

Kapitel 3

Das Dirichlet Prinzip

3.1 Motivation von Variationsmethoden

Bevor wir uns der Lösung von Randwertproblemen mithilfe der eben entwickelten Techniken zuwenden, wollen wir uns einer Idee zur Lösung widmen, die einige Elemente dieser Entwicklung benötigt, jedoch historisch einer der fruchtbarsten mathematischen Ansätze ist und bleibt. Die Idee besteht darin die Lösung eines Randwertproblems als Lösung einer Minimierungsaufgabe zu charakterisieren. Wir beginnen mit dem Dirichletschen Randwertproblem für harmonische Funktionen. In der allgemeinen Form hat es für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Gestalt

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

für eine gegebene stetige Funktion $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Das folgende Lemma motiviert die Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen mit sogenannten *Variationsmethoden*.

Lemma 3.1.1 *Für eine Funktion $u \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, welche die folgende Minimierungsaufgabe löst,*

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx = \min \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx \mid v \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = g \right\},$$

gilt u löst die Gleichung (3.1.1).

Beweis. Für festes $v \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ betrachten wir die Funktion

$$j(t) = \int_{\Omega} \|\nabla u + t\nabla v\|^2 dx.$$

Aufgrund der Voraussetzung ist $t = 0$ ein Minimum dieser Funktion. Es gilt

$$j(t) = \int_{\Omega} \langle \nabla u + t\nabla v, \nabla u + t\nabla v \rangle dx = j(0) + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + t^2 \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx.$$

Damit die Funktion j bei $t = 0$ ein Minimum hat, ist notwendig, daß

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = 0$$

ist, für jedes $v \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Wählen wir speziell eine Funktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$, so ergibt sich, aufgrund unserer Überlegungen in Abschnitt 2.2, daß

$$\int_{\Omega} \langle \Delta u, v \rangle \, dx = 0$$

ist. Nun gilt dies für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Diese Menge liegt dicht in $L^2(\Omega)$ (nach Lemma 2.3.6). Damit ist

$$\int_{\Omega} \langle \Delta u, v \rangle \, dx = 0$$

für alle $v \in L^2(\Omega)$ (da das Skalarprodukt stetig ist). Also ist $\Delta u = 0$. $\square$

Definition 3.1.2 *Das Integral (wenn immer es existiert)*

$$\mathcal{D}(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dx$$

wird als Dirichletintegral von u bezeichnet.

Die eben angestellten Überlegungen lassen sich unschwer auf die Poissonsche Gleichung übertragen. Wir wollen dies nun ausführen.

Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

wobei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$ stetige Funktionen seien. Setze

$$U = \left\{ u \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = g \right\}.$$

In diesem Raum würden wir gerne Lösungen für die Gleichung (3.1.2) finden.

Definition 3.1.3 Für $u \in U$ sei

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dx + \int_{\Omega} u f \, dx$$

das Energieintegral von u .

Satz 3.1.4 (i) Die Gleichung (3.1.2) besitzt höchstens eine Lösung.

- (ii) Ist $u \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Poissonschen Gleichung, so minimiert u das Energieintegral im folgenden Sinn:

$$J(u) = \min \left\{ J(v) \mid v \in U \right\}.$$

- (iii) Ist $u \in U$ ein Minimum des Energieintegrals auf U , so löst u die Poissonsche Gleichung.

Beweis.

- (i) Angenommen wir hätten zwei Lösungen, so würde die Differenz $w \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Gleichung mit $f = 0$ und $g = 0$ auf der rechten Seite lösen. Damit ist

$$0 = \int_{\Omega} w \Delta w \, dx = \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, dx.$$

Also ist w konstant und damit ist $w = 0$ aufgrund der Randbedingung.

- (ii) Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} J(u + \varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \nabla(u + \varphi), \nabla(u + \varphi) \rangle \, dx + \int_{\Omega} (u + \varphi) f \, dx \\ &= J(u) + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx + J(\varphi) \\ &= J(u) - \int_{\Omega} \varphi \Delta u + J(\varphi) \\ &= J(u) - \int_{\Omega} \varphi f + J(\varphi) \\ &= J(u) + \int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2 \, dx \\ &\geq J(u). \end{aligned}$$

Nun liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ und damit kann jedes $v \in C_B^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega)$ durch $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ approximiert werden. Also ist für $v \in C_B^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$

$$J(u + v) \geq J(u),$$

insbesondere hat u die gewünschten Minimierungseigenschaften.

- (iii) Dieser Schritt ist eine geringfügige Modifikation des Beweis von Lemma 3.1.1. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} J(u + t\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \nabla(u + t\varphi), \nabla(u + t\varphi) \rangle dx + \int_{\Omega} (u + t\varphi)f dx \\ &= J(u) + t \left(\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx + \int_{\Omega} \varphi f dx \right) + t^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2 dx. \end{aligned}$$

Notwendig für die Minimierungsbedingung ist, das Verschwinden des Faktors bei t . Dann ist

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx - \int_{\Omega} \varphi f dx = \int_{\Omega} (\nabla u - f) \varphi dx.$$

Wie oben folgt aus Tatsache, daß diese Gleichung für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, daß $\Delta u - f = 0$. Damit ist diese Aussage bewiesen. $\square$

WEIERSTRASS¹ hat bemerkt, daß es nicht notwendig eine Funktion $u \in C_B^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit vorgegebenen Randwerten gibt, die das Dirichletintegral minimiert. Bis dahin ist man davon ausgegangen, daß ein solches Minimierungsproblem immer eine Lösung besitzt.

Natürlich kann man andere Funktionenräume wählen um die Existenz eines Minimums zu erzwingen. Dabei ist naheliegend größere Funktionenräume heranzuziehen. Wir haben im letzten Kapitel schon vorgearbeitet und die Sobolevräume eingeführt.

3.2 Variationsmethoden im Sobolevraum

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß für gewisse Gleichungen die Minimierungsmethoden aus dem letzten Abschnitt 3.1 im Sobolevraum $H^1(\Omega)$ zum Erfolg führen.

Wir beginnen wieder mit der Gleichung (3.1.1)

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Ziel ist es, eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ zu finden, so daß $u - g \in H_0^1(\Omega)$ liegt und u das Dirichletintegral, das ja für Funktionen in $H^1(\Omega)$ definiert ist, minimiert. Den Zusammenhang mit der klassischen Aufgabenstellung werden wir in einem getrennten Schritt untersuchen. Zunächst also die Formulierung des Ergebnisses.

¹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (31.10.1815-19.2.1887) stellte die Funktionentheorie auf eine neue Grundlage. Von ihm stammt auch eine Kritik des Dirichletschen Prinzips. Seine Vorlesungen zogen Hörer aus ganz Deutschland an die Berliner Universität, die durch sein Wirken zu einem der mathematischen Zentren Deutschlands wurde.

Satz 3.2.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und
- (ii)

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx = \min \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx \mid v \in H^1(\Omega), v - g \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Beweis. Wir betrachten das Infimum

$$\tau := \inf \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx \mid v \in H^1(\Omega), v - g \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

und eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ mit $u_n - g \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx.$$

Wir nennen die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Minimalfolge*. Für das Dirichletintegral der Differenz zweier Folgenglieder ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(u_n - u_m) &= \int_{\Omega} \langle \nabla(u_n - u_m), \nabla(u_n - u_m) \rangle dx \\ &= \mathcal{D}(u_n) + \mathcal{D}(u_m) - 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_n, \nabla u_m \rangle dx \\ &= 2(\mathcal{D}(u_n) + \mathcal{D}(u_m)) - \left(\mathcal{D}(u_n) + 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_n, \nabla u_m \rangle dx + \mathcal{D}(u_m) \right) \\ &= 2(\mathcal{D}(u_n) + \mathcal{D}(u_m)) - \left(\int_{\Omega} \langle \nabla(u_n + u_m), \nabla(u_n + u_m) \rangle dx \right) \\ &= 2(\mathcal{D}(u_n) + \mathcal{D}(u_m)) - 4 \left(\int_{\Omega} \langle \nabla(\frac{1}{2}(u_n + u_m)), \nabla(\frac{1}{2}(u_n + u_m)) \rangle dx \right) \\ &= 2(\mathcal{D}(u_n) + \mathcal{D}(u_m)) - 4\mathcal{D}\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Definition von τ ergibt (beachte $\frac{1}{2}(u_n + u_m) - g = \frac{1}{2}((u_n - g) + (u_m - g)) \in H_0^1(\Omega)$)

$$\tau \leq \mathcal{D}\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \tag{3.2.3}$$

Da $\mathcal{D}(u_n) \rightarrow \tau$ konvergiert, gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl N mit $n > N$ impliziert, daß

$$\tau \leq \mathcal{D}(u_n) \leq \tau + \varepsilon$$

Mit $n, m > N$ folgt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{D}(u_n - u_m) &\leq 2(\mathcal{D}(u_n) + \mathcal{D}(u_m)) - 4\mathcal{D}\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \\ &\leq 4\tau + 4\varepsilon - 4\tau \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Damit ist die Folge

$$\{\nabla u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$. Aus Satz 2.4.1 folgt nun (man beachte, daß $u_n - u_m = (u_n - g) - (u_m - g) \in H_0^1(\Omega)$ liegt), daß die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ bildet und daher einen Grenzwert in $L^2(\Omega)$ besitzt. Wegen der Konvergenz der ersten Ableitungen hat man sogar Konvergenz in $H^1(\Omega)$ und man findet einen Grenzwert

$$H^1(\Omega) \ni u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Da das Dirichletintegral auf $H^1(\Omega)$ stetig ist, folgt, daß

$$\mathcal{D}(u) = \min \left\{ \mathcal{D}(v) \mid v \in H^1(\Omega), v - g \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

□

Im Beweis haben wir in (3.2.4) quasi „en passant“ die Ungleichung

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}(u + v)\right) \leq \frac{1}{2}\mathcal{D}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{D}(v)$$

gezeigt, da die linke Seite nichtnegativ ist. Tatsächlich gilt mehr, eine kleine Rechnung zeigt, daß für $0 \leq \lambda \leq 1$ die folgende Ungleichung

$$\mathcal{D}(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \mathcal{D}(u) + (1 - \lambda)\mathcal{D}(v). \tag{3.2.5}$$

erfüllt ist.

Definition 3.2.2 Es sei V ein linearer Raum, $I : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Genügt diese Abbildung der Ungleichung (3.2.5), d.h. gilt für alle $0 \leq \lambda \leq 1$ und alle $(u, v) \in V \times V$

$$I(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda I(u) + (1 - \lambda)I(v),$$

so nennen wir I konvex.

Bemerkung 3.2.3 Der Begriff der Konvexität ist für die Variationsrechnung zentral. Für die Existenzbeweise von Minimierern von Funktionalen spielt die Konvexität eine wichtige Rolle.

Nun haben wir natürlich noch keine harmonische Funktion gefunden, die unsere Gleichung löst, sondern **nur** eine Funktion in $H^1(\Omega)$, solche Lösungen werden wir

später als *schwache Lösungen* bezeichnen. Wir kommen nun zu einem ersten *Regularitätsresultat*, das besagt, daß die Minimallösung u tatsächlich harmonisch ist, d.h. schwache Lösungen der Laplacegleichung sind auch harmonisch.

Satz 3.2.4 (Weylsches²Lemma) *Es sei $u \in L^1(\Omega)$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gelte*

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0.$$

Dann ist u harmonisch auf Ω .

Beweis. Es sei $h > 0$ und

$$\Omega_h = \left\{ x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > h \right\}.$$

Für $x \in \Omega_h$ sei $J_h u(x)$ die Regularisierung von u . Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_h)$ und ρ , die zu J_h gehörende Glättungsfunktion. Dann ist (unter Verwendung von Satz 2.3.7)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J_h u(x) \Delta \varphi \, dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) \, dy \Delta \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) \Delta \varphi(x) \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} u J_h(\Delta \varphi) \, dy \\ &= \int_{\Omega} u \Delta(J_h \varphi) \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\int_{\Omega} J_h u(x) \Delta \varphi \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_h)$. Dann ist aber $J_h u$ harmonisch, denn wir können die Ableitungen auf $J_h u$ wälzen, d.h.

$$0 = \int_{\Omega} J_h u(x) \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \Delta(J_h u(x)) \varphi \, dx$$

²Claus Hugo Hermann Weyl (9.11.1885-8.12.1955) ist ein Elmshorner geborener deutscher Mathematiker, der später in den USA lehrte und lebte. Sein mathematisches Werk ist äußerst umfangreich, man könnte ihn vielleicht als den produktivsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts bezeichnen. Sein Werk betraf auch die mathematische Physik und er fühlte sich als Mittler zwischen diesen beiden Welten. Die Gruppen, partielle Differentialgleichungen, Relativitätstheorie sind eng mit seinem mathematischen Werk verbunden.

d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_h)$. Der Beweis des Satzes 2.3.7) zeigt (Gleichung (2.3.2), daß für jedes $x \in \Omega_h$ die Menge $J_h u(x) \in [-\|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^1}, \|\rho\|_{L^\infty}\|u\|_{L^1}]$ liegt.

Wir schätzen nun die Differenz $|J_h u(x_1) - J_h u(x_2)|$ ab. Da $J_h u$ harmonisch ist, gilt die Mittelwertgleichung (auf hinreichend kleinen Kugeln in Ω_h). Dies wollen wir ausnutzen. Also für $B_r(x_i) \subset \Omega_h$

$$J_h u(x_i) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_i)} u(y) \, dy.$$

Dann hat man die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} |J_h u(x_1) - J_h u(x_2)| &\leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{(B_r(x_1) \setminus B_r(x_2)) \cup (B_r(x_2) \setminus B_r(x_1))} |u(y)| \, dy \\ &\leq c \mu((B_r(x_1) \setminus B_r(x_2)) \cup (B_r(x_2) \setminus B_r(x_1))). \end{aligned}$$

Damit ist die Familie $J_h u$ gleichgradig stetig, also relativ kompakt. Damit gibt es eine Folge $\{h\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = 0$$

und

$$\{J_{h_i} u\}_{i \in \mathbb{N}}$$

ist gleichmäßig konvergent auf Ω_h . Damit ist die Grenzfunktion v stetig, der Grenzwert genügt der Mittelwertgleichung und ist demnach harmonisch. Es gilt $v = u$ f.ü. und daher ist u harmonisch. $\square$

Bemerkung 3.2.5 Dies ist nicht die bestmögliche Formulierung des Weylschen Lemmas.

Wir wollen nun die Poissonsche Gleichung (3.1.2) betrachten.

Definition 3.2.6 Es sei $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Dirichletproblems für die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

falls, $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und für alle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + f v) \, dx = 0$$

ist.

Bemerkung 3.2.7 Im Gegensatz zur klassischen Aufgabenstellung verlangen wir hier, daß die Randfunktion im Inneren von Ω definiert ist. Im Kontext schwacher Lösungen bedarf die Definition von Funktionen auf „dünnen“ Mengen zusätzlicher nichttrivialer Überlegungen.

Lemma 3.2.8 Es sei $g \in H^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_1(\Omega)$ ist genau dann eine schwache Lösung des Randwertproblems für die Poissongleichung aus Definition 3.2.6, wenn die Funktion $w = u - g$ eine Lösung der Aufgabe

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} (f - \Delta g) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ w &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

ist.

Satz 3.2.9 Schwache Lösungen $u \in H^1(\Omega)$ des Dirichletproblems für die Poisson-Gleichung sind genau die Minimierer des Energieintegrals J auf $H^1(\Omega)$ unter der Nebenbedingung, daß $u - g \in H_0^1(\Omega)$ ist, also u ist schwache Lösung genau dann, wenn

$$u - g \in H_0^1(\Omega)$$

und

$$J(u) = \min \left\{ J(v) \mid v \in H^1(\Omega), v - g \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Beweis. Folgt aus den Überlegungen im Beweis von Satz 3.1.4. □

Satz 3.2.10 Zu jedem $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ gibt es eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und

$$J(u) = \min \left\{ J(v) \mid v \in H^1(\Omega), v - g \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Beweis. Der Beweis folgt den Linien des Beweises von Satz 3.2.1. Im ersten Schritt führen wir das Problem auf ein Problem mit Nullrandbedingungen zurück. Es sei $u \in H^1(\Omega)$ die gesuchte Lösung und $w = u - g$. Dann ist $w \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta w &= f - \Delta g && \text{in } \Omega \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Umgekehrt hat man eine schwache Lösung $w \in H_0^1(\Omega)$ dieses Problems, so entsteht durch

$$u = w + g$$

eine Lösung des ursprünglichen Problems. Im ersten Schritt ist zu zeigen, daß $J(\cdot)$ nach unten beschränkt ist.

Die Poincarésche Ungleichung garantiert uns ein $c > 0$ mit $\|\nabla(u - g)\|_{L^2} \geq c\|u - g\|_{L^2}^2$. Mit $w = u - g$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
J(u) &= J(w + g) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla(w + g)\|^2 dx + \int_{\Omega} f(w + g) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla w\|^2 + 2\langle \nabla w, \nabla g \rangle + \|\nabla g\|^2) dx \\
&\geq \frac{c}{2} \int_{\Omega} w^2 dx - \int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla g \rangle dx - \int_{\Omega} \|\nabla g\|^2 dx - \|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2} - \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \\
&\geq c \|u\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\
&\geq -\frac{1}{4c} \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Dieses Argument zeigt noch etwas mehr, ist $j(r) = \inf \{ J(u) \mid \|u\| = r \}$, so ist

$$\lim_{r \rightarrow \infty} j(r) = \infty.$$

Daraus folgt, dass für eine Minimalfolge

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \tau$$

folgt, dass diese Folge beschränkt ist. Die Folge enthält eine schwach konvergente Teilfolge $\{u_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Sei

$$u^* = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j}$$

der schwache Grenzwert. Dann ist

$$J(u^*) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} J(u_{n_j}) = \tau.$$

Damit ist $J(u^*) = \tau$.

□