t) + f(t)$ . Da  $f'$  stetig ist, folgt sofort, daß  $v$  stetig differenzierbar ist. Aus dem Beweis vom Satz von Hille Phillips Yosida ergibt sich eine exponentielle Schranke für das Wachstum der Halbgruppe:  $T(t) \leq M \exp(\omega t)$ . Daher konvergiert für  $t \rightarrow 0$  auch  $v(t) \rightarrow 0$ , denn

$$\|v(t)\| \leq 2Mt \sup \{\|f(t)\| \mid 0 \leq t \leq t_0\} \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow 0$  und ein  $t_0$  genügend klein.

(ii) Der Beweis dieses Teils ist nahezu identisch mit dem ersten Teil, insbesondere definieren wir die Funktion  $v$  wie gehabt. Wie eben reicht es zu zeigen, daß  $v(0) = 0$  ist und  $v$  die Differentialgleichung erfüllt. Durch Einschieben eines Terms ergibt sich aus

$$v(t) = \int_0^t T(t-r)f(r)dr$$

die Gleichung

$$v(t) = \int_0^t T(t-r)(f(r) - f(t))dr + \int_0^t T(t-r)dr f(t).$$

Eine erneute Anwendung von Lemma 5.3.1 ergibt  $v \in D(A)$  und

$$Av(t) = A \int_0^t T(t-r)(f(r) - f(t))dr + (\mathbb{1} - T(t))f(t). \quad (5.3.11)$$

Für den Integranden ergibt sich aus der Hölder-Stetigkeit von  $f$  die Abschätzung

$$\|AT(t-r)(f(r) - f(t))\| \leq C(t-r)^{-1}C_1(t-r)^\kappa.$$

Damit existiert dieses Integral und  $Av(t)$  besitzt die Darstellung (5.3.12). Wir benötigen diese, um zu beweisen, daß  $Av(t)$  stetig ist, was wir jetzt tun wollen.

Stetigkeit von  $Av(t)$ :

Der zweite Term in Gleichung (5.3.12) ist offenkundig stetig. Der erste Term werde mit  $w(t)$  bezeichnet, also

$$w(t) = A \int_0^t T(t-r)(f(r) - f(t))dr.$$

Wir schreiben  $w(t+h) - w(t) = w_1 + w_2 + w_3$  mit

$$w_1 = A \int_0^t (T(t+h-r) - T(t-r))(f(r) - f(t))dr$$

$$w_2 = A \int_0^t (T(t+h-r))(f(t) - f(t+h))dr$$

$$w_3 = A \int_t^{t+h} (T(t+h-r))(f(r) - f(t+h))dr.$$

Alle drei Ausdrücke werden unter Ausnutzung der Hölder-Stetigkeit leicht abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \|w_1\| &\leq \int_0^t \|A(T(t+h-r) - T(t-r))\| \|f(r) - f(t)\| dr \\ &= \int_0^t \left\| A \int_s^{s+h} T'(\eta) d\eta \right\| \|f(t-s) - f(t)\| ds \\ &\leq \int_0^t A^2 \left\| \int_s^{s+h} T(\eta) d\eta \right\| s^\kappa ds \\ &\leq \int_0^t \left( \int_s^{s+h} \frac{C}{\eta^2} d\eta \right) s^\kappa ds \\ &\leq Ch \int_0^t (s+h)^{-1} s^{-1+\kappa} ds \\ &\leq Ch^{\tilde{\kappa}} \quad (0 < \tilde{\kappa} < \kappa \leq 1). \end{aligned}$$

Für  $w_2$  erhält man

$$\|w_2\| \leq Ch^\kappa.$$

Ähnlich geht es mit  $w_3$ :

$$\begin{aligned} \|w_3\| &\leq \int_t^{t+h} \|AT(t+h-r)\| \|f(r) - f(t+h)\| dr \\ &\leq C \int_t^{t+h} (t+h-r)^{-1+\kappa} dr \\ &\leq Ch^\kappa \end{aligned}$$

Zurück zum eigentlichen Beweisgang: wir berechnen die rechtsseitige Ableitung  $D^+v(t)$  als Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(v(t+h) - v(t)) = -Av(t) + f(t)$  (?!). Dies ist stetig, man überlegt sich leicht, daß daher  $v'$  existiert und gleich  $D^+v$  ist. Daher ist der Satz gezeigt.  $\square$

Wir benötigen noch eine weitere Abschwächung der Voraussetzung. Wir wollen die Hölder-Stetigkeit von  $f$  nur im Bereich positiver  $t$  verlangen, die Regularität bei 0 wird durch die Existenz eines uneigentlichen Integrals ersetzt.

**Satz 5.3.4** *Ist  $f : (0, T) \rightarrow X$  Hölder-stetig und existiert für ein  $r > 0$  das uneigentliche Integral*

$$\int_0^r \|f(s)\| ds,$$

so hat das Problem (5.3.9) eine eindeutige Lösung, die durch (5.3.10) gegeben ist.

**Beweis:** Wir definieren  $v(t)$  wie zuvor. Dies hat dann die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $v$  ist stetig auf  $[0, T)$ ,
- (ii)  $v$  ist stetig differenzierbar auf  $(0, T)$ ,
- (iii)  $\frac{dv}{dt} + Av = f$ ,
- (iv)  $v(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ .

Zum Beweis dieser Eigenschaften definieren wir für ein  $\rho \in (0, r)$  die Funktion  $v_\rho(t)$  durch

$$\begin{aligned} v_\rho(t) &= \int_0^{t-\rho} \exp(-A(t-s)) f(s) ds \text{ für } \rho \leq t \leq T \\ v_\rho(t) &= 0 \text{ für } 0 \leq t < \rho. \end{aligned}$$

Wir setzen, um notationstechnische Probleme zu vermeiden,  $f(s) = 0$  für  $s < 0$ . Offensichtlich konvergiert für  $\rho \rightarrow 0$   $v_\rho$  gleichmäßig auf Kompakta  $[0, t_0] \subset [0, T)$  gegen  $v$ :

$$\|v_\rho(t) - v(t)\| \leq \int_{t-\rho}^t \|\exp(-(t-s)A)\| \|f(s)\| ds \rightarrow 0 \text{ gleichmäßig auf } [0, t_0].$$

Gleichermaßen ist die Stetigkeit von  $v_\rho$  klar: für die Differenz  $v_\rho(t+h) - v_\rho(t)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} v_\rho(t+h) - v_\rho(t) &= \int_0^{t+h-\rho} e^{-(t+h-s)A} f(s) ds - \int_0^{t-\rho} e^{-(t-s)A} f(s) ds \\ &= (e^{-hA} - \mathbb{1}) \int_0^{t-\rho} e^{-(t-s)A} f(s) ds + \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-(t+h-s)A} f(s) ds. \end{aligned}$$

Für  $h \rightarrow 0$  konvergieren beide Ausdrücke gegen 0. Daher ist  $v(t)$  auf  $[0, T)$  stetig und  $\|v(t)\| \leq \int_0^t \|e^{-(t-s)A}\| \|f(s)\| ds \rightarrow 0$  mit  $t \rightarrow 0$ . Damit sind die Punkte (i), (iv) gezeigt. Als nächstes wollen wir zeigen, daß  $v(t) \in D(A)$  ist. Wir beginnen wieder mit  $v_\rho(t)$ . Für jedes  $s \in (0, t)$  ist  $e^{-(t-s)A}f(s) \in D(A)$ . Dieser Ausdruck ist auf dem angegebenen Intervall stetig in  $s$ . Wir wenden  $A$  darauf an und fragen wieder nach Stetigkeit. Wir erhalten

$$Ae^{-(t-s+h)A}f(s+h) - Ae^{-(t-s)A}f(s) = (e^{-hA} - \mathbb{1})Ae^{-(t-s)A}f(s+h) + Ae^{-(t-s)A}(f(s+h) - f(s)).$$

Unter Ausnutzung der Hölder-Stetigkeit auf  $(0, T)$  wird die Norm dieses Ausdrucks klein. Damit folgt aus Lemma 5.1.7, daß  $v_\rho(t) \in D(A)$  ist und  $Av_\rho(t)$  durch

$$Av_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}f(s)ds$$

gegeben ist. Dies wird zu

$$\begin{aligned} Av_\rho(t) &= \int_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t) + f(t))ds \\ &= \int_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t))ds + \int_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}f(t)ds \\ &= \int_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t))ds + (e^{-A\rho} - e^{-At})f(t). \end{aligned}$$

Damit kann der Grenzübergang  $\rho \rightarrow 0$  durchgeführt werden und man erhält

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Av_\rho(t) = \int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t))ds + (\mathbb{1} - e^{-At})f(t).$$

Wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  ist  $v(t) \in D(A)$  und  $Av(t)$  durch den angegebenen Ausdruck gegeben. Eine einfache Rechnung ergibt, daß  $Av_\rho$  auf Kompakta gleichmäßig konvergiert.

Für  $t > \rho$  ist  $v_\rho(t)$  differenzierbar und für die zeitliche Ableitung ergibt sich

$$-Av_\rho + e^{-A\rho}f(t - \rho).$$

Für  $\rho \rightarrow 0$  ergibt sich die angegebene Behauptung. □

## 5.4 Lineare parabolische Gleichungen

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir formal allgemeine lineare parabolische Gleichungen zweiter Ordnung definieren und sehen, wie die abstrakte Lösung des Cauchy-Problems zum Nachweis von Existenz und Glattheit der Lösungen linearer parabolischer Gleichungen herangezogen werden kann.

**Definition 5.4.1** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $T > 0$ . Der parabolische Zylinder über  $\Omega$  der Höhe  $T$  ist gegeben durch  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ .*

**Definition 5.4.2** *Es sei  $L(x, t)$  ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf einem Gebiet  $\Omega$ . Der Differentialoperator*

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} + Lu$$

*auf  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  heißt parabolisch, falls für jedes  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$  der Operator  $L(x, t)$  elliptisch ist, wobei die Elliptizitätskonstanten von  $t, x$  abhängen dürfen. Entsprechend nennt man  $P$  stark parabolisch, bzw. gleichmäßig parabolisch, falls  $L$  die entsprechenden Eigenschaften besitzt.*

**Definition 5.4.3** *Ein lineares parabolischen Anfangsrandwertproblem besteht aus einer Differentialgleichung*

$$Pu = f \text{ in } Q_T, \quad (5.4.12)$$

*einer Randbedingung*

$$Bu = \phi \text{ auf } S_T = \partial Q_T \cap \{T > t > 0\}, \quad (5.4.13)$$

*wobei  $\phi$  eine gegebene Funktion und  $B$  i.a. ein Differentialoperator ist, und schließlich aus einem Anfangswert*

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ in } \Omega. \quad (5.4.14)$$

**Definition 5.4.4** *Eine stetige Funktion  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt klassische Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (5.6.16), (5.6.17), (5.6.18), falls die Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $D_{ij}u$  existieren und auf  $Q_T \cup \Omega$  stetig sind und die Gleichungen (5.6.16), (5.6.17), (5.6.18) erfüllt sind.*

Im folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, daß  $L$  nicht von  $t$  abhängt. Ist  $A$  der  $L$  zugeordnete Operator  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , so ist dieser sektoriell, falls  $\Omega$  beschränkt ist,  $L$  stark elliptisch ist mit Koeffizienten  $a^{ij}$  welche auf  $\bar{\Omega}$  stetig differenzierbar sind, und die Koeffizienten  $b^i$  auf  $\bar{\Omega}$  stetig sind. Mit  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  wird  $(-A)$  zum Erzeuger einer analytischen Halbgruppe. Da die Lösung für  $t > 0$  in  $D(A^m)$  für alle  $m$  ist, folgt die klassische Lösbarkeit. Wir haben also gezeigt:

**Satz 5.4.5** *Es sei  $P$  ein parabolischer Differentialoperator, der nicht von  $t$  abhängt, mit glatten Koeffizienten  $a^{ij}$ ,  $b^i$ , dessen elliptischer Anteil stark elliptisch sei. Dann hat das Anfangsrandwertproblem eine eindeutige klassische Lösung.*

## 5.5 Räume gebrochener Exponenten

Es sei  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ , und für eine reelle Zahl  $\delta$  sei  $H_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid z - \delta \in H\}$ . Wir erinnern an die Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion für alle  $\alpha > 0$ :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (5.5.15)$$

**Definition 5.5.1** *Es sei  $A$  ein sektorieller Operator auf  $X$  und  $\sigma(A) \subset H$ . Setze für  $\alpha > 0$*

$$A^{-\alpha} x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-At) dt.$$

**Beispiel 5.5.2** (i) *Für  $x > 0$ ,  $\alpha > 0$  ist*

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-xt) dt.$$

*Zur Begründung führen wir in (5.2.8) die Substitution  $t \mapsto tx$  durch.*

(ii)  $A^{-1} = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty \exp(-At) dt = \int_0^\infty \exp(-At) dt$ . *Unter Ausnutzung von  $\sigma(A) \subset H$  wende man  $A$  auf die rechte Seite an und zeige, daß dies  $\mathbb{1}$  ergibt.*

**Satz 5.5.3** *Ist  $A$  sektoriell,  $\sigma(A) \subset H$  und  $\alpha > 0$ , so ist  $A^{-\alpha} \in B(X)$ ,  $A^{-\alpha}$  ist injektiv und es gilt*

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

*Ferner hat für  $\alpha \in [0, 1)$  der Operator  $A^{-\alpha}$  die Darstellung*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda, -A) d\lambda.$$

**Beweis:** Nachdem das Spektrum  $\sigma(A)$  abgeschlossen ist und in  $\mathbb{C} \setminus S(\Phi, M)$  liegt, existiert ein  $a > 0$  mit  $\sigma(A) \subset H_a$ . Damit folgt aus Satz 5.1.9, daß  $\|\exp(-At)\| < C \exp(-at)$ ,  $t > 0$ . Somit kann man  $\|A^{-\alpha} x\|$  abschätzen:

$$\|A^{-\alpha} x\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty C t^{\alpha-1} \exp(-at) dt \|x\|.$$

Hiermit folgt sofort die Beschränktheit von  $A^{-\alpha}$  für  $\alpha > 0$ . Die Produktformel ist eine einfache Manipulation:

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\beta-1}t^{\alpha-1} \exp(-(t+s)A) ds dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_t^\infty t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} \exp(-rA) dr dt \quad (r = t + s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \exp(-rA) \int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} dt dr \quad (\text{Satz von Fubini}). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} dt &= r^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \\ &= r^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

erhält man

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Um die Injektivität von  $A^{-\alpha}$  nachzuweisen, nehmen wir an, daß  $A^{-\alpha}x = 0$ . Dann ist für ein  $n > \alpha$

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = 0.$$

Wegen der Injektivität von  $A$  folgt  $x = 0$ . (Wir haben ausgenutzt, daß die übliche Definition von  $A^{-1}$  mit der neuen Definition zusammenfällt. Warum ist das so?) Es bleibt die angegebene Darstellungsformel. Wir wissen bereits, daß

$$R(\lambda, -A) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \exp(-At) dt \quad \text{für } \lambda > 0.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda, -A) d\lambda = \int_0^\infty \exp(-At) \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \lambda^{-\alpha} d\lambda dt.$$

Das zweite Integral ist gerade  $t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$  (beachte  $0 \leq \alpha < 1$ ) und damit wird:

$$\int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda, -A) d\lambda = \int_0^\infty \exp(-At) t^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) dt = \frac{\alpha}{\sin \pi \alpha} A^{-\alpha}.$$

Man benutzt hier die Formel  $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\alpha}{\sin \pi\alpha}$ . Diese wiederum gewinnt man aus der Produktdarstellung des Sinus:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

und der Entwicklung der  $\Gamma$ -Funktion aus

$$H(z) = z \prod_{\nu \geq 1} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

Offenkundig ist

$$-H(z)H(-z) = z^2 \prod_{z \geq 1} (1 - z^2/\nu^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

und mit  $H(1) = e^{-\gamma}$  wird  $\Delta(z) = e^{\gamma z} H(z)$  gesetzt. Es folgt aus

$$\Delta(z) = \lim \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n! n^z},$$

daß

$$\Delta(z) = z\Delta(z+1)$$

und

$$\begin{aligned} \pi\Delta(z)\Delta(1-z) &= \pi z\Delta(z)\Delta(-z) \\ &= \pi zH(z)H(-z) \\ &= \sin \pi z. \end{aligned}$$

Setze  $\Gamma = 1/\Delta$ . □

**Definition 5.5.4** *Es sei  $\alpha > 0$ . Dann gilt:*

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}, \quad D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha}).$$

**Bemerkung 5.5.5**

$$A^0 = \mathbb{1}, \quad A^1 = A.$$

**Lemma 5.5.6** *Für  $\alpha > 0$  ist  $A^\alpha$  ein abgeschlossener, dicht definierter linearer Operator.*

**Beweis:** Da  $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$  und  $A^{-\alpha}$  beschränkt ist, folgt sofort die Abgeschlossenheit von  $A^\alpha$ , denn  $(x, y) \in G(A^\alpha) \Leftrightarrow y = A^\alpha x \Leftrightarrow x = A^{-\alpha} y \Leftrightarrow (x, y) \in G(A^{-\alpha})$ . Letzterer ist abgeschlossen, da  $A^{-\alpha}$  beschränkt ist. Offenkundig gilt: ist  $B : X \rightarrow X$  ein beschränkter, injektiver, linearer Operator mit dichtem Bild  $\text{Bild}(B)$  und ist  $Z \subset X$  dicht, so ist  $\text{Bild}(Z)$  dicht. Um zu zeigen, daß  $A^\alpha$  dicht definiert ist, muß man zeigen, daß das Bild von  $A^{-\alpha}$  dicht in  $X$  liegt. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 1$  gilt daher:  $\text{Bild}(A^{-n}) = A^{-1}\text{Bild}(A^{-n+1})$  ist genau dann dicht, wenn  $\text{Bild}(A^{-n+1})$  dicht ist. Dies ist aufgrund der Vorbemerkung gewährleistet. Wegen  $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$  folgt aus  $\beta \leq \alpha$ , daß  $\text{Bild}(A^{-\beta}) \supset \text{Bild}(A^{-\alpha})$ . Insbesondere hat man für  $\alpha < n$  die Beziehung  $D(A^\alpha) \supset D(A^n)$ . Damit ist auch  $D(A^\alpha)$  dicht in  $X$ . □

**Definition 5.5.7** Ist  $X$  ein Banachraum und  $A$  ein sektorieller Operator auf  $X$  mit  $\sigma(A) \subset H_\gamma$  für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , so ist für  $\alpha > 0$

$$X^\alpha = D(A^\alpha), \|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|_X,$$

wobei  $A_1 = A - \gamma \mathbb{1}$  ist.

**Satz 5.5.8** Es sei  $A$  sektoriell,  $\sigma(A) \subset H$  und  $A$  habe eine kompakte Resolvente, so gilt

- (i)  $\exp(-At)$  ist für alle  $t > 0$  kompakt;
- (ii)  $A^{-\alpha}$  ist für  $\alpha > 0$  kompakt;
- (iii) für  $\alpha > \beta \geq 0$  ist  $X^\alpha \subset X^\beta$  kompakt eingebettet.

**Beweis:**

- (i) Die Halbgruppe ist definiert durch

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, -A) \exp(\lambda t) d\lambda.$$

Das Integral ist der Grenzwert der Integrale über  $\Gamma_n = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$ . Definiert jedes dieser Integrale einen kompakten Operator, so ist der Grenzwert kompakt, da die Menge der kompakten Operatoren abgeschlossen ist. Die Integrale über  $\Gamma_n$  werden als Riemann Summen berechnet und jede dieser Summen definiert einen kompakten Operator. Wiederum bleibt diese Eigenschaft beim Übergang zur Grenze erhalten.

- (ii) Das eben gegebene Argument, auf  $T(t)$  angewendet, ergibt die Kompaktheit von  $A^{-\alpha}$ .
- (iii) Die Kompaktheit in (ii) ergibt unmittelbar die Behauptung, denn sei  $B \subset X^\alpha$  beschränkt, so ist zu zeigen, daß  $B$  als Teilmenge von  $X^\beta$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Voraussetzung  $B \subset X^\alpha$  beschränkt, bedeutet, daß es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so daß  $\|A^\alpha x\| < C$ , für alle  $x \in B$ , ist. Dann ist für  $x \in B$

$$A^\beta x = A^{-(\alpha-\beta)} A^\alpha x.$$

Wegen der Kompaktheit von  $A^{-(\alpha-\beta)}$  hat dies eine konvergente Teilfolge. □

## 5.6 Nichtlineare Gleichungen

Betrachte das nichtlineare Cauchy-Problem

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \text{gilt auf } (t_0, t_0 + T). \quad (5.6.16)$$

**Satz 5.6.1** *Es sei  $A$  sektoriell,  $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > \delta > 0$ . Dann existiert zu  $\alpha > 0$  eine Konstante  $C_\alpha$  mit*

$$\|A^\alpha \exp(-At)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad t > 0,$$

und für  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $x \in X^\alpha$  gilt

$$\|(\exp(-At) - \mathbb{1})x\| \leq C_{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha} \|A^\alpha x\|.$$

Ferner ist  $C_\alpha$  auf kompakten Intervallen in  $(0, \infty)$  beschränkt.

**Beweis:** Wir wissen bereits, daß

$$\|\exp(-At)\| \leq C e^{-\delta t}, \quad \|A \exp(-At)\| \leq C t^{-1} e^{-\delta t}, \quad t > 0,$$

und somit

$$\|A^m \exp(-At)\| = \|(A \exp(-A \frac{t}{m}))^m\| \leq (Cm)^m t^{-m} e^{-\delta t}.$$

Für  $0 < \alpha < 1$ ,  $t > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \|A^\alpha \exp(-At)\| &= \|A \exp(-At) A^{-(1-\alpha)}\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \|A \exp(-A(t+s))\| ds \\ &\leq C t^{-\alpha} e^{-\delta t} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \|A^{\alpha+\beta} e^{-At}\| &\leq \|A^\alpha e^{-A \frac{t}{2}}\| \|A^\beta e^{-A \frac{t}{2}}\| \\ &\leq C_\alpha C_\beta 2^{\alpha+\beta} t^{-(\alpha+\beta)} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann das Resultat. Die letzte Behauptung erhält man aus

$$\begin{aligned} \|\exp(-At)x - x\| &= \left\| \int_0^t A \exp(-sA)x ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t A^{1-\alpha} \exp(-As) A^\alpha x ds \right\| \\ &\leq \int_0^t C_{1-\alpha} s^{\alpha-1} \exp(-\delta s) ds \|x\|_\alpha \\ &\leq \frac{C_{1-\alpha}}{\alpha} t^\alpha \|x\|_\alpha. \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.6.2** Ist  $x(t)$  eine Lösung des nichtlinearen Cauchy-Problems, so gilt

$$x(t) = \exp(-A(t - t_0))x_0 + \int_{t_0}^t \exp(-A(t - s))f(s, x(s))ds. \quad (5.6.17)$$

Andrerseits ist die Lösung  $x$  von (5.4.14) mit  $x \in C((t_0, t_0 + T), X^\alpha)$  und

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s, x(s))\| ds < \infty \text{ für ein } \rho > 0$$

auch Lösung von (5.4.13).

**Beweis:** Die Hinrichtung ist bereits geschehen. Sei also  $x(t)$  eine Lösung von (5.4.14).

Wir zeigen zunächst:

$x$  ist Hölder-stetig bezüglich  $\|\cdot\|_\alpha$ :

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= (\exp(-Ah) - \mathbb{1}) \exp(-A(t - t_0))x_0 + \\ &\quad + \int_{t_0}^t (\exp(-Ah) - \mathbb{1}) \exp(-A(t - s))f(s, x(s))ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \exp(-A(t+h - s))f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Wir schätzen die drei Ausdrücke nacheinander in der  $\|\cdot\|_\alpha$ -Norm ab: (beachte das Bild von  $e^{At}$  ist in  $X^\alpha$  für jedes  $\alpha > 0$ )

$$\begin{aligned} \|A^\alpha(e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-t_0)}x_0\| &= \|(e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-t_0)}A^\alpha x_0\| \\ &\leq C_{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{\alpha} \|A^\alpha \exp(-A(t - t_0))A^\alpha x_0\| \\ &\leq C_{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{\alpha} C_\alpha (t - t_0)^{-\alpha} \|x\|_\alpha. \end{aligned}$$

Dies ist von der Form  $K h^\alpha$ . Den zweiten Term behandelt man ganz ähnlich, nur splittet man das Integral in zwei Teilintegrale

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds &= \int_{t_0}^{t_0+\rho} (e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0+\rho}^t (e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Übergang zur  $\|\cdot\|_\alpha$ -Norm führt auf Integrale

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^t (e^{-Ah} - \mathbb{1}) e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\| &\leq \int_{t_0}^{t_0+\rho} \|(e^{-Ah} - \mathbb{1}) e^{-A(t-s)} A^\alpha f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \int_{t_0+\rho}^t \|(e^{-Ah} - \mathbb{1}) A^\alpha e^{-A(t-s)} f(s, x(s))\| ds \\
&\leq C_{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{\alpha} \int_{t_0}^{t_0+\rho} \frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha} \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \int_{t_0+\rho}^t \|(e^{-Ah} - \mathbb{1}) A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad C_{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{\alpha} \int_{t_0}^{t_0+\rho} \frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha} \|f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \int_{t_0+\rho}^t K C_{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{\alpha} \frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Wegen der Integrierbarkeitsvoraussetzung an  $f$  und der Integrierbarkeit der Singularität  $(t-s)^{-\alpha}$  sind die beiden Terme von der Form  $Ch^\alpha$ . Dies impliziert

$$\|x(t+h) - x(t)\| - \alpha \leq C \left( h^\delta + \int_t^{t+h} (t+h-s)^\alpha ds \right) \leq Ch^\delta.$$

Somit ist auch  $t \rightarrow f(t, x(t))$  Hölder-stetig und  $x(t)$  Lösung von (5.4.13).  $\square$

**Satz 5.6.3** *Es sei  $A$  sektoriell,  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $f : U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha \rightarrow X$  eine Abbildung mit  $f$  ist lokal Hölder-stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Dann gibt es zu jedem Paar  $(t_0, x_0) \in U$  ein  $T(t_0, x_0) > 0$ , so daß (5.4.13) eine eindeutige Lösung  $x(t)$  auf  $[t_0, t_0 + T)$  mit  $x(t_0) = x_0$  besitzt.*

**Beweis:** Wir lösen nur die Integralgleichung (5.4.14). Dazu benutzen wir ein Fixpunktargument. Seien  $T, \delta > 0$ . Für eine stetige Funktion  $y : [t_0, t_0 + T] \rightarrow X^\alpha$  mit  $\|y(t) - x_0\|_\alpha < \delta$  setzen wir

$$G(y)(t) = e^{-A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(s, y(s)) ds.$$

Wir zeigen:

(i)  $G$  bildet für geeignete  $T, \delta > 0$  die Menge

$$S = \{y \in C([t_0, t_0 + T], X^\alpha) \mid \|y(t) - x_0\|_\alpha < \delta\}$$

in sich ab.

(ii) Setzt man  $\|y\|^T = \sup \{\|y(t)\|_\alpha \mid t_0 \leq t \leq t_0 + T\}$ , so ist  $G$  bezüglich dieser Norm eine strikte Kontraktion.

Zu (i)

$$\|G(y)(t) - x_0\|_\alpha \leq \|(e^{-A(t-t_0)} - \mathbb{1})x_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, y(s))\| ds.$$

Seien  $\tau, \delta > 0$  so gewählt, daß mit  $x_0 \in S$  die Menge

$$V = \{(t, x) \mid t \in [t_0, t_0 + \tau], \|x - x_0\| \leq \delta\} \subset U$$

in  $U$  liegt und

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|_\alpha \text{ für } (t, x) \in V.$$

Sei  $B = \sup \{\|f(t, x_0)\| \mid t \in [t_0, t_0 + \tau]\}$ . Dann ist

$$\|f(s, y(s))\| \leq B + L\delta \text{ für alle } y \in S.$$

Damit schließt man, daß, für  $T < \tau$  genügend klein, gilt

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - x_0\|_\alpha &\leq \frac{\delta}{2} + M(B + L\delta) \int_{t_0}^{t_0+T} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

Da  $G(y)$  auch stetig ist, folgt  $G : S \rightarrow S$ .

Zu (ii): Es seien  $y, z \in S$  und  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - G(z)(t)\|_\alpha &\leq \int_{t_0}^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \|y - z\|^T \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - z\|^T. \end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung muß  $T < \tau$  genügend klein gewählt werden. Damit ist der zweite Punkt gezeigt.

Der Fixpunkt  $x(\cdot)$  löst die Integralgleichung (5.4.14),  $f(t, x(t))$  ist beschränkt für  $t \searrow t_0$ . Damit ist  $x \in X^\alpha$  die eindeutige Lösung des nichtlinearen Cauchy Problems.  $\square$

Wie schon in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen stellt sich auch hier die Frage nach der Fortsetzbarkeit der Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ . Wir wollen im folgenden Satz, den wir ohne Beweis angeben, diese Frage klären.

**Satz 5.6.4** *Es seien  $A, f$  wie oben und zusätzlich gelte, daß für jede abgeschlossene und beschränkte Menge  $B \subset U$  das Bild  $f(B)$  in  $X$  beschränkt ist. Sei  $(t_0, t_1)$  das maximale Existenzintervall für das Anfangswertproblem  $\dot{x} + Ax = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in X^\alpha$ . Dann ist entweder*

(i)  $t_1 = \infty$   
oder

(ii) es existiert eine Folge  $t_n \nearrow t_1$  mit  $(t_n, x(t_n)) \rightarrow \partial U$ .

**Satz 5.6.5** *Seien  $A, f$  wie oben und für alle abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen  $B \subset X^\alpha$  mit  $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  sei  $f(\mathbb{R}^+ \times B)$  beschränkt in  $X$ . Ferner habe  $A$  eine kompakte Resolvente. Dann gilt: ist  $x(t, t_0, x_0)$  eine in  $X^\alpha$  beschränkte Lösung auf  $[t_0, \infty)$ , so ist  $\{x(t, t_0, x_0) \mid t > t_0\}$  relativ kompakt in  $X^\alpha$ .*

**Beweis:** Sei  $\alpha < \beta < 1$ . Dann ist  $X^\beta \subset X^\alpha$  kompakt eingebettet. Wir zeigen daher nur, daß  $\|x(t, t_0, x_0)\|_\beta$  auf  $[t_0+1, \infty)$  beschränkt ist. Sei o.B.d.A.  $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > \delta > 0$  und  $\|f(t, x(t, t_0, x_0))\| \leq C$  für alle  $t \geq t_0$ . Dann ist

$$\|x(t, t_0, x_0)\|_\beta \leq M(t - t_0)^{-(\beta-\alpha)} e^{-\delta(t-t_0)} \|x_0\| + MC \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta} e^{-\delta(t-s)} ds.$$

und somit für  $t > t_0 + 1$  beschränkt.  $\square$

**Bemerkung 5.6.6** *Die Lösung der Gleichung*

$$\begin{aligned} \dot{x} + \mu Ax &= f(t, x, \lambda), \quad t > t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

*hängt glatt von den Parametern  $\lambda, t_0, x_0, \mu$  ab. Genauer gilt: ist  $(x, \lambda, t) \mapsto f(t, x, \lambda)$  in  $C^r$ ,  $1 \leq r < \infty$ , glatt, so ist die Abbildung*

$$(t_0, x_0, \lambda, \mu) \rightarrow x(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) \text{ auch } C^r.$$

**Satz 5.6.7** *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 5.4.3 und zusätzlich sei  $f$  in beiden Variablen Lipschitz-stetig. Die Lösung des nichtlinearen Cauchy Problems ist dann sogar in  $C^{1,\delta}((t_0, t_0 + T), X^\gamma)$  für alle  $\gamma < 1$  und ein geeignetes  $\delta < 1 - \gamma$ .*

**Hilfssatz 5.6.8** (i) Es sei  $A$  sektoriell,  $g : (0, T) \rightarrow X$  genüge der Bedingung

$$\|g(t) - g(s)\| \leq K(s)(t-s)^\gamma \text{ für } 0 < s < t < T < \infty, 0 < \gamma < 1, \quad (5.6.18)$$

wobei  $K : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  stetig sei und das uneigentliche Integral

$$\int_0^T K(s) ds < \infty$$

existiere. Dann gilt

(a)

$$G(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} g(s) ds$$

ist für  $0 \leq \beta < \gamma$  eine stetig differenzierbare Abbildung  $G : (0, T) \rightarrow X^\beta$ .

(b) Es gilt eine Abschätzung der Form

$$\left\| \frac{dG}{dt}(t) \right\|_\beta \leq M t^{-\beta} \|g(t)\| + M \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma-\beta} K(s) ds$$

für  $0 < t < T$  und eine Konstante  $M$  unabhängig von  $\beta, \gamma$  und  $g$ .

(ii) Ist

$$\int_0^h K(s) ds = O(h^\delta), \quad h \searrow 0, \text{ für ein } \delta > 0,$$

so ist die Abbildung  $t \rightarrow \frac{dG}{dt}(t)$  Hölder-stetig mit Exponent  $\delta$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt}(t) &= g(t) - \int_0^t A e^{-A(t-s)} g(s) ds \\ &= g(t) - \int_0^t T'(t-s)(g(t) - g(s)) ds + \int_0^t T'(t-s)g(t) dt \\ &= \underbrace{\int_0^t A e^{-A(t-s)}(g(t) - g(s)) ds}_{H(t)} + e^{-At}g(t), \end{aligned}$$

denn  $\int_0^t -Ae^{-A(t-s)}g(s)ds = e^{-At}g(t) - g(t)$ . Der zweite Term der rechten Seite in obiger Gleichung ist offensichtlich in  $X^\beta$  und  $t \mapsto e^{-At}g(t)$  ist lokal Hölder-stetig.

Wir betrachten den ersten Term und untersuchen ihn auf Zugehörigkeit zu  $X^\beta$ , also:

$$\left\| \int_0^t A^{1+\beta} e^{-A(t-s)} (g(t) - g(s)) ds \right\| \leq M \int_0^t \frac{(t-s)^\gamma}{(t-s)^{1+\beta}} K(s) ds.$$

Damit ist die in (i), Unterpunkt (b), behauptete Abschätzung gezeigt und  $G(t) \in X^\beta$ , also gilt auch (b) und somit (i).

(ii) Wir untersuchen die Differenz  $H(t+h) - H(t)$ .

$$\begin{aligned} H(t+h) - H(t) &= \int_0^{t+h} Ae^{-A(t+h-s)}((t+h) - g(s))ds - \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t) - g(s))ds \\ &= \int_0^h Ae^{-A(t+h-s)}(g(t+h) - g(s))ds + \int_0^t Ae^{-A(t-\tau)}(g(t+h) - g(\tau+h))d\tau \\ &\quad - \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t) - g(s))ds \\ &= \int_0^h Ae^{-A(t+h-s)}(g(t+h) - g(s))ds \\ &\quad + \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t+h) - g(s+h) - g(t) + g(s))ds \end{aligned}$$

Wir schätzen die Normen der beiden Ausdrücke getrennt ab:

$$\begin{aligned} \int_0^h \|Ae^{-A(t+h-s)}\| \|g(t+h) - g(s)\| ds &\leq M \int_0^h (t+h-s)^{-1+\gamma} K(s) ds \\ &\leq \frac{C}{t^{1-\gamma}} \int_0^h K(s) ds. \end{aligned}$$

Es bleibt der zweite Ausdruck. Wir bemerken zunächst, daß wir

$$\|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\|$$

auf zwei Weisen abschätzen können. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\| &\leq \|g(t+h) - g(s+h)\| + \|g(t) - g(s)\| \\ &\leq K(s+h)(t-s)^\gamma + K(s)(t-s)^\gamma, \end{aligned}$$

aber auch

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\| &\leq \|g(t+h) - g(t)\| + \|g(s+h) - g(s)\| \\ &\leq K(t)h^\gamma + K(s)h^\gamma, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\| &\leq C \min\{h^\gamma, (t-s)^\gamma\} \\ &\leq C h^{\bar{\delta}} \min\{h^{\gamma-\bar{\delta}}, (t-s)^{\gamma-\bar{\delta}}\}. \end{aligned}$$

Also folgt mit  $g^h(t) = g(t+h) - g(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t \|Ae^{-A(t-s)}\| \|g^h(t) - g^h(s)\| ds &\leq \int_0^t \frac{MC}{t-s} h^{\bar{\delta}} \min\{h^{\gamma-\bar{\delta}}, (t-s)^{\gamma-\bar{\delta}}\} ds \\ &\leq CMh^{\bar{\delta}} \int_0^t (t-s)^{-1+(\gamma-\bar{\delta})} ds \\ &\leq CMKh^{\bar{\delta}}. \end{aligned}$$

□

**Beweis des Satzes 5.4.7:** Wir wollen zeigen, daß  $\frac{dx}{dt} \in X^\gamma$  und  $t \mapsto \frac{dx}{dt}$  als Abbildung  $(t_0, t_1) \rightarrow X^\gamma$  lokal Hölder-stetig ist. Die Lösung  $x(t)$  hat die Gestalt

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, g(s))ds.$$

Offensichtlich hat der erste Term die gewünschten Eigenschaften. Wir wollen also den zweiten Term betrachten. Setze  $g(s) = f(s, x(s))$  und prüfe die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5.4.8. Zunächst betrachte man

$$\|g(t) - g(s)\| \leq L((t-s) + \|x(t) - x(s)\|_\alpha).$$

Sei  $t_0 < \tau < s < t_1$ . Setze  $x_\tau = x(\tau)$  und betrachte dies als Anfangswert. Dann ist für  $0 < \alpha < \beta < 1$   $\|x_\tau\|_\beta < C_1(\tau - t_0)^{\alpha-\beta}$ . Für die Differenz  $x(t) - x(s)$  erhält man

$$\begin{aligned} x(t) - x(s) &= (e^{-Ah} - \mathbb{1}) e^{-A(s-\tau)}x(\tau) \\ &+ \int_\tau^s e^{-A(s-r)} (f(r+t-s, x(r+t-s)) - f(r, x(r))) ds \\ &+ \int_\tau^{\tau+t-s} e^{-A(t-r)} f(r, x(r)) ds. \end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(s)\| &\leq C(t-s) ((s-\tau)^{-1+\beta-\alpha} \|x_\tau\|_\beta + (s-\tau)^{-\alpha}) \\ &+ \int_\tau^s LM(s-r)^{-\alpha} \|x(r+t-s) - x(r)\|_\alpha ds \end{aligned}$$

Für  $s - \tau$  genügend klein, kann der letzte Term durch den ersten Term abgeschätzt werden und man erhält

$$\|g(t) - g(s)\| \leq C(t - s) \left( (s - \tau)^{-1+\beta+\alpha} \|x_\tau\|_\beta + (s - \tau)^{-\alpha} \right).$$

Damit kann der Hilfssatz 5.4.8 angewendet werden. Dies ergibt  $t \mapsto x(t)$  ist eine Hölder-stetige Abbildung von  $[t_0, t_1] \rightarrow X^\gamma$ . Die  $X^\gamma$ -Norm von  $\frac{dx}{dt}$  läßt sich abschätzen zu

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_\gamma &\leq C[(t - \tau)^{\beta-\gamma-1} \|x\|_\beta + (t - \tau)^{-\gamma}] \\ &\leq C[(t - \tau)^{\beta-\gamma-1} (\tau - t_0)^{\alpha-\beta} + (t - \tau)^{-\gamma}] \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $t - \tau = \tau - t_0 = \frac{1}{2}(t - t_0)$  wird dies zu

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\|_\gamma = C(t - t_0)^{\alpha-\gamma-1}.$$

□

**Satz 5.6.9** *Es sei  $A$  sektoriell auf  $X = l_2$  und  $D(A) = X^1 = W^{m,p}(\Omega)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit Lipschitz-Rand ist und  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt für  $0 \leq \alpha \leq 1$ :*

$$\begin{aligned} X^\alpha &\hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \text{ falls } m\alpha - n/p > k - n/q, \quad q \geq p, \\ X^\alpha &\hookrightarrow C^{\ell,\nu}(\Omega), \text{ falls } m\alpha - n/p > \ell + \nu \geq 0. \end{aligned}$$

**Beweis:** Siehe z.B. Henry: Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer Lecture Notes in Mathematics 840. □

**Satz 5.6.10 (Nemitski<sup>1</sup>-Operatoren)** *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-stetigem Rand. Es sei  $A$  ein sektorieller Operator auf  $X = L^p(\Omega)$ ,  $D(A) = W^{2,p}(\Omega)$ . Ferner sei  $f \in C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , und genüge der Wachstumsbedingung*

$$|f^i(u)| \leq C(1 + |u|^{\gamma-i}), \text{ für } 0 \leq i \leq k,$$

mit

$$0 \leq k \leq \gamma < \frac{n}{n - 2\alpha p}.$$

Dann ist der Einsetzungsoperator

$$T(u)(\cdot) = f(u(\cdot)) : X^\alpha \rightarrow X$$

$k$ -mal stetig differenzierbar und Bilder beschränkter Mengen sind beschränkt.

**Beweis:** Der Beweis wird durch eine Reihe von Lemmata erbracht. □

---

<sup>1</sup>Nemitski

**Lemma 5.6.11 (Krasnoselski<sup>2</sup>)** Ist  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und genügt  $g$  der Wachstumsbedingung

$$|g(u)| \leq C(g)(1 + |u|)^\gamma, \quad \gamma \geq 1,$$

dann ist für  $1 \leq r < \infty$  der Einsetzungsoperator

$$G : L^{\gamma r}(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega), \quad u(\cdot) \mapsto g(u(\cdot))$$

für  $1 \leq r \leq \infty$  stetig und Bilder beschränkter Mengen sind beschränkt.

**Beweis:** Zunächst ist zu prüfen, daß die Abbildung wohldefiniert ist. Dies ist jedoch offenkundig.

Wir kommen zur Stetigkeit. Es sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L^{\gamma r}(\Omega)$ , welche gegen  $u$  konvergiert. Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben, setze

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \cdot 3^{\gamma r} C(g) \|1 + |u|\|_{L^{\gamma r}(\Omega)}^{\gamma r}}.$$

Nach dem Satz von Egorov, existiert eine kompakte Menge  $A \subset \Omega$  mit  $|\Omega \setminus A| < \delta$ , so daß die Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $A$  gleichmäßig gegen  $u$  konvergiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx &= \int_{\Omega \setminus A} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx \\ &\quad + \int_A |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist beschränkt durch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus A} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx &\leq C(g) \int_{\Omega \setminus A} (2 + |u| + |u_k|)^{\gamma r} dx \\ &\leq C(g) 2^{\gamma r} \int_{\Omega \setminus A} (1 + |u|)^{\gamma r} + (1 + |u_k|)^{\gamma r} dx \\ &\leq 3C(g) 2^{\gamma r} \int_{\Omega \setminus A} (1 + |u|)^{\gamma r} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Im zweiten Integral konvergiert der Integrand gleichmäßig gegen Null und damit das Integral gegen 0.  $\square$

**Lemma 5.6.12** Die Abbildung  $T$  aus Satz 5.4.10 ist stetig.

<sup>2</sup>Krasnoselski ist ein zeitgenössischer russischer Mathematiker mit einer Vielzahl von Arbeiten zu verschiedenen Gebieten der Analysis bzw. Differentialgleichungen. U.a. gehen globale Verzweigungssätze auf ihn zurück. Er wuchs nach der russischen Revolution in einem ländlichen Gebiet auf und war weitgehend Autodidakt.

**Beweis:** Seien  $n, p, k, \gamma$  wie im Satz 5.4.10. Nach Satz 5.4.9 ist  $X^\alpha \hookrightarrow L^q(\Omega)$  mit  $q < \frac{np}{n-2p\alpha}$ . Damit ist dann

$$|f(u)|^p \leq C(1 + |u|^{\gamma p})$$

in  $L^1(\Omega)$ , falls  $\gamma p < q$  oder auch  $\gamma < \frac{n}{n-2p\alpha}$  ist. Die Stetigkeit folgt aus dem Lemma 5.4.11.  $\square$

**Lemma 5.6.13** Die Abbildung  $T$  aus dem Satz 5.4.10 ist  $C^1$ . Die Ableitung ist durch den Ausdruck

$$DT(u)[v](\cdot) = f'(u(\cdot))v(\cdot)$$

gegeben.

**Beweis:** Wir untersuchen zunächst die Abbildung

$$G(u) = f'(u) : X^\alpha \rightarrow L^{p'}(\Omega).$$

Gemäß dem vorigen Lemma ist  $G$  stetig, falls

$$(\gamma - 1)p' < \frac{np}{n - 2\alpha p}.$$

Weiterhin ist  $v \in X^\alpha$  auch in  $L^{q'}(\Omega)$ , falls

$$q' < \frac{np}{n - 2p\alpha}.$$

Mit der Hölder-Ungleichung erhält man  $f'(u)v \in L^p(\Omega)$ , falls

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{p'} \leq 1.$$

Dies kann laut Voraussetzung erfüllt werden. Es bleibt zu zeigen, daß  $f'(u)v$  wirklich die Ableitung von  $T$  ist, also:

$$\begin{aligned} & \|T(u+h) - T(u) - DT(u)[h]\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \left( \int_{\Omega} |f(u(x)+h(x)) - f(u(x)) - f'(u(x))h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left( \int_{\Omega} \int_0^1 (f'(u(x)+sh(x)) - f'(u(x)))h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \left( \int_{\Omega} \int_0^1 |f'(u(x)+sh(x)) - f'(u(x))|^p |h(x)|^p ds dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \int_0^1 \|f'(u(x)+sh(x)) - f'(u(x))\|_{L^{pr}(\Omega)} ds \|h\|_{L^{pr'}(\Omega)} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Da  $f'$  stetig von  $X^\alpha$  nach  $L^{p'}(\Omega)$  ist, folgt, daß  $T \in C^1$  ist, falls eine geeignete Wahl von  $r$  möglich ist.

$r$  muß aufgrund der Einbettungen die Bedingungen

$$\begin{aligned} r(\gamma - 1) &< \frac{n}{n - 2\alpha p} \\ r' &< \frac{n}{n - 2\alpha p} \\ \gamma &< \frac{n}{n - 2\alpha p} \end{aligned}$$

erfüllen. Setze  $\rho = \frac{n}{n - 2\alpha p}$ . Dann folgt aus  $r' < \rho$ ,  $r > \frac{\rho}{\rho - 1}$ . Die erste Ungleichung ergibt  $r < \frac{\rho}{\gamma - 1}$ . Beide sind wegen  $\gamma < \rho$  zu erfüllen.

Schließlich muß noch der gleiche Schritt mit  $C^k$  durchgeführt werden. Der geht aber genauso.  $\square$

## 5.7 Klassische Lösbarkeit einer nichtlinearer parabolischen Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die bisher entwickelte Theorie anwenden, um die klassische Lösbarkeit einer gewissen nichtlinearen parabolischen Gleichung nachzuweisen. Dazu sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet,  $\Delta$  der Laplace-Operator und  $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, deren genaue Eigenschaften weiter unten angegeben werden. Wir wollen das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \Delta u + f(t, x, u, \nabla u) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

untersuchen.

Für unsere Betrachtungen benötigen wir Verschärfungen früher angegebener Sätze. Wir wollen diese ohne Beweis angeben.

**Satz 5.7.1** *Der Raum  $W^{1,p}(\Omega)$  ist kompakt eingebettet in*

- (i)  $L^{np/(n-p)}(\Omega)$  für  $p < n$
- (ii)  $C^\delta(\Omega)$  für  $0 < \delta p < p - n$ , d.h. für  $p > n$  sind die Funktionen in  $W^{1,p}(\Omega)$  Hölder-stetig.

Darüberhinaus brauchen wir noch eine Verallgemeinerung der elliptischen Theorie.

**Satz 5.7.2** *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.1 hat die Gleichung*

$$\begin{aligned} Lu &= f \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für  $f \in L^q(\Omega)$  eine Lösung  $u \in W^{2,q}(\Omega)$ . Ist  $f \in C^\delta(\Omega)$ ,  $0 < \delta < 1$ , so ist  $u \in C^{2,\delta}(\Omega)$

**Bemerkung:** Die zuletzt gemachte Aussage wird im Rahmen der Schauderschen<sup>3</sup> Theorie elliptischer Gleichungen hergeleitet.

Betrachte zunächst das lineare elliptische Problem: sei  $X = L^2(\Omega)$  und  $A$  definiert durch

$$Au = g \Leftrightarrow \int_{\Omega} g v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad g \in X, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann ist  $A = -\Delta$  auf  $C^2(\Omega)$  und  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Nach Satz 5.4.9 ( $n = 3$ ) ist  $X^\alpha \subset W^{1,q}$  für  $\alpha > \frac{1}{2}$  und  $2 \leq q < \frac{6}{5-4\alpha}$ , d.h.  $\alpha > \frac{5q-6}{4q}$ . Ferner ist für  $\alpha > \frac{3}{4}$   $X^\alpha \subset L^\infty(\Omega)$ . Setze  $q = 2\tilde{q}$ . Dann folgt aus dem eben gesagten, daß für

$$1 > \alpha > \max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5\tilde{q} - 3}{4\tilde{q}} \right\}$$

folgt

$$X^\alpha \subset W^{1,2\tilde{q}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

**Lemma 5.7.3** *Wir setzen voraus, daß die Abbildung  $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  in allen Variablen lokal Lipschitz-stetig ist und eine stetige, im zweiten Argument monoton steigende Funktion  $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und eine Zahl  $1 \leq \tilde{q} < 3$  existieren, so daß*

$$\begin{aligned} |f(t, x, u, \xi)| &\leq B(t, |u|)(1 + |\xi|^{\tilde{q}}) \\ |f(t, x, u, \xi) - f(t, x, u, \eta)| &\leq B(t, |u|)(1 + |\xi|^{\tilde{q}-1} + |\eta|^{\tilde{q}-1})|\xi - \eta| \\ |f(t, x, u, \xi) - f(t, x, v, \xi)| &\leq B(t, |u| + |v|)(1 + |\xi|^{\tilde{q}})|u - v|. \end{aligned}$$

Dann hat für

$$\alpha > \max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5\tilde{q} - 3}{4\tilde{q}} \right\}$$

die Abbildung

$$F(t, u) = f(t, x, u(x), \nabla u(x))$$

die folgenden Eigenschaften:

---

<sup>3</sup>Juliusz Pawel Schauder 1899-1943, bedeutender polnischer Mathematiker, Arbeiten in der nicht-linearen Funktionalanalysis mit tiefliegenden Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Er wurde 1943 zusammen mit seiner Familie von den Faschisten ermordet.

(i)

$$\|F(t, u)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2B(t, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \left( \sqrt{|\Omega|} + (\|u\|_{1,2\tilde{q}}^\Omega)^{\tilde{q}} \right)$$

(ii)  $F$  ist auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  definiert und bezüglich  $t$  lokal Hölder-stetig und in  $u \in X^\alpha$  lokal Lipschitz-stetig.

**Beweis:** Sei  $X = l_2$ . Für den ersten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned} \|F(t, u)\|_{l_2} &\leq \left( \int_{\Omega} |f(t, x, u(x), \nabla u(x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (B(t, |u(x)|)(1 + |\nabla u(x)|^{\tilde{q}}))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2B(t, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \left( \sqrt{|\Omega|} + (\|u\|_{1,2\tilde{q}}^\Omega)^{\tilde{q}} \right) \end{aligned}$$

Die lokale Hölder Stetigkeit bezüglich  $t$  folgt direkt aus der lokalen Hölder Stetigkeit von  $f$ . Die lokale Lipschitz-Stetigkeit bezüglich  $x \in X^\alpha$  zeigt man wie zuvor den ersten Schritt.  $\square$

Damit haben wir die Voraussetzungen der abstrakten Existenzsätze nachgeprüft und erhalten für  $u_0 \in X^\alpha$  eine eindeutige Lösung  $u(t, x; t_0, u_0)$  auf einem maximalen Existenzintervall  $[t_0, t_1)$ .

**Satz 5.7.4** Die Lösung des Anfangswertproblems  $u(t, x; t_0, u_0)$  ist in  $t > t_0$  stetig differenzierbar und  $u(t, \cdot; t_0, u_0) \in C^2(\Omega)$ . Damit ist  $u(t, x; t_0, u_0)$  eine klassische Lösung des Problems.

**Beweis:** Wir beginnen mit der Lösung des abstrakten Problems  $u(t, \cdot; t_0, u_0) \in D(A)$ . Man zeigt, daß  $t \mapsto \frac{du}{dt}$  lokal Hölder-stetig als Abbildung  $t \rightarrow X^\alpha$  ist. Also ist

$$(t, x) \mapsto \left( u(t, x; t_0, u_0), \frac{du(t, x; t_0, u_0)}{dt} \right)$$

stetig in  $t, x$ . Da  $u \in D(A)$ , folgt  $\nabla u \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ , aufgrund der obigen Verschärfung des entsprechenden Einbettungssatzes. Also ist  $Au = F(t, u) - \frac{du}{dt} \in L^{6/k}(\Omega)$  (beachte die Abschätzung für  $F$ ). Damit ist  $u \in W^{2,6/k}(\Omega)$ . Ist  $\tilde{q} < 2$ , so ist  $6/\tilde{q} > 3$  und wiederum die obige Verschärfung der Einbettung liefert, daß  $W^{1,6/\tilde{q}}(\Omega)$  kompakt in den Raum  $C^\delta(\Omega)$  einbettet. Damit ist  $\nabla u(t, \cdot; t_0, u_0)$  Hölder-stetig und  $F(t, u(t, \cdot; t_0, u_0)) \in C^\delta(\Omega)$ . Der Schaudersche Existenzsatz liefert  $u \in C^{2,\delta}(\Omega)$ .

Der verbleibende Fall ist  $\tilde{q} \geq 2$ . Wir konstruieren eine Folge  $p_{n+1} > p_n$ , so daß  $u \in W^{2,p_n}(\Omega)$  impliziert, daß  $u \in W^{2,p_{n+1}}(\Omega)$  ist. Ferner kann die Folge so gewählt werden, daß ein  $n$  existiert mit  $p_n > 3$ . Sei  $p_n > 2$ . Dann ist  $\nabla u \in W^{1,p_n}(\Omega)$ . Dieser Raum bettet nach  $L^r(\Omega)$  ein, für jedes  $r$  mit  $r < \frac{3p_n}{3-p_n}$ . Wiederum ist  $Au \in L^{q/\tilde{q}}(\Omega)$  und damit  $u \in W^{2,q/\tilde{q}}(\Omega)$ . Obige Abschätzungen für  $q$  ergeben  $\frac{q}{\tilde{q}} < \frac{3}{\tilde{q}} \frac{p_n}{3-p_n}$ . Also ist  $p_{n+1} < \frac{3}{\tilde{q}} \frac{p_n}{3-p_n}$ . Diese Folge überschreitet nach endlich vielen Schritten den Wert 3.  $\square$

## 5.8 Navier–Stokessche Gleichungen

Wie bereits in der Einführung erwähnt, modellieren die nach Navier und Stokes benannten Gleichungen die Strömung von Flüssigkeiten und Gasen in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Die zu bestimmenden Größen sind die Strömung und der Druck an jeder Stelle. Die Strömung wird durch einen Vektor in  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  wiedergegeben. Der Druck ist eine skalare Größe  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir schreiben  $U = (u_1, u_2, u_3)$  und  $P = \text{grad } p$ . Dann hat die Aufgabenstellung für  $t > t_0$  und  $x \in \Omega$  die Gestalt

(i)

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \rho \Delta U = -P - W - F,$$

wobei

$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$$

ist und  $W = (w_1, w_2, w_3)$  durch

$$w_j = \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

gegeben ist, und  $F = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))$  ist,

(ii)

$$\text{div } U = 0$$

(iii) und Randwerte z.B.  $u = 0$  auf  $\partial\Omega \times [t_0, \infty)$  vorgeschrieben werden(iv) und ein Anfangswert  $U(x, t_0) = U_0(x)$  gegeben ist.

Auf den ersten Blick ist unsere Theorie nicht anwendbar, da z.B.  $p$  keine Zeitableitung hat, und die Gleichung  $\text{div } U = 0$  auch nicht die erforderliche Gestalt hat.

Sei  $U_N$  die Komponente von  $U$  normal zum Rand. Wir betrachten die Menge der Abbildungen

$$U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

welche stetig differenzierbar sind, und den Bedingungen  $\text{div } U = 0$  und  $U_N = 0$  genügen. Dann folgt für jede Funktion  $\Phi \in C^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} U \nabla \Phi dx = 0. \quad (5.8.19)$$

Es gilt auch die Umkehrung, d.h. jedes Vektorfeld  $U$ , welches der Gleichung (5.7.19) für jedes  $\Phi \in C^1(\Omega)$  genügt, ist divergenzfrei. Sei  $H_\pi$  der Abschluß in  $(L^2(\Omega))^3$  der Gradientenfelder und  $H_\sigma$  das orthogonale Komplement.  $H_\sigma$  ist der Abschluß

der divergenzfreien, glatten Vektorfelder mit verschwindender Normalenkomponente. (Warum ist dies so??) Projektion der Gleichung in  $H_\sigma$  ergibt eine Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \rho AV = N(V) + F_\sigma(t).$$

$A$  wird zum selbstadjungierten, dicht definierten Operator auf  $H_\sigma$ . Für die gebrochenen Exponenten erhält man:

**Satz 5.8.1** (i) Für  $\alpha \in (1/2, 1)$  gilt  $H_\sigma^\alpha \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  für  $q < 6/(5 - 4\alpha)$ .

(ii) Für  $\alpha \in (3/4, 1)$  ist  $H_\sigma^\alpha \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .

Damit kann nun die Nichtlinearität untersucht werden. Für  $\alpha > 3/4$  erhält man

$$\|N(v)\| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{X^\alpha}^2.$$

Damit ist  $N$  ein beschränktes Polynom  $H_\sigma^\alpha \rightarrow H_\sigma$ . Für  $V_{t_0} \in H_\sigma$  und Hölderstetigem  $f$  existiert damit eine Lösung auf einem maximalen Existenzintervall  $[t_0, t_1)$ . Ein ähnliches Verfahren wie im Abschnitt 5.5 ergibt klassische Lösbarkeit.