Kapitel 4

Schwache Lösungen und Regularität

4.1 Operatoren in Divergenzform

Zur Erinnerung: ein elliptischer Operator zweiter Ordnung hat die Form

$$Lu = \sum_{i,j} a^{ij}(x) D_{ij} u + \sum_i b^i(x) D_i u + c(x) u.$$

Sind die Funktionen a^{ij} genügend glatt, so gilt

$$\sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u) = \sum_{i,j} (D_i a^{ij} D_j u + a^{ij} D_{ij} u)$$

und Lu hat die Form

$$Lu = \sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + \sum_i c^i D_i u + du.$$

Dabei sind b^i, c^i andere Funktionen als zuvor. Wir haben also gezeigt:

Lemma 4.1.1 *Ist L ein elliptischer Operator zweiter Ordnung mit genügend glatten Koeffizientenfunktionen a^{ij}, so kann der Operator in der Form*

$$Lu = \sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + \sum_i c^i D_i u + du.$$

geschrieben werden. Ebenso kann man bei C^1–Koeffizienten diese Form in die ursprüngliche zurückverwandeln.

Definition 4.1.2 *Die Form*

$$Lu = \sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + \sum_i c^i D_i u + du$$

heißt Divergenzform.

Definition 4.1.3 *Ist L ein Differentialoperator zweiter Ordnung, so nennt man*

$$L_H u = \sum_{i,j} a^{ij} D_i D_j u$$

den Hauptteil *(oder auch* Symbol*) von L.*

Wir haben also gesehen, daß bei ausreichender Glattheit der Koeffizienten ein Operator in Divergenzform geschrieben werden kann, ohne daß man den Hauptteil verändert.

4.2 Schwache Lösbarkeit des Dirichletproblems

In diesem Abschnitt sei Ω immer ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.2.1 *Es sei $\psi \in H^1(\Omega)$ und $f, g^1, \ldots, g^n \in L^2(\Omega)$. L sei ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform. Wir sagen $u \in H^1(\Omega)$ ist eine* schwache Lösung des Dirichlet–Problems

$$\begin{aligned} Lu &= f + \sum_i D_i g^i \text{ in } \Omega && (4.2.1)\\ u_{|\partial\Omega} &= \psi, && (4.2.2) \end{aligned}$$

falls für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \left(-(\sum_{i,j} a^{ij} D_j u + \sum b^i u) D_i\varphi + (\sum_i c^i D_i u + du)\varphi \right) dx = \int_\Omega (-g^i D_i\varphi + f\varphi) dx$$

und

$$u - \psi \in H_0^1(\Omega)$$

ist.

Bemerkung 4.2.2 *Die Formulierung der rechten Seite ist an dieser Stelle noch gewöhnungsbedürftig. Die schwache Formulierung würde normalerweise von rechten Seiten in $L^2(\Omega)$ ausgehen. Wir wollen dies noch etwas verallgemeinern, die rechten Seiten dürfen sogar im Dualraum von $H^1(\Omega)$ sein, die hier gewählte Schreibweise deutet dies an, wir werden noch darauf hinweisen. In der Physik würde man z.B. die "Delta-Funktion„ als rechte Seite zulassen wollen, obwohl diese nicht in $L^2(\Omega)$ ist, man kann sie auffassen als Element eines geeigneten Dualräumes.*

Lemma 4.2.3 *Das Dirichlet–Problem mit $f, g^i \in L^2(\Omega)$ und $\psi \in H^1(\Omega)$ kann genau dann schwach gelöst werden, wenn es für $f, g^i \in L^2(\Omega)$ und $\psi = 0$ gelöst werden kann.*

Beweis. Wir betrachten die linke Seite und schreiben $w = u - \psi$ oder auch $u = w + \psi$. Dies ergibt

$$\int_\Omega \left(-(\sum_{i,j} a^{ij} D_j(w+\psi) + \sum_i \big(b^i(w+\psi))D_i\varphi + c^i D_i(w+\psi)\big) + d(w+\psi))\varphi \right) dx.$$

Dies führt auf eine Differentialgleichung gleichen Typs mit der neuen rechten Seite

$$\int_\Omega (f\varphi - \sum_i g^i D_i\varphi)dx + \int_\Omega \sum_i \tau^i D_i\varphi dx + \int_\Omega \sigma\varphi dx.$$

Wir haben damit eine neue rechte Seite des Dirichlet–Problems konstruiert, welches $u + \psi$ als schwache Lösung besitzt. □

Um das Dirichlet–Problem schwach lösen zu können, brauchen wir den Satz von Lax[1]–Milgram[2]. Im folgenden bezeichnet X^* wieder den Dualraum von X, d.h. den Raum aller stetigen Linearformen $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition 4.2.4 *Eine stetige Bilinearform $B : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt* koerziv, *falls es eine positive Konstante $\mu > 0$ gibt, so daß $B(x,x) \geq \mu \|x\|^2$ ist.*

Satz 4.2.5 (Lax-Milgram) *Es sei X ein Hilbertraum, $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Ist B beschränkt und koerziv, so gibt es zu jedem beschränkten linearen Funktional $x^* \in X^*$ ein $y \in X$ mit $B(x,y) = x^*(x)$.*

Im Beweis brauchen wir den Riesz'schen[3] Darstellungssatz. Wir erinnern zunächst kurz daran.

Satz 4.2.6 *Für jedes stetige lineare Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum X gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $x_0 \in X$ mit*

$$x^*(x) = \langle x, x_0 \rangle_X.$$

Beweis. Ist $x^* = 0$, so ist nichts zu zeigen, im anderen Fall gilt mit $X_0 = \ker x^*$, daß $X_0 \neq X$ (klar!) ist und daß X_0 ein abgeschlossener Unterraum von X ist. Dann gibt es ein Element $\tilde{x} \in X$ mit

$$\langle x, \tilde{x} \rangle_X = 0, \ \forall x \in X_0.$$

---

[1] Peter Lax (1.5.1926–) studierte und lehrt am Courant Institute in New York. Er arbeitet vor allem über partielle Differentialgleichungen. Seine wichtigsten Arbeiten behandeln hyperbolische Erhaltungssätze.

[2] A. M. Milgram

[3] Frédéric Riesz (22.1.1880-28.2.1956) übertrug die Begriffe, die Fredholm und Hilbert im Kontext von Integralgleichungen entwickelt hatten, auf allgemeinere Räume und begründete damit die moderne, abstrakte Funktionalanalysis. Er zeigte im Jahr 1907 die Vollständigkeit des Raumes L^2. Von ihm stammt die Spektraltheorie für beschränkte selbstadjungierte Operatoren (1929). Er zeigte einen Darstellungssatz für lineare Funktionale auf dem Raum der stetigen Funktionen. Schon 1910 hatte er die Dualität der Räume L^p und L^q mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ erkannt. Auf ihn gehen darüberhinaus Beiträge zur Ergodentheorie, Topologie und Funktionentheorie zurück.

$\tilde{x}$ ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig. Andernfalls gibt es $x_1,\ x_2$ linear unabhängig, so daß $x_i \perp X_0$. Dann ist $x^*(x_1) = \alpha x^*(x_2)$ und $x_1 - \alpha x_2 \in X_0$. Dies ist ein Widerspruch, denn $x_1 - \alpha x_2 \perp X_0$. □

Beweis des Satzes 4.2.5. Aus dem Satz von Riesz folgt die Existenz einer Abbildung $T : X \to X$ mit

$$B(x, y) = \langle x, Ty\rangle_X,$$

denn $B(\cdot, y)$ ist eine lineare Abbildung $X \to \mathbb{R}$ und als solche durch ein Skalarprodukt darstellbar. T ist offenkundig linear und stetig, denn $|B(x, y)| \le K\|x\|\|y\|$ und damit ist wegen

$$K\|x\|\|y\| \ge |B(x, y)| = |\langle x, Ty\rangle_X|$$

$\|Ty\| \le K\|y\|$. Aus

$$\mu\|x\|^2 \le |B(x, x)| = |\langle x, Tx\rangle_X| \le \|x\|\|Tx\|.$$

erhalten wir $\|Ty\| \ge \mu\|y\|$. Also ist T injektiv, die Inverse existiert und ist beschränkt. Insbesondere ist das Bild von T abgeschlossen. Angenommen $R(T) \ne X$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $B(x, y) = \langle x, Ty\rangle_X = 0$ für alle $y \in X$. Insbesondere ist $B(x, x) = 0$. Also folgt $x = 0$. Deshalb ist T^{-1} ein beschränkter linearer Operator auf X. Der Satz folgt nun mit $y = T^{-1}\tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ das dem Funktional mit dem Riesz'schen Satz zugeordnete Element in X ist. □

Um den soeben angegebenen Satz anzuwenden, benötigen wir eine Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$. Wir setzen

$$B_L(u, \varphi) = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ij} D_j u + \sum_i b^i u\right) D_i\varphi dx - \int_\Omega \left(\sum_i c^i D_i u + du\right) \varphi dx \tag{4.2.3}$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Durch Fortsetzen erhalten wir eine Form auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ setzen wir

$$F(v) = \int\limits_\Omega (-fv + g^i D_i v)dx. \tag{4.2.4}$$

Damit ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von

$$Lu = F \text{ im schwachen Sinn} \Longleftrightarrow \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \text{ gilt } B_L(u, v) = F(v).$$

F ist eine Linearform. Nach dem Satz von Lax–Milgram hat diese Gleichung immer dann eine Lösung, falls B_L beschränkt und koerziv und F beschränkt ist. Wir haben:

Lemma 4.2.7 *(i) F ist eine stetige Linearform auf $H_0^1(\Omega)$.*

(ii) Ist L stark elliptisch und gibt es Konstanten M, q mit

$$\sum_{i,j} |a^{ij}|^2 \le M, \lambda^{-2}\left(\sum_i \left(|b^i|^2 + |c^i|^2\right)\right) + \lambda^{-1}|d| \le q^2, \tag{4.2.5}$$

so ist B_L beschränkt auf $H_0^1(\Omega)$ und es gilt

$$B_L(u,u) \geq \frac{\lambda}{2} \int\limits_\Omega |Du|^2 dx - 2\lambda q^2 \int\limits_\Omega u^2 dx, \tag{4.2.6}$$

wobei $|Du| = \left(\sum_i |D_i u|^2\right)^{1/2}$.

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \sum_i \|g^i\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,2}^\Omega \\ &\leq C\|v\|_{1,2}^\Omega. \end{aligned}$$

Dabei hängt C nur von der rechten Seite ab.

(ii) 1.) Stetigkeit von B_L:

$$\begin{aligned} |B_L(u,v)| &\leq \int\limits_\Omega |\sum_{i,j} a^{ij} D_j u + \sum_i b^i u||D_i v| dx + \int\limits_\Omega |\sum_i c^i D_i u + du||v| dx \\ &\leq \int\limits_\Omega \sum_{ij} |a^{ij} D_j u D_i v| + \sum_i |b^i u D_i v| + \sum_i |c^i D_i u v| + |duv| dx \\ &\leq C\|u\|_{1,2}^\Omega \|v\|_{1,2}^\Omega. \end{aligned}$$

2.) „Koerzivität“ von B_L:

$$\begin{aligned} B_L(u,u) &= \int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ij} D_j u D_i u + \sum_i (b^i - c^i)(D_i u) u - du^2 \right) dx \\ &\geq \int\limits_\Omega (\lambda |Du|^2 - \sum_i (|b^i - c^i|) |(D_i u) u| - du^2) dx \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \int\limits_\Omega |Du|^2 dx - \lambda q^2 \int\limits_\Omega u^2 dx, \end{aligned}$$

denn mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgert man

$$\begin{aligned}
du^2 + \sum |b^i - c^i| u D_i u &\le \sqrt{\sum |b^i - c^i|^2}\, |u||Du| + |d|u^2 \\
&\le \sqrt{\sum (|b^i| + |c^i|)^2} |u||Du| + du^2 \\
&\le \sqrt{2}\sqrt{\sum (|b^i|^2 + |c^i|^2)}\, |u||Du| + |d|u^2 \\
&\le \sqrt{2}\lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} \sum (|b^i|^2 + |c^i|^2)}\, (\frac{\varepsilon^{-1}}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2}|Du|^2) + |d|u^2 \\
&\le \sqrt{2}\lambda \sqrt{q^2 - \frac{|d|}{\lambda}} (\frac{\varepsilon^{-1}}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2}|Du|^2) + |d|u^2 \\
&\le \sqrt{2}\lambda q \frac{\varepsilon}{2}|Du|^2 + \sqrt{2}\lambda q \frac{\varepsilon^{-1}}{2} u^2 + |d|u^2 \\
&\le \frac{\lambda}{2}|Du|^2 + (\lambda q^2 + |d|)u^2 \;\; (\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}q}) \\
&\le \frac{\lambda}{2}|Du|^2 + (\lambda q^2 + \lambda q^2)u^2 \\
&\le \frac{\lambda}{2}|Du|^2 + 2\lambda q^2 u^2.
\end{aligned}$$

□

Definition 4.2.8 *Für $\sigma \in \mathbb{R}$ setzen wir $L_\sigma u = Lu - \sigma u$.*

Korollar 4.2.9 *Genügen die Koeffizienten des stark elliptischen Operators L den Voraussetzungen (4.2.5), so ist die dem Operator L_σ zugeordnete Bilinearform B_{L_σ} für alle genügend großen $\sigma \in \mathbb{R}$ koerziv. Insbesondere ist das Dirichlet–Problem*

$$\begin{aligned}
L_\sigma u &= f + D_i g^i \\
u &= \psi
\end{aligned}$$

schwach lösbar.

Um eine allgemeine Lösungstheorie zu erhalten, betrachten wir die Gleichung

$$L_{\sigma_0} u + \sigma_0 \mathbb{I} u = F,\; F \in (H_0^1(\Omega))^*,\; \mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$$

für ein σ_0 so groß, so daß $B_{L_{\sigma_0}}$ beschränkt und koerziv ist. $\mathbb{I}$ sei die Abbildung $\mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$, die durch das L^2–Skalarprodukt definiert ist (siehe unten). Dann existiert nach dem Satz von Lax-Milgram

$$L_{\sigma_0}^{-1} : (H_0^1(\Omega))^* \to H_0^1(\Omega).$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I} u = L_{\sigma_0}^{-1} F.$$

Lemma 4.2.10 *Die Abbildung*

$$\mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^* : u \mapsto \langle u, . \rangle_{L^2(\Omega)}$$

ist kompakt.

Beweis. Man hat den sogenannten Gelfand[4]Dreier

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))^* \subset (H_0^1(\Omega))^*,$$

der einem erlaubt, $\mathbb{I}$ als Hintereinanderausführung

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \circ J \circ \mathbb{I}_2,$$

zu schreiben, wobei J durch den Riesz'schen Darstellungssatz gegeben ist und

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 &: H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \\ \mathbb{I}_1 &: (L^2(\Omega))^* \to (H_0^1(\Omega))^* \end{aligned}$$

die jeweiligen Einbettungen sind, mit $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2^*$. Da $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ ist, und letzterer kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist, ist $\mathbb{I}_2$ eine kompakte Einbettung. Die Operatoren $\mathbb{I}_1$, J sind stetig, also ist $\mathbb{I}_1 \circ J \circ \mathbb{I}_2$ kompakt. □

Definition 4.2.11 *Es sei X ein Banachraum. Ein beschränkter linearer Operator $T : X \to X$ heißt* Fredholm-Operator[5]*, falls* $\dim \ker T < \infty$*, das Bild von T abgeschlossen ist und einen endlich dimensionalen Komplementärraum besitzt. Für dessen Dimension schreibt man oft* $\operatorname{codim} R(T)$*. Die Differenz* $\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \operatorname{codim} R(T)$ *heißt* Index *von T.*

Beispiel 4.2.12 *Matrizen sind immer Fredholm-Operatoren, sind sie quadratisch, so ist der Index* 0.

Bemerkung 4.2.13 *Kompakte Operatoren spielen in der Theorie der Fredholm-Operatoren eine spezielle Rolle. Es gilt allgemein: ist $L : X \to X$ ein Fredholm-Operator und ist $T : X \to X$ kompakt, so ist* $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(L + T)$

Von der Bemerkung 4.2.13 benötigen wir nur einen Spezialfall, nämlich den der kompakten Störung der Identität.

---

[4]Israil Moisejewitsch Gelfand (2.9.1913–) arbeitet vornehmlich über Funktionalanalysis. Er studierte Algebren von Operatoren und darauf aufbauend nichtkommutative Banachalgebren und nichtendlichdimensionale Darstellungen von Lie-Gruppen. Er arbeitet auch auf dem Gebiet der Differentialgleichungen, vor allem Randwertprobleme und Hamilton'sche Systeme. Er ist auch an Anwendungen außerhalb der Mathematik interessiert.

[5]Ivar Fredholm (7.4.1866–17.8.1927) nutzte Erkenntnisse über Integralgleichungen für die Theorie partieller Differentialgleichungen. Insbesondere erkannte er die strukturelle Ähnlichkeit der Lösungstheorie gewisser partieller Differentialgleichungen mit der endlich dimensionaler linearer Gleichungen. Er ist der Begründer der nach ihm benannten Alternative.

Satz 4.2.14 *Ist* $T : X \to X$ *kompakt, so ist* $\mathrm{ind}(\mathbb{1} + T) = 0$.

Beweis. siehe Lehrbücher der Funktionalanalysis. □
Damit hat man sofort:

Lemma 4.2.15 *Der Operator*

$$\mathbb{1} + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}$$

ist ein Fredholm–Operator vom Index 0. Insbesondere gilt

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I} u = F \text{ ist immer lösbar } \iff \ker(\mathbb{1} + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}) \text{ ist trivial.}$$

Für den Hauptsatz dieses Abschnittes, der das allgemeine Lösungsverhalten charakterisiert, benötigen wir den adjungierten Operator L_σ^*.

Definition 4.2.16 *Der zu* L formal adjungierte Operator *ist definiert durch*

$$L^f u = \sum_i (D_i (\sum_j a^{ji} D_j u - c^i u) - b^i D_i u) + du.$$

Formal erhält man für Funktionen $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ das L^2–innere Produkt

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^f v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Es gilt jedoch mehr als nur formale Adjungiertheit:

Satz 4.2.17

$$B_L(u, v) = B_{L^f}(v, u) \; \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Also ist L^f *in* $H_0^1(\Omega)$ *zu* L *adjungiert.*

Beweis. $B_L(u, v) = B_{L^f}(v, u)$ für $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ist offensichtlich. Ferner gilt für $u \in D(L) = D(L^f)$

$$\langle L_f v, u \rangle_{L^2(\Omega)} = B_{L^f}(v, u) = B_L(u, v) = \langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

□

Lemma 4.2.18 *Sei*

$$T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}.$$

Dann ist

$$T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma)(L_{\sigma_0}^f)^{-1} \mathbb{I}.$$

Beweis. Es reicht den Operator $L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ zu betrachten. Der adjungierte Operator ist eine Abbildung $H_0^1(\Omega)^* \to H_0^1(\Omega)^*$ und wir müssen zeigen, daß dieser für $u \in H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)^*$ durch $(L_{\sigma_0}^f)^{-1}\mathbb{I}$ gegeben ist. Dann ist

$$(L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I})^* : H_0^1(\Omega)^* \to H_0^1(\Omega)^*$$

und ist gegeben durch

$$\mathbb{I}^*(L_{\sigma_0}^{-1})^* : H_0^1(\Omega)^* \to H_0^1(\Omega)^{**} \to H_0^1(\Omega)^*$$

mit

$$\mathbb{I}^*(L_{\sigma_0}^{-1})^*(v^*)(u) = (L_{\sigma_0}^{-1})^*(v^*)(\mathbb{I}u) = v^*(L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u)$$

mit $v^* \in H_0^1(\Omega)^*$ und $u \in H_0^1(\Omega)$. Für $v^* = \mathbb{I}v$ ergibt sich dies zu

$$\langle v, L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Andrerseits ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle (L_{\sigma_0}^f)^{-1}\mathbb{I}u, v\rangle_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{I}v\left((L_{\sigma_0})^{-1})\mathbb{I}u\right) \\
&= \mathbb{I}v\left(((L_{\sigma_0}^f)^{-1})^*\mathbb{I}u\right) \\
&= \mathbb{I}v\left(((L_{\sigma_0}^f)^*)^{-1}\mathbb{I}u\right) \\
&= \mathbb{I}v(L_{\sigma_0}^{-1}(\mathbb{I}u)) \\
&= \langle v, L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 4.2.19 *Ist L stark elliptisch und genügt der Abschätzung (4.2.5), dann existiert eine abzählbare, diskrete Teilmenge $\Sigma \subset \mathbb{R}$, so daß für $\sigma \notin \Sigma$ das Dirichlet–Problem*

$$L_\sigma u = f + \sum_i D_i g^i, \quad L_\sigma^f u = f + \sum_i D_i g^i$$

$$u = \psi \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

für beliebige $f, g^i \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$ eindeutig lösbar ist. Ist hingegen $\sigma \in \Sigma$, so bilden die Lösungsmengen der homogenen Randwertprobleme

$$L_\sigma u = 0, \quad L_\sigma^f u = 0,$$

$$u = 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

positiv und endlich–dimensionale Unterräume von $H_0^1(\Omega)$. Das Problem

$$L_\sigma u = f + \sum_i D_i g^i \quad \textit{in } \Omega$$

$$u = \psi \ \textit{auf } \partial\Omega$$

ist genau dann lösbar, falls

$$\int_\Omega \left\{\left(f - \sum_i c^i D_i\psi - d\psi + \sigma\psi\right) v - \left(\sum_i g^i - \sum_{i,j} a^{ij} D_j\psi - \sum_i b^i\psi\right) D_i v\right\} dx = 0$$

für alle v mit $L_\sigma^f v = 0$, $v = 0$ auf $\partial\Omega$.

Beweis. Folgt aus dem zuvor Gesagten. □

Lemma 4.2.20 *$G_\sigma = L_\sigma^{-1}$, $\sigma \notin \Sigma$, ist beschränkt.*

Beweis.

$$\begin{aligned} L_\sigma^{-1} &= \left(L_{\sigma_0} - (\sigma - \sigma_0)\mathbb{I}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbb{1} + (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}\right)^{-1} L_{\sigma_0}^{-1}. \end{aligned}$$

Da $(\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}$ kompakt ist, ist $\mathbb{1} + (\sigma - \sigma_0)L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}$ für $\sigma \notin \Sigma$ beschränkt invertierbar. □

Daraus folgt eine sogenannte à–priori–Abschätzung.

Korollar 4.2.21 *Ist $u \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von $L_\sigma u = f + \sum_i D_i g^i$, $u = \psi$ auf $\partial\Omega$, $\sigma \notin \Sigma$, so existiert eine Konstante $C = C(L, \sigma, \Omega)$ mit*

$$\|u\|_{1,2}^{\Omega} \leq C\left(\left(\int_\Omega f^2 + \sum_i \int_\Omega |D_i g^i|^2\right)^{1/2} + \|\psi\|_{1,2}^{\Omega}\right).$$

4.3 Das schwache Maximumprinzip und eindeutige Lösbarkeit

Wir hatten die Eindeutigkeit einer eventuell existierenden Lösung für das klassische Dirichlet–Problem aus dem Maximumprinzip gefolgert. Das hilft hier natürlich nicht weiter. Wir müssen den entsprechenden Satz in einer Situation für die schwache Formulierung des Problems beweisen. Dabei treten natürliche Probleme auf, etwa was bedeutet $u \leq 0$ für $u \in H^1(\Omega)$. Entsprechende Probleme gibt es mehrere.

Definition 4.3.1 *(i) Es sei $u \in H^1(\Omega)$. Wir sagen $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$, falls $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ ist. Dabei ist u^+ definiert durch*

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}.$$

(ii) $u \geq 0$ auf $\partial\Omega \iff -u \leq 0$ auf $\partial\Omega$,

(iii) $u \leq v$ auf $\partial\Omega \iff u - v \leq 0$.

Lemma 4.3.2 *Ist u nahe dem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1, stetig, so folgt aus $u \leq 0$, daß diese Bedingung auch punktweise nahe x_0 erfüllt ist.*

Beweis. Annahme: $u(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung, auf der gilt $u^+ > 0$. Es sei $u_\nu \in C_0^1(\Omega)$ eine Folge, die in $H^1(\Omega)$ gegen u^+ konvergiert. Dann gibt es ein ν_0, so daß für alle $\nu > \nu_0$ gilt $u_\nu(x_0) > 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Für das klassische Maximumprinzip benötigt man eine Vorzeichenbedingung an den Koeffizienten d. Für das schwache Maximumprinzip wird diese Bedingung durch eine andere Ungleichung ersetzt.

Satz 4.3.3 *Sei L stark elliptisch mit*

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)dx \le 0 \tag{4.3.7}$$

für alle $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \ge 0$, und wir nehmen an, daß die Koeffizienten für Zahlen $M, q \in \mathbb{R}$ punktweise den Abschätzungen

$$\sum |a^{ij}|^2 \le M \text{ und } \lambda^{-2} \sum (|b^i|^2 + |c^i|^2) + \lambda^{-1}|d| \le q^2 \tag{4.3.8}$$

genügen. Dann gilt für $u \in H^1(\Omega)$ mit $Lu \ge 0$ (≤ 0) in Ω

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_\Omega u \ge \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Beweis. Für $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $uv \in H_0^1(\Omega)$ und $D_i(uv) = vD_iu + uD_iv$. Es gilt

$$B(u,v) \le 0 \iff \int_\Omega \left(a^{ij}D_juD_iv - (b^i + c^i)vD_iu\right) dx \le \int_\Omega duv - b^iD_i(uv)dx \le 0,$$

für alle $v \ge 0$ mit $uv \ge 0$. Daraus folgt dann

$$\int_\Omega a^{ij}D_juD_ivdx \le 2\lambda q \int_\Omega v\|Du\|dx$$

für alle $v \ge 0$ mit $uv \ge 0$. Im Spezialfall $b^i + c^i = 0$ nehme man $v = \max\{u - l, 0\}$ mit $l = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$ und mit

$$0 < \lambda \int_{\operatorname{supp} Dv} a^{ij}D_ivD_jv \; dx = \lambda \int_\Omega a^{ij}D_iuD_j; dxle0$$

erh'alt man einen Widerspruch.

Im allgemeinen gilt: sei (l wie eben definiert)

$$l \le k < \sup_\Omega u, \; v = (u-k)^+,$$

so ist $v \in H_0^1(\Omega)$. Nebenbei sei bemerkt, daß im Falle der Nichtexistenz eines solchen k, der Satz wahr ist. Damit ist

$$Dv = \begin{cases} Du, & u > k \\ 0, & u \le k \end{cases}.$$

Also hat man

$$\lambda \int_\Omega \|Dv\|^2 \; dx \le \int_\Omega a^{ij}D_jvD_ivdx \le 2\lambda q \int_\Gamma v\|Dv\| \; dx$$

mit $\Gamma = \operatorname{supp} Dv \subset \operatorname{supp} v$. Also hat man

$$\int\limits_\Omega \|Dv\|^2\, dx \le 2q \int\limits_\Gamma v\|Dv\|\, dx \le 2q\|v\|_{L^2(\Gamma)}\|Dv\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\|Dv\|_{L^2(\Omega)} \le 2q\|v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Im weiteren sei $n \ge 3$ (die andren Fälle müssen getrennt behandelt werden). Mit der obigen Abschätzung und der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \le C\|v\|_{L^2(\Gamma)} \le C|\operatorname{supp} Dv|^{\frac{1}{n}}\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}.$$

Also ist

$$\operatorname{supp} |Dv| \ge C^{-n}.$$

Also nimmt u sein Maximum auf einer Menge vom positiven Maß an und es gilt $Du = Dv$ auf der gleichen Menge. Dies ist ein Widerspruch. □

4.4 Differenzierbarkeit schwacher Lösungen

Satz 4.4.1 *Es sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung $Lu = f$ in Ω, wobei*

(i) L stark elliptisch ist,

(ii) a^{ij}, b^i gleichmäßig Lipschitz stetig sind,

(iii) $c^i, d \in L^\infty(\Omega)$ sind,

(iv) $f \in L^2(\Omega)$ ist.

Dann gilt

(i) für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ ist $u \in H^2(\Omega')$ und

(ii) $\|u\|_{2,2}^{\Omega'} \le C\left(\|u\|_{1,2}^{\Omega} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$

für eine Konstante $C = C(n, \lambda, K, d')$ mit

$$K = \max\{\|a^{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}, \|b^i\|_{C^{0,1}(\Omega)}, \|c^i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|d\|_{L^\infty(\Omega)}\}$$

und $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Außerdem erfüllt u die Gleichung punktweise f.ü..

Beweis. Da u schwache Lösung ist, folgt für $v \in C_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega a^{ij} D_j u D_i v\, dx = \int\limits_\Omega gv\, dx, \tag{4.4.9}$$

wobei $g \in L^2(\Omega)$ durch

$$g = (b^i + c^i)D_i u + (D_i b^i + d)u - f$$

gegeben ist. Sei $2h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dann ist für $1 \leq k \leq n$ $\Delta_k^{-h} v \in C_0^1(\Omega)$. In der Gleichung 4.4.9 ersetzen wir v durch $\Delta_k^{-h} v$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g \Delta_k^{-h} v dx &= \int_\Omega a^{ij} D_j u D_i (\Delta_k^{-h} v) dx \\
&= \int_\Omega a^{ij} D_j u \Delta_k^{-h} D_i v dx \\
&= \int_\Omega \Delta_k^h (a^{ij} D_j u) D_i v dx.
\end{aligned}$$

Wir berechnen den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\Delta_k^h (a^{ij} D_j u)(x) &= \frac{1}{h} \big(a^{ij}(x + he_k) D_j u(x + he_k) - a^{ij}(x) D_j u(x) \big) \\
&= \frac{1}{h} \big(a^{ij}(x + he_k) D_j u(x + he_k) - a^{ij}(x + he_k) D_j u(x) \\
&\quad + a^{ij}(x + he_k) D_j u(x) - a^{ij}(x) D_j u(x) \big) \\
&= a^{ij}(x + he_k) \Delta_k^h D_j u(x) + \big(\Delta_k^h a^{ij}(x) \big) D_j u(x)
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\int_\Omega a^{ij}(x + he_k) D_j \Delta_k^h u D_i v dx = \int_\Omega -G D_i v - g \Delta_k^{-h} v dx$$

mit $G = (G_1, \dots G_n)$, $G_j = (\Delta_k^h a^{ij}) D_j u$. Damit schätzen wir ab (nach Lemma 2.7.5)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a^{ij}(x + he_k) D_j \Delta_k^h u D_i v dx &\leq \big(\|G\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \big) \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \big(C(n) K \|u\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)} \big) \|Dv\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fürs weitere sei $\eta \in C_0^1(\Omega)$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ und $v = \eta^2 \Delta_k^h u \in C_0^1(\Omega)$. Dann folgt aus $a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$, $(D = (D_1, \dots, D_n))$,

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega |\eta D \Delta_k^h u|^2 dx &\leq \int_\Omega \eta^2 a^{ij}(x + he_k) \Delta_k^h D_i u \Delta_k^h D_j u dx \\
&\leq \int_\Omega a^{ij}(x + he_k) D_j \Delta_k^h u (D_i v - 2 \Delta_k^h u \eta D_i \eta) dx \\
&\leq \big(C(n) K \|u\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)} \big) \big(\|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\Delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)} \big) \\
&\quad + C(n) K \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Setze $a = \|\eta D\Delta_k^h u\|$, $A = C(n)K$, $b = \|u\|_{H^1(\Omega)}$, $c = \|f\|_{L^2(\Omega)}$, $d = \|\Delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\lambda a^2 &\leq (Ab+c)(a+2d) + Aad \\ &\leq (Ab+c)a + (Ab+d)2d * Ada \\ &\leq \varepsilon a^2 + (Ab+c)^2\varepsilon^{-1}(Ab+c)2d + \frac{(Ad)^2}{\varepsilon} + a^2\varepsilon\end{aligned}$$

und damit

$$(\lambda - 2\varepsilon)a^2 \leq (Ab+c)^2\varepsilon^{-1}(Ab+c)2d + \frac{(Ad)^2}{\varepsilon}$$

und weiter

$$a^2 \leq \frac{1}{\varepsilon(\lambda - 2\varepsilon)}\left((Ab+c)^2 + 2d(Ab+c) + A^2d^2\right).$$

Dabei haben wir o.B.d.A. angenommen, daß $\varepsilon < 1$. Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten erhält man

$$a \leq C(A(b+d)+c).$$

Rückeinsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\|\eta\Delta_k^h Du\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(\|u\|_{1,2}^{\Omega} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C\left(1 + \sup_{\Omega}|D\eta|\right)\left(\|u\|_{1,2}^{\Omega} + \|f\|_{L^2(\Omega)})\right)\end{aligned}$$

mit $C = C(n, \lambda, K)$. Wir wählen speziell $\eta = 1$ auf Ω' und $\sup\|D\eta\| \leq \frac{2}{d'}$ mit $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Daraus folgt dann

(i) $Du \in H^1(\Omega')$ für alle Kompakta in Ω und daher

(ii) $u \in H^2(\Omega')$ (mit einer entsprechenden Abschätzung) und

(iii) $Lu \in L^2_{loc}(\Omega)$ mit $Lu = f$ punktweise fast überall.

$\square$

Satz 4.4.2 *Es sei $L = \sum(a^{ij}D_iD_j + b^iD_i + c)$ stark elliptisch mit Koeffizienten $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $c \leq 0$. Dann gibt es für $f \in L^2(\Omega)$ und $\varphi \in H^1(\Omega)$ eine Funktion $u \in H^1(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$ mit $Lu = f$ in Ω und $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$.*

Beweis. Folgt aus dem soeben gezeigten. $\square$

Satz 4.4.3 *Gegeben sei die Gleichung $Lu = f$, L stark elliptisch mit $a^{ij}, b^i \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$, $c^i, d \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$, $f \in H^k(\Omega)$ für $k \geq 1$.*

Dann gilt für eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$, daß für jedes Kompaktum $\Omega' \subset\subset \Omega$ $u \in H^{k+2}(\Omega')$ ist und es gilt eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{k+2,2}^{\Omega'} \leq C\left(\|u\|_{1,2}^{\Omega} + \|f\|_{k,2}^{\Omega}\right)$$

mit $C = C(n, \lambda, K, d', k)$ wobei

$$K = \max\left\{\|a^{ij}\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|b^i\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|c^i\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}, \|d\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}\right\}.$$

Beweis. Induktion über k! □

Satz 4.4.4 *Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des stark elliptischen Problems $Lu = f$ mit $a^{ij}, b^i, c^i, d, f \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Folgt sofort aus den Sobolev'schen Einbettungssätzen. □

4.5 Globale Regularität

Bisher hatten wir Glattheitsresultate in $H^2_{loc}(\Omega)$ erhalten. Unter entsprechenden Regularitätsannahmen an den Rand $\partial\Omega$ wollen wir globale Regularität, d.h. $u \in H^2(\Omega)$ nachweisen.

Satz 4.5.1 *Es sei der Operator L stark elliptisch mit gleichmäßig Lipschitz stetigen Koeffizienten a^{ij}, b^i und wesentlich beschränkten Koeffizienten c^i, d. Ferner sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von*

$$Lu = f, f \in L^2(\Omega).$$

Zusätzlich sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 und es existieren $\varphi \in H^2(\Omega)$, so daß $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$ ist. Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt die a-priori Abschätzung.

$$\|u\|^\Omega_{2,2} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|^\Omega_{2,2}\right) \tag{4.5.10}$$

mit $C = C(n, \lambda, K, \partial\Omega)$.

Beweis. Zeigen wir (4.5.10) für $w = u - \varphi$, so erhalten wir

$$\|w\|^\Omega_{2,2} \leq C\left(\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

also

$$\|u - \varphi\|^\Omega_{2,2} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

und damit

$$\|u\|^\Omega_{2,2} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|^\Omega_{2,2}\right).$$

Es reicht also (4.5.10) für $w = u - \varphi$ zu beweisen. Zunächst folgt aus Lemma 4.4.1, daß $u \in H^1_0(\Omega)$ durch $\|u\|^\Omega_{1,2} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$ abgeschätzt werden kann. Da $\partial\Omega \in C^2$, existiert zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel $B_{r_0}(x_0)$ und eine Funktion

$$\psi : B_{r_0}(x_0) \to D_0 \subset \mathbb{R}^n$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(B_{r_0}(x_0) \cap \Omega) &\subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \\ \psi(B_{r_0}(x_0) \cap \partial\Omega) &\subset \partial\mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

und

$$\psi \in C^2(B_{r_0}(x_0)),\ \psi^{-1} \in C^2(D_0).$$

Sei $R_0 < r_0$, so daß $B_{R_0}(x_0) \subset\subset B_{r_0}(x_0)$. Setze $B^+ = B_{R_0}(x_0) \cap \Omega$, $D' = \psi(B_{R_0}(x_0))$ und $D^+ = \psi(B^+)$. Unter der Abbildung ψ wird die Gleichung $Lu = f$ in B^+ auf eine Gleichung gleichen Typs in D^+ transformiert. Beachte mit $v(y) = u(\psi^{-1}(y))$ erhält man $D_i v = \sum_j D_j u \frac{\partial \psi_j^{-1}}{\partial y_i}$ und daher $D_{ik} v = \sum_{j,l} D_{jl} u \frac{\partial \psi_j^{-1}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi_l^{-1}}{\partial y_j}$.

Weiter gilt

$$\langle B^T AB\xi, \xi\rangle = \langle AB\xi, B\xi\rangle \geq \lambda \|B\xi\|^2 \geq \lambda \underline{B} \|\xi\|^2,$$

mit $\underline{B} = \inf\{|Bx\|, \|x\| = 1\}$. Weiterhin ist mit $B = D\psi(x)$ und $A = (a^{ij})$ die Matrix $B^T AB$ durch

$$\hat{a}^{ij} = (B^T AB)^{ij} = \sum_{l,k} (B^T)^{il} a^{lk} B^{kj} = \sum_{l,k} a^{lk} b^{li} b^{kj}, \quad B = (b^{ij})_{i,j=1,\ldots n}.$$

Der transformierte Operator hat nun die Form

$$L_H^\psi v(y) = \sum_{ij} \hat{a}^{ij}(y) D_{ij} v(y).$$

Durch Differenzieren der Gleichung $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$ erhält man

$$D\psi^{-1}(\psi(x)) D\psi(x) = \mathbb{1}.$$

Die Konstanten K, λ der transformierten Gleichung erhält man aus K, λ und den Ableitungen von ψ. Da $u \in H_0^1(\Omega)$ ist $v = u \circ \psi^{-1} \in H^1(D^+)$. Für alle $\eta \in C_0^1(D')$ gilt $\eta v \in H_0^1(D^+)$. Wir nehmen also an

$$v \in H_0^1(D^+) \text{ genügt } Lv = f \text{ in } D^+, \eta v \in H_0^1(D^+) \; \forall \eta \in C_0^1(D').$$

Für $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \eta, \partial\Omega')$ und für $1 \leq k < n - 1$ gilt

$$\eta^2 \Delta_k^h v \in H_0^1(D^+).$$

Daher folgt aus dem Beweis von Satz 4.4.1, daß

$$D_{ij} v \in L^2(\psi(B_{\rho_0}(x_0) \cap \Omega))$$

für alle $\rho_0 < R_0$ und falls $k \neq n$ ist. Es bleibt eine zweite Ableitung $D_{nn} u$ übrig. Aber die läßt sich sofort aus der Differentialgleichung abschätzen. Damit ist $u \in H^2(B_{\rho_0}(x_0))$. Da x_0 beliebig ist, gibt es endlich viele Kugeln $B_{\rho_k}(x_k)$, so daß $u \in H^2(B_{\rho_k}(x_k))$ ist und die Vereinigung $\cup_k B_{\rho_k}(x_k)$ überdeckt $\partial\Omega$. Zusätzlich ist $u \in H_{loc}^2$, also ist $u \in H^2(\Omega)$ □

Nun folgen weitere Glättungseigenschaften wie im vorigen Abschnitt.

Satz 4.5.2 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.1 mit $\partial\Omega \in C^{k+2}$, $\varphi \in H^{k+2}(\Omega)$ mit $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$ folgt $u \in H^{k+2}(\Omega)$ und*

$$\|u\|_{k+2,2}^\Omega \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{k,2}^\Omega + \|\varphi\|_{k+2,2}^\Omega\right)$$

mit $C = C(n, \lambda, K, k, \partial\Omega)$. Sind $a^{ij}, b^i, c^i, d, f \in C^\infty(\overline{\Omega}), \partial\Omega \in C^\infty$, so ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Schließlich ergeben die bisherigen Resultate zusammen:

Satz 4.5.3 *Es sei L stark elliptisch mit Koeffizienten in $C^\infty(\overline{\Omega})$ und $c \leq 0$. Ferner sei $\partial\Omega \in C^\infty$. Dann gibt es zu $f, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genau eine Lösung des Randwertproblems $Lu = f$ in Ω, $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Es gilt $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

4.6 Eigenwertaufgaben für elliptische Operatoren

Definition 4.6.1 *(i) Der elliptische Operator L heißt* symmetrisch, *falls*

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lu\rangle,\ \forall u, v \in D_L.$$

(ii) Definiere den Operator L^* durch: $v \in D_{L^*}$, wenn es zu jedem $u \in D_L$ ein w gibt mit

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, w\rangle.$$

Wir setzen dann $L^* v = w$.

(iii) L^* heißt selbstadjungiert, *falls L symmetrisch ist und $D_L = D_{L^*}$.*

Bemerkung 4.6.2 *Die Symmetrie eines elliptischen Operators ist leicht nachzuprüfen, die Selbstadjungiertheit ist etwas schwieriger nachzuweisen. Der Satz von K.O. Friedrichs[6] besagt, daß symmetrische Operatoren im wesentlichen selbstadjungiert sind. Wir zitieren diesen Satz ohne Beweis.*

Satz 4.6.3 (Friedrichs) *Zu einem symmetrischen Operator L gibt es eine Erweiterung $\tilde{L}$ mit $D_{\tilde{L}} \supset D_L$ und $\tilde{L}$ ist selbstadjungiert.*

Lemma 4.6.4 *Es sei L ein elliptischer Operator L in Divergenzform mit $D_L = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $a^{ij} = a^{ji}$ für alle i, j. L ist symmetrisch genau dann, wenn $c^i = -b^i$.*

Beweis. Es sei $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle &= \langle \sum_{ij} D_i(a^{ij} D_j u) + \sum_i D_i(b^i u) - \sum_i b^i D_i u + du, v\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle -a^{ij} D_j u, D_i v\rangle - \sum_i \langle b^i u, D_i v\rangle - \sum_i \langle u, D_i v\rangle + \langle u, dv\rangle \\
&= \langle u, Lv.\rangle
\end{aligned}$$

□

[6] Kurt Otto Friedrichs (28.9.1901-31.12.1982) arbeitete über Analysis und mathematische Physik. In seiner Dissertation beschäftigte er sich mit Beulproblemen elastischer Platten, später untersuchte er neben hyperbolischen Gleichungen auch hydrodynamische Probleme und mathematische Fragen in der Quantenfeldtheorie.

Satz 4.6.5 *Es sei L stark elliptisch auf einem beschränkten Gebiet Ω mit Dirichlet-Randbedingungen und symmetrisch. Dann ist $\Sigma(L)$ reell.*

Beweis. Klar ist, daß alle Eigenwerte reell sind. Da L kompakte Resolvente hat, besteht das Spektrum nur aus Eigenwerten. □

Bemerkung 4.6.6 *Selbstadjungierte Operatoren haben reelles Spektrum, unabhängig von der Kompaktheit der Resolvente.*

Satz 4.6.7 (Charakterisierung des kleinsten Eigenwertes) *Es sei L stark elliptisch und symmetrisch (in Divergenzform), ferner sei $d \in L^\infty$. Dann ist der kleinste Eigenwert von L durch*

$$\min \frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle}, \; u \in H_0^1(\Omega),$$

charakterisiert. Der Eigenwert ist einfach, die zugeh"orige Eigenfunktion hat konstantes Vorzeichen.

Definition 4.6.8 *Der Ausdruck*

$$\min \frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle}, \; u \in H_0^1(\Omega)$$

wird als Rayleigh-Quotient[7]

Beweis. Der Beweis wird in den Übungen für $L = -\Delta$ erbracht. Die Rechnungen sind identisch mit den hier benötigten. Man beachte, dass die Abschätzung im Lemma 4.2.7 die Existenz eines Infimums impliziert. Wie im Kapitel 3 zeigt man die existenz des Minimums. □

Satz 4.6.9 (Charakterisierung der restlichen Eigenwerte) *Es sei L wie in* Satz 4.6.7. *Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die ersten n kleinsten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Dann ist*

$$\lambda_{n+1} = \min \left\{ \frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \mid u \in H_0^1(\Omega), \; \int\limits_\Omega u\varphi_j dx = 0, \; j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Die Eigenräume sind endlich dimensional. Die Eigenfunktionen können so gewählt werden, dass sie ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Beweis. Wie zuvor. Man beachte die Orthogonalität der Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten aufgrund der Symmetrie. □

[7]John William Strutt 3. Baron Rayleigh(12.11.1842-30.6.1919) war in Cambridge und London Professor für Physik, erhielt 1904 den Nobelpreis für Physik. Seine Arbeiten umfassen die Theorie des Schalls, Strahlungsgesetze und Eigenwertprobleme der mathematischen Physik.

Satz 4.6.10 (Alternative Charakterisierung der Eigenwerte) *Es sei L wie in* Satz 4.6.7. *Es seien $\lambda_i,\ i \in \mathbb{N}$ Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen φ_i. Dann ist*

$$\lambda_{n+1} = \max\left\{\min\left\{\frac{\langle Lu,u\rangle}{\langle u,u\rangle} \mid u \in H_0^1(\Omega),\ \int\limits_\Omega u\psi_j dx = 0,\ j=1,\dots,n-1\right\}, \psi_j \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Beweis. Zu zeigen ist, das für eine beliebige Auswahl von n-Funktionen v_i das Infimum kleiner oder gleich λ_n ist. Sei

$$\lambda^* = \max\left\{\min\left\{\frac{\langle Lu,u\rangle}{\langle u,u\rangle} \mid u \in H_0^1(\Omega),\ \int\limits_\Omega u\psi_j dx = 0,\ j=1,\dots,n-1\right\}, \psi_j \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Wir zeigen $\lambda^* = \lambda_n$ indem wir einerseits beweisen, daß $\lambda_n \le \lambda^*$ und andrerseits $\lambda^* \le \lambda_n$ gilt. Sei W_n der lineare Spann der Funktionen $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$, H_n der Spann der Funktionen $\varphi_1,\dots,\varphi_n$. Dann ist $W_n^\perp \cap H_n \neq \emptyset$. Sei u aus diesem Schnitt von Länge 1, also $u = \sum c_i\varphi_i$ mit $\sum c_i^2 = 1$. Dann ist

$$\lambda^* = \min\left\{\frac{\langle Lv,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \mid v \in H_0^1(\Omega), v \perp \psi_i\right\} \le \frac{\langle Lu,u\rangle}{\langle u,u\rangle} = \sum_{i=1}^n c_i^2\lambda_i < \lambda_n.$$

Da alle c_i^2 zwischen 0 und 1 liegen und als Summe den Wert 1, ist dies eine konvexe Kombination der Zahlen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ und insbesondere $\lambda^* \le \lambda_n$.

Mit der speziellen Wahl $\psi_i = \varphi_i, i = 1,\dots,n-1$ bekommt man die umgekehrte Ungleichung und damit ist der Satz gezeigt. □

Die Charakterisierung durch Variationsprobleme erlaubt Vergleichssätze für Eigenwerte auf unterschiedlichen Gebieten.

Satz 4.6.11 *Ist $\Omega' \subset \Omega$, L ein gleichmäßig stark elliptischer Operator mit reellen und glatten Koeffizienten. Seien $\sigma_1,\dots,\sigma_n,\dots$ die Eigenwerte von L in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und entsprechend $\sigma_1',\dots,\sigma_n',\dots$ die Eigenwerte von L in $H^2(\Omega') \cap H_0^1(\Omega')$. Dann gilt*

$$\sigma_j' \ge \sigma_j.$$

Beweis. Der Satz folgt aus der Charakterisierung durch Variationsprinzipien. Durch triviales Fortsetzen wird aus $u \in H_0^1(\Omega')$ eine Funktion in $H_0^1(\Omega)$. Der Fortsetzungsoperator $H_0^1(\Omega') \to H_0^1(\Omega)$ werde mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Es sei $\mathbf{v} = (v_1,\dots,v_{n-1})$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n' &= \max\left\{\min\left\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega'),\ u \perp v_1,\dots,v_{n-1}\right\}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega')^{n-1}\right\}\\
&= \max\left\{\min\left\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega'),\ \mathfrak{F}u \perp \mathfrak{F}v_1,\dots,\mathfrak{F}v_{n-1}\right\}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega')^{n-1}\right\}\\
&= \max\left\{\min\left\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega'),\ \mathfrak{F}u \perp v_1,\dots,v_{n-1}\right\}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{n-1}\right\}\\
&\ge \max\left\{\min\left\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega),\ u \perp v_1,\dots,v_{n-1}\right\}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{n-1}\right\}
\end{aligned}$$

Dabei wird im letzten Schritt jedes der Infima vergrößert, da wir mehr Funktionen u zur Konkurrenz zugelassen habe.

Für den vorletzten Schritt ist offensichtlich dass der untere Term nicht kleiner als der obere sein kann, da über eine größere Menge maximiert wird. Wir nehmen an, dass die Gleichheit nicht gilt, also , dass der untere Term echt größer ist. Es sei $\overline{\mathbf{v}} \in (H_0^1(\Omega)^{n-1}$ der Vektor der den unteren Ausdruck maximiert und $\overline{u} \in H_0^1(\Omega')$ der zugehörige Minimierer. Es sei $\underline{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega')$ der Vektor der den oberen Ausdruck maximiert und $\underline{u}$ der zugehörige Minimierer. Dann ist nach Annahme

$$\tau = \frac{B_L(\underline{u}, \underline{u})}{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle} < \frac{B_L(\overline{u}, \overline{u})}{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle}.$$

Nun finden wir zu $\varepsilon > 0$ einen Vektor $\overline{\mathbf{v}}^\varepsilon \in (H_0^1(\Omega'))^{n-1}$, der sich bezüglich $L^2(\Omega')$ um weniger als ε von $\overline{\mathbf{v}}$ unterscheidet. Dazu gibt es einen Minimierer $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega')$. Dann gilt

$$\frac{B_L(u^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\langle u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle} \leq \tau.$$

Es gibt nun eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega')$ nahe u^ε, die othogonal zu $\overline{\mathbf{v}}$ und deren Rayleigh-Quotient daher höchstens τ ist. Dies widerspricht der Konstruktion von $\overline{u}$. □