

Kapitel 2

Sobolev–Räume

2.1 Funktionalanalytische Vorbemerkungen

Wir wiederholen einige Definitionen und Sätze aus der Funktionalanalysis. Wir werden dazu keine Beweise angeben, diese können in jedem Lehrbuch der Funktionalanalysis gefunden werden.

In diesem Abschnitt sei V ein (reell) linearer Vektorraum.

Definition 2.1.1 V heißt ein Banachraum¹, falls es eine Abbildung (Norm) $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

- (i) $\|v\|_V \geq 0 \forall v \in V$;
- (ii) $\|v\|_V = 0$ genau dann, wenn $v = 0$;
- (iii) $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$;
- (iv) $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \forall v_1, v_2 \in V$.
- (v) Bezüglich der durch diese Norm induzierten Metrik ist V vollständig.

Definition 2.1.2 Ein Banachraum heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Lemma 2.1.3 Die Menge aller linearen, stetigen Abbildungen

$$l : V \rightarrow \mathbb{R}$$

ist nicht $\{0\}$ und bildet mit der Norm

$$\|l\|_{V^*} = \sup_{\{x \in V \mid \|x\|_V = 1\}} |l(x)|$$

einen Banachraum V^* .

¹Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945) polnischer Mathematiker. Er war der Begründer der Theorie linearer, normierter Räume und ihren linearen Abbildungen. Seine Arbeiten sind die Grundlage der modernen Funktionalanalysis. Er und seine Schüler zeigten viele Anwendungen der Funktionalanalysis auf.

Beweis. Folgt aus den Sätzen von Hahn² und Banach. $\square$

Definition 2.1.4 (i) Es sei V ein Banachraum. Der Raum V^* heißt Dualraum von V . Der biduale Raum V^{**} ist definiert als

$$V^{**} = (V^*)^*.$$

(ii) Die Abbildung $J : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto v^{**}$ mit

$$v^{**}(w) = w(v) \quad \forall w \in V^*$$

heißt kanonische Inklusion.

(iii) Ist die kanonische Inklusion ein Isomorphismus, so nennt man V reflexiv.

Satz 2.1.5 Direkte Produkte und abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.

Bemerkung 2.1.6 Die Reflexivität ist entscheidend bei der Frage nach der Kompaktheit von beschränkten Mengen in der sogenannten schwach-* -Topologie.

Ein Spezialfall reflexiver Räume sind Hilberträume³.

Definition 2.1.7 Ein reeller Banachraum V heißt Hilbertraum wenn für je zwei Elemente $x, y \in V$ gilt

$$\|x + y\|_V^2 + \|x - y\|_V^2 = 2(\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2) \quad \text{Parallelogrammgleichung.}$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Existenz eines Skalarproduktes, d.h. einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (i) $\langle ax, y \rangle_V = a \langle x, y \rangle_V \quad \forall x, y \in V, a \in \mathbb{R}$
- (ii) $\langle x + y, z \rangle_V = \langle x, z \rangle_V + \langle y, z \rangle_V$
- (iii) $\langle x, y \rangle_V = \langle y, x \rangle_V$
- (iv) $\langle x, x \rangle_V = \|x\|_V^2.$

Lemma 2.1.8 Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

²Hans Hahn (27.9.1879-24.7.1934) formulierte unabhängig von Banach den Begriff des normierten linearen Raumes und zeigte zwei Jahre vor Banach Fortsetzungssätze für stetige lineare Funktionale.

³David Hilbert (23.1.1862-14.2.1943) begann seine mathematische Karriere mit Untersuchungen zur Invariantentheorie. Er gilt als einer der universalsten Mathematiker seiner Zeit und arbeitete auf praktisch allen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik. Dabei hat er mehrfach wesentliche neue Entwicklungen angebahnt. Er war einer der Hauptvertreter der mathematischen Logik und der axiomatischen Begründungen.

Beweis. Leicht nachzuprüfen! $\square$

Definition 2.1.9 Es seien $V_{1,2}$ reelle Banachräume. Eine lineare Abbildung $L : V_1 \rightarrow V_2$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß für jedes $v \in V_1$ gilt:

$$\|Lv\|_{V_2} \leq c\|v\|_{V_1}.$$

Dann gilt folgendes einfache Lemma.

Lemma 2.1.10 Ein linearer Operator $L : V_1 \rightarrow V_2$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.

Im Gegensatz dazu ist der folgende Satz nichttrivial. Beweise findet man in Büchern über Funktionalanalysis.

Satz 2.1.11 (Banach) Es sei $L : V_1 \rightarrow V_2$ ein beschränkter linearer Operator. Ist L surjektiv, so ist L offen, d.h. Bilder offener Mengen unter L sind offen.

Eine weitere wichtige Klasse bilden die sogenannten abgeschlossenen Operatoren. Im folgenden sei $L : V_1 \rightarrow V_2$ nicht notwendig überall definiert, mit $D(L)$ bezeichnen wir den Definitionsbereich.

Definition 2.1.12 Es sei $L : V_1 \rightarrow V_2$ ein linearer Operator. L heißt abgeschlossen, wenn der Graph $G(L) = \{(v, Lv) \mid v \in V\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $V_1 \times V_2$ ist.

Man beachte, daß

- (i) kartesische Produkte von Banachräumen wieder Banachräume sind.
- (ii) Unterräume von Banachräumen nicht notwendig abgeschlossen sind.

Es gibt ein einfaches Kriterium für die Abgeschlossenheit eines Operators.

Lemma 2.1.13 Ein Operator $L : V_1 \rightarrow V_2$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(L)$ mit $v_n \rightarrow v$ für die auch $\{Lv_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist (gegen ein Element $w \in V_2$), gilt

- (i) $v \in D(L)$
- (ii) $Lv = w$.

Beweis. Nachrechnen! $\square$

Für lineare Operatoren sind Spektrum und Resolventenmenge zwei wesentliche Begriffe.

Lemma 2.1.14 Es sei V ein reeller Banachraum, dann wird $V \oplus V$ mit der Multiplikation

$$\mathbb{C} \times (V \oplus V) \rightarrow (V \oplus V) : (a + ib, v, w) \mapsto (av - bw, aw + bv)$$

zum komplexen Vektorraum.

Definition 2.1.15 Für einen reellen Vektorraum V nennen wir $V \oplus V$ mit der in Lemma 2.1.14 komplexen Struktur die Komplexifizierung $V^{\mathbb{C}}$ von V . Für (v, w) schreiben wir auch $v + \mathbf{i}w$.

Bemerkung 2.1.16 Operatoren L auf V werden in natürlicher Weise zu Operatoren auf $V^{\mathbb{C}}$:

$$L(v, w) = (Lv, Lw) = Lv + \mathbf{i}Lw.$$

Es gilt:

- (i) L ist auf dem komplexen Raum $V^{\mathbb{C}}$ genau dann beschränkt, wenn dies auf V gilt.
- (ii) L ist auf dem komplexen Raum $V^{\mathbb{C}}$ genau dann abgeschlossen, wenn dies auf V gilt.
- (iii) Das Bild von L ist genau dann dicht in $V^{\mathbb{C}}$, wenn dies für L auf V gilt.

Die Begründung dieser drei Aussagen ist sehr einfach!

Definition 2.1.17 Es sei V ein Banachraum, $V^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung und $L : V \rightarrow V$ ein abgeschlossener, linearer Operator. Wir fassen L als Operator $L : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ auf.

- (i) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von L , falls $L - z\mathbb{1}$ nicht injektiv ist. $E(L)$ sei die Menge aller Eigenwerte von L .
- (ii) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liegt im kontinuierlichen Spektrum, wofür wir $T(L)$ schreiben, wenn $L - z\mathbb{1}$ injektiv ist, ein in $V^{\mathbb{C}}$ dichtes Bild hat und die inverse Abbildung nicht beschränkt ist.
- (iii) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liegt im Residualspektrum $R(L)$ von L , falls $L - z\mathbb{1}$ injektiv und das Bild nicht dicht liegt.
- (iv) Das Spektrum von L wird mit $\Sigma(L)$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\Sigma(L) = E(L) \cup T(L) \cup R(L).$$

- (v) Die Resolventenmenge ist das Komplement des Spektrums in $\mathbb{C}$, also

$$P(L) = \mathbb{C} \setminus \Sigma(L)$$

.

Bemerkung 2.1.18 Mit den Sätzen der Funktionalanalysis beweist man, daß die so definierte Resolventenmenge $P(L)$ gerade die Menge der $z \in \mathbb{C}$ ist, für die $(z\mathbb{1} - L)^{-1} : V \rightarrow V$ existiert und stetig ist.

Definition 2.1.19 (i) Ein beschränkter, linearer Operator L heißt kompakt, falls das Bild beschränkter Mengen relativ kompakt ist.

(ii) Auf der Resolventenmenge $P(L)$ definieren wir die Funktion

$$R(\cdot, L) : P(L) \rightarrow \mathcal{L}(V^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}}) : z \mapsto (L - z\mathbb{1})^{-1}$$

und nennen diese die Resolvente von L .

(iii) Ein Operator L hat kompakte Resolvente, wenn für $z \in P(L)$ gilt

$$(L - z\mathbb{1})^{-1} \text{ ist kompakt.}$$

Bemerkung 2.1.20 Die Funktion R ist holomorph. Dieser Sachverhalt erlaubt es Hilfsmittel aus der Funktionentheorie zum Studium von Operatoren heranzuziehen. Diese Methoden sind sehr wichtig, können aber an dieser Stelle nicht vertieft werden.

Bemerkung 2.1.21 Die Resolvente ist entweder für alle oder für kein $z \in P(L)$ kompakt. Diese Aussage folgt aus der sogenannten Resolventengleichung:

$$R(z_1, L) - R(z_2, L) = (z_2 - z_1)R(z_1, L)R(z_2, L).$$

Aufgabe 2.1.22 Man beweise die Resolventengleichung.

$$R(z_1, L) - R(z_2, L) = (z_2 - z_1)R(z_1, L)R(z_2, L).$$

Satz 2.1.23 Sei V ein unendlich dimensionaler Banachraum und $L : V \rightarrow V$ ein linearer Operator.

- (i) Ist L kompakt, so ist $0 \in \Sigma(L)$. Das weitere Spektrum besteht nur aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich höchstens bei 0 häufen.
- (ii) Hat L eine kompakte Resolvente, so besteht $\Sigma(L)$ aus abzählbar vielen Eigenwerten, die sich im Endlichen nicht häufen.

Beweis. Siehe Bücher über Funktionalanalysis, z.B. HIRZEBRUCH & SCHARLAU [6], ALT [1], WERNER [11] oder das Skript zur Vorlesung aus dem SS 2000. $\square$

2.2 Schwache Ableitungen

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Der Träger einer stetigen Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega \mid u \neq 0\}}.$$

Mit $C_0^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger. Wie üblich steht $L^p(\Omega)$ für den Raum der Funktionen, deren Betrag zur p -ten Potenz integrierbar ist, mit der üblichen Norm, welche wir mit $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ bezeichnen. $L_{loc}^1(\Omega)$ steht für den Raum aller meßbaren Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $u \in L^1(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wir nennen diesen Raum den *Raum der lokal integrierbaren Funktionen*. Dabei steht $\Omega' \subset\subset \Omega$ dafür, daß der Abschluß von Ω' eine kompakte Teilmenge von Ω ist.

Definition 2.2.1 Es sei u eine lokal integrierbare Funktion auf Ω .

(a) Die lokal integrierbare Funktion v heißt die schwache Ableitung von u nach x_i , falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \varphi dx.$$

(b) Ist α ein Multiindex, v lokal integrierbar, so sagen wir $v = D^\alpha u$ im schwachen Sinn, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx.$$

Aufgabe 2.2.2 Man zeige, daß eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m$ schwache Ableitungen $D^\alpha u$ besitzt und daß diese mit den klassischen Ableitungen zusammen fallen.

Lemma 2.2.3 Besitzt die lokal integrierbare Funktion u eine schwache Ableitung $D^\alpha u$ und $D^\alpha u$ wiederum eine schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$, so hat u auch eine schwache Ableitung der Form $D^{\alpha+\beta} u$ und es gilt $D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann folgt

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u) \varphi dx$$

Ist $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und schreiben wir $D^\beta \psi = \varphi$, so folgt

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) \varphi dx = \int_{\Omega} (D^\alpha u) (D^\beta \psi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta (D^\alpha u) \psi dx$$

und insgesamt

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \psi dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_{\Omega} D^{\alpha+\beta} u \psi dx$$

□

Definition 2.2.4 Mit $W^{m,p}(\Omega)$ werde für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ der Raum

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \exists v \in L^p(\Omega), \text{ so daß } v = D^\alpha u\}$$

bezeichnet. $W^{m,p}(\Omega)$ heißt Sobolevraum⁴.

⁴Sergej Lwowitsch Sobolev (6.10.1908–3.1.1989) erkannte aufgrund von physikalischen Überlegungen, daß es sinnvoll ist den Lösungsbegriff für partielle Differentialgleichungen abzuschwächen. Später konnte er diese verallgemeinerten Lösungen als Funktionale interpretieren und schuf damit die Grundlage der Theorie der Distributionen. Er war damit der Wegbereiter für den Gebrauch funktional-analytischer Methoden in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Diese sind heute auch aus der Numerik partieller Differentialgleichungen nicht mehr wegzudenken. Auch für diese Entwicklungen legte er den Grundstein in einer Arbeit mit W. I. Smirnow

Satz 2.2.5 (i) $W^{m,p}(\Omega)$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum mit Norm

$$\|u\|_{m,p}^\Omega = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.2.1)$$

(Für $p = \infty$ betrachtet man die Summe der L^∞ -Normen). Für $p < \infty$ ist dieser Banachraum separabel.

(ii) Für $p \in (1, \infty)$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ reflexiv.

(iii) Für $p = 2$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Hilbertraum. Dieser wird mit $H^m(\Omega)$ bezeichnet.

Beweis.

(i) Die Eigenschaften einer Norm sind für (2.2.1) leicht nachzuprüfen. Als einziges bleibt die Vollständigkeit zu beweisen. Dazu sei $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Cauchy-Folge m -fach schwach differenzierbarer Funktionen, bezüglich der Norm (2.2.1). Ferner sei $u_\nu^\alpha = D^\alpha u_\nu$. Dann ist u_ν^α für jedes α eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Es existiert also ein $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $u_\nu^\alpha \rightarrow u^\alpha$. Für jedes ν , α gilt aber

$$\int_\Omega u_\nu^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\nu D^\alpha \varphi dx.$$

Durch Grenzübergang auf beiden Seiten erhält man das erwünschte Resultat.

(ii) Wir zeigen nun, daß $W^{m,p}(\Omega)$ für $p < \infty$ separabel ist. Sei s die Anzahl der Multiindizes $|\alpha| \leq m$. Dann können wir $W^{m,p}(\Omega)$ als Unterraum von $(L^p(\Omega))^s$ auffassen durch

$$u \mapsto (u, D^{(1,0,\dots,0)}u, \dots, D^\alpha u, \dots).$$

Auf diese Weise wird $W^{m,p}(\Omega)$ zum abgeschlossenen Unterraum von $(L^p(\Omega))^s$. Da letzterer separabel ist, gilt dies auch für $W^{m,p}(\Omega)$.

(iii) Da für $1 < p < \infty$ $L^p(\Omega)$ reflexiv ist, gilt dies auch für $(L^p(\Omega))^s$ und damit auch für dessen abgeschlossene Unterräume.

(iv) Das ist klar.

□

2.3 Approximation durch glatte Funktionen

Definition 2.3.1 Eine Glättungsfunktion (engl. mollifier) ist eine Funktion $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

(i) $\rho = 0$ außerhalb $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$.

(iii) $\rho \geq 0$.

Beispiel 2.3.2

$$\rho_c(x) = \begin{cases} ce^{-\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right)}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Glättungsfunktion, falls $c > 0$ so gewählt wird, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_c(x) dx = 1.$$

Definition 2.3.3 Für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h > 0$ und eine Glättungsfunktion ρ ist

$$(J_h u)(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy$$

die Regularisierung von u . Diese ist für alle $x \in \Omega$ mit

$$h < \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

definiert.

Bemerkung 2.3.4 Für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ ist $u_h = J_h u \in C^\infty(\Omega')$, sofern $h < \text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Lemma 2.3.5 Ist $u \in C(\Omega)$, so konvergiert $u_h \rightarrow u$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis. Mit der Substitution

$$z = \frac{x-y}{h}$$

wird u_h zu

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \frac{1}{h^n} \int_{|x-y| \leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= \int_{|z| \leq 1} \rho(z) u(x-zh) dz. \end{aligned}$$

Daher gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $2h < \text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega'} |u_h(x) - u(x)| &\leq \sup_{\Omega'} \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x-zh) - u(x)| dz \\ &\leq \sup_{\Omega'} \sup_{|z| \leq 1} |u(x) - u(x-zh)|. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß $\int_{|z| \leq 1} \rho(z) dz = 1$.

Da u auf dem Kompaktum $\overline{\Omega''}$ mit

$$\Omega'' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(z, \Omega') < h\}$$

gleichmäßig stetig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.3.6 Es sei $1 \leq p < \infty$. Ist $u \in L^p(\Omega)$ oder $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, so konvergiert u_h für $h \rightarrow 0$ gegen u im Sinne der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ beziehungsweise in $L^p_{loc}(\Omega)$.

(Konvergenz in $L^p_{loc}(\Omega)$) bedeutet

$$u_m \xrightarrow{L^p_{loc}(\Omega)} u \iff u_m \xrightarrow{L^p(\Omega')} u \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega.)$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für $1 < p < \infty$, die Modifikationen für den Fall $p = 1$ sind nahezu offensichtlich (beachte: ρ ist beschränkt). Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2h$. Wir setzen

$$\Omega'' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \Omega') < h\}$$

und zeigen zunächst

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega')}$$

Für die nächste Umformung benötigen wir die *Hölder'sche Ungleichung*⁵, sie besagt, daß für Zahlen $p, q > 1$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und Funktionen $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ gilt

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Wir wenden diese an, auf

$$\left. \begin{aligned} |u_h(x)|^p &\leq \left(\int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - zh)| dz \right)^p \\ &= \left(\int_{|z| \leq 1} \underbrace{\rho(z)^{\frac{p-1}{p}}}_{\in L^q(B_1(0))} \underbrace{\rho(z)^{\frac{1}{p}} |u(x - zh)|}_{\in L^p(B_1(0))} dz \right)^p \\ &\leq \left(\int_{|z| \leq 1} \rho(z) dz \right)^{p-1} \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - zh)|^p dz \\ &\leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - zh)|^p dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

⁵Ludwig Otto Hölder (22.12.1859–29.8.1937) arbeitete an den Universitäten Göttingen, Tübingen und Königsberg. Er trug zu vielen Gebieten der Mathematik bei, im Mittelpunkt seines Werkes steht die Algebra mit Untersuchungen spezieller Gruppen. In der Analysis stammen u.a. Arbeiten zur Potentialtheorie und ein Satz über das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten von ihm. In der Mechanik führte er das Hamiltonsche Prinzip für nichtholonome Zwangsbedingungen ein.

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u_h(x)|^p dx &\leq \int_{|z| \leq 1} \left(\int_{\Omega'} |u(x - zh)|^p dx \right) \rho(z) dz \\ &\leq \int_{B_h(\Omega')} |u|^p dx \end{aligned}$$

und damit

$$\|J_h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}.$$

Wir finden zu $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion w mit

$$\|u - w\|_{L^p(\Omega'')} < \varepsilon.$$

Für ein geeignetes $h > 0$ hat man mit Lemma 2.3.5 für die Glättung von w

$$\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon.$$

Alles in allem ergibt sich

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^p(\Omega')} &\leq \underbrace{\|u - w\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq \varepsilon} + \|w_h - u_h\|_{L^p(\Omega')} \\ &\leq 2\varepsilon + \underbrace{\|w_h - u_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq \|w - u\|_{L^p(\Omega'')} \leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Um die Richtigkeit des Satzes bezüglich der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ zu schließen, wenden wir das Ergebnis auf $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ an. Wir beachten dabei, daß die triviale Fortsetzung einer Funktion $u \in L^p(\Omega)$ durch

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ liegt. □

Satz 2.3.7 *Es seien $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $v = D^\alpha u$. Dann konvergiert u_h gegen u und $D^\alpha(u_h)$ gegen v in Sinne der Konvergenz von $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Beweis. Wegen

$$D_x^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha J_h u(x) &= h^{-n} \int_{\Omega} D_x^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= h^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) v(y) dy \\ &= J_h v. \end{aligned}$$

Wie bereits in Lemma 2.3.6 gezeigt konvergiert $J_h v \rightarrow v$. □

Definition 2.3.8 Seien $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Mit $\hat{C}^{m,p}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilmenge mit

$$\|u\|_{m,p}^\Omega = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Bemerkung 2.3.9 $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist ein normierter linearer Raum, der jedoch nicht vollständig ist.

Satz 2.3.10 (Meyers⁶ und Serrin⁷ (1964)) Die Vervollständigung von $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{m,p}^\Omega$ ist $W^{m,p}(\Omega)$.

Im Beweis benötigen wir die sogenannte *Partition der Eins*, ein wichtiges Hilfsmittel der modernen Analysis.

Satz 2.3.11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\{U_\iota\}_{\iota \in J}$ eine offene Überdeckung von Ω . Dann existiert eine Familie von Funktionen $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, so daß

(i) $\text{supp } \varphi_j \subset U_\iota$ für ein $\iota(j) \in J$,

(ii) für alle j ist $\varphi_j \geq 0$,

(iii) für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1, \quad (2.3.3)$$

(iv) zu jedem $x \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung U , so daß nur für endlich viele $j \in \mathbb{N}$

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap U \neq \emptyset. \quad (2.3.4)$$

Man beachte, daß die Summe in (2.3.3) wegen der Bedingung (2.3.4) für jedes $x \in \Omega$ endlich ist.

Beweis von Satz 2.3.10. Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

(i) $\overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}^\Omega} \subset W^{m,p}(\Omega),$

⁶N. G. Meyers ist Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Seine Arbeiten betreffen vornehmlich elliptische Differentialgleichungen

⁷James Serrin ist emeritierter Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Er hat Arbeiten zu vielen Aspekten partieller Differentialgleichungen und deren Anwendungen speziell in der Mechanik und Hydrodynamik geschrieben. Er war für viele Jahre einer der Herausgeber des Archive for rational mechanics and analysis, einer der führenden Zeitschriften auf diesem Gebiet.

$$(ii) \quad W^{m,p}(\Omega) \subset \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}^\Omega}.$$

(i) Wir zeigen, aus $u \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}^\Omega}$ folgt $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Zu zeigen ist, daß jede Cauchyfolge in $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ eineindeutig einem Element in $W^{m,p}(\Omega)$ entspricht. Zur Erinnerung: die Vervollständigung ist als Menge von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen definiert. Die Abbildung

$$T : \hat{C}^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega) : u \mapsto u$$

ist linear und stetig (Norm ≤ 1). Also folgt aus $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist Cauchyfolge, daß auch $\{Tu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Sei $\bar{u} \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}^\Omega}$ ein Repräsentant eines Elementes in $\overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}^\Omega}$, so existiert $v \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $v = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{u}_\nu$. Dieser Grenzwert ist nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängig. Setze

$$T\bar{u} = v,$$

in $W^{m,p}(\Omega)$. Diese Zuordnung hat alle erforderlichen Eigenschaften (Stetigkeit und Injektivität).

(ii) Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gegeben, sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir betrachten eine Überdeckung $\{\Omega_\nu\}_\nu$, d.h. $\Omega = \bigcup_{\nu=1}^\infty \Omega_\nu$ mit den zusätzlichen Eigenschaften,

(i) $\overline{\Omega_\nu} \subset \subset \Omega_{\nu+1}$ und

(ii) $\tilde{\Omega}_\nu = \Omega_{\nu+2} \setminus \overline{\Omega_\nu}$ ist eine offene Überdeckung von Ω . (Man weise nach, daß eine solche Überdeckung existiert!)

Beachte, daß jedes $x \in \Omega$ in maximal zwei Elementen dieser Überdeckung $\{\tilde{\Omega}_\nu\}_\nu$ liegt. Im weiteren betrachten wir nur diese Überdeckung $\{\tilde{\Omega}_\nu\}_\nu$. Nun sei $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine dieser Überdeckung subordinierte Teilung der Eins, d.h. $\text{supp } \psi_j \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega_j}$.

Betrachte nun $u \psi_j$ mit $\text{supp } u \psi_j \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega_j}$. Jede der Funktionen $u \psi_j$ hat m schwache Ableitungen. Für genügend kleines $h_i = h_i(\varepsilon)$ hat

$$w_i = J_{h_i}(u \psi_i)$$

den Träger

$$\text{supp } w_i \subset \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$$

und es gilt

$$\|w_i - u \psi_i\|_{m,p}^\Omega < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Setze $w = \sum w_i$. w ist in $C^\infty(\Omega)$, und es gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha w &= \sum_i D^\alpha w_i = \sum_i D^\alpha (w_i - u \psi_i) + \sum_i D^\alpha (u \psi_i) \\ &= \sum_i D^\alpha (w_i - u \psi_i) + D^\alpha u. \end{aligned}$$

Für jedes $x \in \Omega$ sind in der Summe rechts höchstens endlich viele Terme nicht null (mit gleicher oberer Schranke, nämlich 4). Deshalb folgt für $(0 \leq |\alpha| \leq m)$

$$D^\alpha w - D^\alpha u = \sum_i D^\alpha (w_i - u \psi_i)$$

und daher

$$\begin{aligned} \|D^\alpha w - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_i \|D^\alpha (w_i - u \psi_i)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist $u \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}^\Omega}$. □

Tatsächlich haben wir gezeigt, daß $W^{m,p}(\Omega)$ im Abschluß (bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{m,p}^\Omega$) der Teilmenge der Funktionen von $C^\infty(\Omega)$ ist, deren $\|\cdot\|_{m,p}^\Omega$ -Norm endlich ist.

Definition 2.3.12 $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{m,p}^\Omega$ -Norm, entsprechend $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Bemerkung 2.3.13 $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. Ist Ω beschränkt, so ist

$$W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)!$$

2.4 Sobolev-Ungleichungen

Wir beginnen mit einem wichtigen Spezialfall, der uns an vielen Stellen ausreichen wird. Die Beweise der stärkeren Formen der Sobolev-Ungleichungen sind sehr technisch und sind der Vollständigkeit halber hier angegeben.

Satz 2.4.1 Es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\Omega)$, die nur vom Gebiet Ω abhängt, so daß für alle Funktionen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \int_{\Omega} \|\nabla u\|^p dx. \quad (2.4.5)$$

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion über die Dimension geführt. Wir beweisen die Aussage nur für Funktionen in $C_0^\infty(\Omega)$. Der allgemeine Fall folgt dann aus der Dichtheit dieser Funktionen und der Stetigkeit der Normen, bzw. des Integrales. Der

Induktionsanfang besteht darin eine Funktion $u \in C_0^\infty((a, b))$ zu betrachten. Wir wählen einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $u(x_0) = 0$ und schreiben

$$u(x) = \int_{x_0}^x u'(s) \, ds.$$

Insbesondere folgt dann

$$|u(x)| \leq \int_{x_0}^x |u'(s)| \, ds \leq \int_a^b |u'(s)| \, ds$$

Für $p = 1$ folgt nun

$$\int_a^b |u(x)| \, dx \leq \int_a^b |u'(s)| \, ds (b - a).$$

Im allgemeinen Fall benötigen wir die Höldersche Ungleichung aus Aufgabe A.2.2. Nun ist wegen der Beschränktheit des Intervalls die Funktion $1 \in L^q((a, b))$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und es gilt

$$\int_a^b |u| \, dx = \int_a^b |u| 1 \, dx \leq \|u\|_{L^p} \|1\|_{L^q}.$$

Insbesondere ist

$$\left(\int_a^b |u| \, dx \right)^p \leq \int_a^b |u|^p \, dx \|1\|_{L^q}^p.$$

Dann ist wie oben

$$|u(x)|^p \leq \left(\int_a^b |u'(s)| \, ds \right)^p$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b |u|^p \, dx &\leq \left(\int_a^b |u'(s)| \, ds \right)^p (b - a) \\ &\leq \left(\int_a^b |u'(s)|^p \, ds \right) \|1\|_{L^q}^p (b - a). \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|u'\|_{L^p} \|1\|_{L^q} (b-a)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u'\|_{L^p} (b-a)^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u'\|_{L^p} (b-a). \end{aligned}$$

Der Induktionsschritt besteht darin, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ in einen Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

einzubetten und $u \in C_0^\infty(\Omega)$ durch Null auf Q fortzusetzen. Nun ist für

$$\xi \in [a_{n+1}, b_{n+1}], u^\xi(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n, \xi) \in C_0^\infty(Q^\xi),$$

wobei

$$Q^\xi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \{\xi\}.$$

Damit ist

$$\|u^\xi\|_{L^1(Q^\xi)} \leq C(Q^\xi) \|\nabla_n u^\xi\|_{L^1(Q^\xi)},$$

wobei ∇_n sich nur auf die ersten n Variablen bezieht.

Nun sind alle Gebiete Q^ξ gleich und die Konstante $C(Q^\xi)$ hängt nicht von ξ ab. Damit gibt es eine Konstante C , die nur vom Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ abhängt mit

$$\|u^\xi\|_{L^1(Q^\xi)} \leq C \|\nabla_n u^\xi\|_{L^1(Q^\xi)}.$$

Die Ungleichung bleibt richtig, wenn wir ∇_n durch ∇ ersetzen, also

$$\|u^\xi\|_{L^1(Q^\xi)} \leq C \|\nabla u^\xi\|_{L^1(Q^\xi)}.$$

Integration dieser Ungleichung Über ξ ergibt

$$\|u\|_{L^1(Q)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(Q)}.$$

Der Schritt von L^1 auf L^p ist eine Kopie des Schrittes in Dimension 1 und soll hier nicht wiederholt werden. $\square$

Definition 2.4.2 Die Ungleichung (2.4.5) wird als Poincaréungleichung⁸ bezeichnet.

Bemerkung 2.4.3 Die Bedeutung der Poincaréungleichung liegt darin, daß der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ aufgrund der Poincaré-Ungleichung eine zur üblichen Norm äquivalente Norm besitzt, in der nur die Ableitungen auftreten. Dies ist für viele Schlüsse ein zentraler Gedanke.

⁸Jules Henri Poincaré (29.4.1854-17.7.1912) war ein Zeitgenosse Hilberts und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie auch des Jahrhunderts. Er führte topologische Methoden bei der Untersuchung analytischer Probleme ein und wurde damit auch zu einem Mitbegründer der algebraischen Topologie.

Satz 2.4.4 Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 , $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, p, m)$ und zu jedem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Konstante $C = C(\Omega, m, p, \varepsilon)$, so daß für alle $u \in C^m(\bar{\Omega})$ die Sobolevsche Ungleichung gilt

$$\|u\|_{m-1,p}^\Omega \leq \varepsilon \|u\|_{m,p}^\Omega + C \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus

$$\sum_{|\alpha|=i} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=i+1} \int_{\Omega} |D^\beta u|^p dx + C \int_{\Omega} |u|^p dx \quad (2.4.6)$$

mit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $C = C(p, i, \Omega, \varepsilon)$ und $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Denn mit der Bezeichnung $|D^i u|^p = \sum_{|\alpha|=i} |D^\alpha u|^p$ gilt für $\varepsilon_0 = \min_{i=1, \dots, m-1} (\varepsilon_0(i))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und $C = \max_{i=1, \dots, m-1} (C(i))$

$$\begin{aligned} \|u\|_{m-1,p}^p &= \sum_{i=0}^{m-1} |D^i u|^p \leq |D^0 u|^p + \sum_{i=1}^{m-1} (\varepsilon |D^{i+1} u|^p + C |D^0 u|^p) \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{m,p}^p + ((m-1)C + 1) \|u\|_{L^2(\Omega)}^p \end{aligned}$$

Mit dem üblichen 2^p -Trick und einer Neuanpassung der Konstanten bekommt man nun die Behauptung.

Wir beweisen diese Abschätzung durch vollständige Induktion und beginnen mit dem Fall $i = 1, m = 2, n = 1$. Sei $0 < \varepsilon < 2^p |\Omega|^p$, wobei hier $|\Omega|$ die Intervalllänge ist. Wir unterteilen Ω in Intervalle der Länge

$$L \in \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right].$$

Sei (a, b) eines dieser Teilintervalle. Setze $\alpha = \frac{b-a}{4}$. Wähle Punkte $x_1 \in (a, a + \alpha)$, $x_2 \in (b - \alpha, b)$. Für ein $x_{12} \in (x_1, x_2)$ gilt

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = Du(x_{12}).$$

Es gilt

$$Du(x) = Du(x_{12}) + \int_{x_{12}}^x D^2 u(\xi) d\xi.$$

Daraus folgt nun

$$|Du(x)| \leq \frac{|u(x_1)| + |u(x_2)|}{2\alpha} + \int_a^b |D^2 u(\xi)| d\xi.$$

Integration dieser Ungleichung über $x_1 \in (a, a + \alpha)$, $x_2 \in (b - \alpha, b)$ ergibt

$$\alpha^2 |Du(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |u(\xi)| d\xi + \alpha^2 \int_a^b |D^2 u(\xi)| d\xi.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir durch Potenzieren

$$|Du(x)|^p \leq \frac{c}{\alpha^{p+1}} \int_a^b |u(\xi)|^p d\xi + c\alpha^{p-1} \int_a^b |D^2u(\xi)|^p d\xi \quad (2.4.7)$$

mit $c = c(p)$. Man beachte dazu, daß wegen

$$\int_a^b 1|u(\xi)| d\xi \leq \left(\int_a^b 1^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \leq (4\alpha)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

und einer entsprechenden Abschätzung für $\int_a^b |D^2u| dx$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha^{2p}|Du(x)|^p &\leq 2^p \left(\int_a^b |u(\xi)| d\xi \right)^p + 2^p \alpha^{2p} \left(\int_a^b |D^2u(\xi)| d\xi \right)^p \\ &\leq 2^{p(1+\frac{2}{q})} \alpha^{\frac{2}{q}} \int_a^b |u(\xi)|^p d\xi + 2^{p(1+\frac{2}{q})} \alpha^{\frac{2}{q}} \alpha^{2p} \int_a^b |D^2u(\xi)|^p d\xi. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $p^{-1} + q^{-1} = 1$ schließt man (2.4.7). Wir integrieren nun (2.4.7) bezüglich x und erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b |Du(x)|^p dx &\leq \frac{c}{\alpha^p} \int_a^b |u(x)|^p dx + c\alpha^p \int_a^b |D^2u(x)|^p dx \\ &\leq \frac{c'}{\varepsilon} \int_a^b |u(x)|^p dx + c'\varepsilon \int_a^b |D^2u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Aufaddieren über alle Teilintervalle ergibt das Teilergebnis. Hier, wie im folgenden bedeuten gleiche Konstanten nicht notwendig das gleiche, hängen aber von den gleichen Größen ab. Im Regelfall kann man alle gleichen Konstanten durch die jeweils Größte ersetzen. Verschiedene Konstanten werden eingeführt um den Überblick zu behalten, in welcher Reihenfolge neue Konstanten eingeführt werden müssen.

Der nächste Schritt besteht darin, Würfel mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen zu betrachten. Im wesentlichen wird dabei der gleiche Trick wiederholt, d.h. wir betrachten Würfel $Q = [a_1, b_1] \times \dots [a_i, b_i] \dots [a_n, b_n]$ der Kantenlänge L , wie im ersten Schritt. Dann ergibt sich für einen solchen Würfel und eine Koordinatenparallele $x^i = (x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0)$, wobei x_i in einem Intervall der Länge L variiert

$$\int_{a_i}^{b_i} |D_i u(x^i)|^p dx_i \leq \varepsilon \int_{a_i}^{b_i} |D_{ii} u(x^i)|^p dx_i + \frac{c'}{\varepsilon} \int_{a_i}^{b_i} |u(x^i)|^p dx_i.$$

Integration bezüglich der anderen Variablen x_j , $j \neq i$ ergibt

$$\int_Q |D_i u|^p dx \leq c' \varepsilon \int_Q |D_{ii} u|^p dx + \frac{c'}{\varepsilon} \int_Q |u|^p dx.$$

Addition der entsprechenden Ausdrücke für die verschiedenen Ableitungen $D_i u$ und aufaddieren über die Würfel Q , ergibt die Gleichung (2.4.6).

Im folgenden schreiben wir $|D^k u|^p$ für $\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p$. Der Rest ist eine Induktion über m : für $m = 2$ ist die Behauptung gezeigt für $i = 1$ (trivial für $i = 0$). Angenommen die Gleichung ist wahr für $m = 2, \dots, j$.

Sei $k = m$ und $i = k - 1$. Wir wenden obiges Resultat für $i = 1$, $m = 2$ auf die $(k - 1)$ -ste Ableitung an und erhalten (mit $\varepsilon/2$ statt ε)

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_1}{\varepsilon} |D^{k-1} u|^p dx.$$

Die Induktionsvoraussetzung für $k = m$, $i = k - 1$ ergibt nun

$$\int_\Omega |D^{k-1} u|^p dx \leq \delta \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_2}{\delta^{k-1}} \int_\Omega |u|^p dx$$

Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{2C_1}$. Damit erhalten wir

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{C_2}{\varepsilon^{k-1}} (2C_1)^{k-1} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Alles in allem wird dies zu

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \varepsilon \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{\tilde{C}_1}{\varepsilon^k} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Dies ist die Behauptung für $m = k + 1$, $i = k$.

Als nächstes wollen wir den Induktionsschritt $(i, k) \rightarrow (i, k + 1)$ durchführen. Wir schreiben die Behauptung für $i = k, m = k + 1$ als

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \leq \mu \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_4}{\mu^k} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Dies ergibt mit der Induktionsannahme für allgemeines (i, k)

$$\int_\Omega |D^i u|^p dx \leq \delta \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_3}{\delta^{\frac{i}{k-i}}} \int_\Omega |u|^p dx \quad (2.4.8)$$

$$\int_\Omega |D^i u|^p dx \leq \delta \mu \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_4 \delta}{\mu^k} \int_\Omega |u|^p dx + \frac{C_3}{\delta^{i/(k-i)}} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Mit der Wahl

$$\delta = \varepsilon^{\frac{k-i}{k+1-i}}, \quad \mu = \varepsilon^{\frac{1}{k+1-i}}$$

ergibt sich $\delta\mu = \varepsilon$ und $\mu^k = \varepsilon^{\frac{k}{k+1-i}}$, $\delta^{\frac{i}{k-i}} = \varepsilon^{\frac{i}{k+1-i}}$. Ist $m = k + 1$ folgt daher $\mu^k = \delta^{\frac{i}{m-i}}$. Damit hat man die Behauptung für $i, m = k + 1$. $\square$

Definition 2.4.5 (i) Der Standardkegel mit Öffnung $\rho > 0$ im $\mathbb{R}^n$ ist die Teilmenge

$$K_\rho^S = \{tx \mid x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), \|x'\| < \rho, x_n = 1\}.$$

(ii) Der Standardkegel mit Öffnung ρ und Höhe $h > 0$ ist

$$K_{\rho,h}^S = K_\rho^S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < h\}.$$

(iii) Jedes Bild $K_{\rho,h} = f(K_{\rho,h}^S)$, wobei $f(x) = Ax + b$, $A \in \mathbf{O}(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, heißt Kegel mit Öffnung ρ und Höhe h . Dabei wird b die Spitze von $K_{\rho,h}$ genannt.

Definition 2.4.6 Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt eine (gleichmäßige) Kegelbedingung mit Kegelkonstanten $\rho > 0$, $h > 0$, falls zu jedem Punkt $x \in \Omega$ ein Kegel $K_{\rho,h}$ mit Spitze in x existiert, so daß $K_{\rho,h} \subset \Omega$.

Satz 2.4.7 (Einbettungssatz) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches einer Kegelbedingung mit Konstanten $\rho, h > 0$ genüge. Ist $u \in C^m(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, $m > \frac{n}{p}$, so gibt es eine Konstante $C = C(\rho, h, n, p)$ mit

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \|u\|_{m,p}^\Omega.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für $p > 1$, für $p = 1$ muß man den Beweis geringfügig modifizieren. Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 1 \\ 1 & t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für festes $x \in \Omega$ führen wir im $K_{\rho,h}$ mit Spitze x Polarkoordinaten $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ um x ein. Mit diesen gilt

$$u(x) = - \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr. \quad (2.4.9)$$

Man beachte, daß die Stammfunktion von $\frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right)$ für $r = 0$ den Wert $u(0, \theta) = u(x)$ und für $r = h$ den Wert 0 hat. Integration der Gleichung (2.4.9) führt auf

$$u(x) = - \frac{1}{\mu(S_\rho)} \int_{S_\rho} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr d\theta.$$

Dabei bezeichnet $S_\rho \subset (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$ die Menge der Winkel, so daß (r, θ) in dem Kegel $K_{\rho, h}$ liegt. Mehrmaliges Anwenden partieller Integration der Form

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g \left(\frac{r}{h} \right) u(r, \theta) \right) dr = - \int_0^h r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(g \left(\frac{r}{h} \right) u(r, \theta) \right) dr$$

führt auf

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{(m-1)! \mu(S_\rho)} \int_{S_\rho} \int_0^h r^{m-1} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left(g \left(\frac{r}{h} \right) u(r, \theta) \right) dr d\theta.$$

Mit $r^{m-1} = r^{m-n} r^{n-1}$, $r^{n-1} d\theta dr = dV$ und der Hölderschen Ungleichung schätzt man ab

$$|u(x)| \leq C \left(\int_{K_{\rho, h}} \left| \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left(g \left(\frac{r}{h} \right) u(r, \theta) \right) \right|^p dV \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Um die Höldersche Ungleichung anwenden zu können muß r^{m-n} in $L^q(K_{\rho, h})$ sein, $q = p/(p-1)$. Betrachte

$$\begin{aligned} \int_{K_{\rho, h}} r^{(m-n)q} dx &= \int_{K_{\rho, h}} r^{(m-n)\frac{p}{p-1}} dx \\ &= \int_{S_\rho} \int_0^h r^{n-1} r^{(m-n)\frac{p}{p-1}} dr d\theta \\ &= \mu(S_\rho) \int_0^h r^{\frac{(m-n)p + (n-1)(p-1)}{p-1}} dr. \end{aligned}$$

Der Exponent hat die Form

$$\frac{mp - p - n + 1}{p-1} = \frac{mp - n}{p-1} - 1 > -1.$$

Aus der obigen Beziehung folgt die Behauptung unmittelbar. $\square$

Definition 2.4.8 Eine Funktion $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig Hölder-stetig⁹ mit Exponent α , $0 < \alpha \leq 1$, falls

$$|v|_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty.$$

⁹Ernst Hölder (2.4.1901–??), der Sohn von Ludwig Otto Hölder, beschäftigte sich am Anfang seiner Laufbahn mit Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten und mit Himmelsmechanik. Später beschäftigte er sich vornehmlich mit Variationsmethoden und partiellen Differentialgleichungen.

Satz 2.4.9 Sei $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $r > n$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{1-n/r}} \leq C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Setze $d = \|x - y\|$, $S_x = B_d(x)$, $S = S_x \cap S_y$. Integration der Dreiecksungleichung liefert die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)|\mu(S) \leq \int_S |u(x) - u(z)|dz + \int_S |u(z) - u(y)|dz.$$

Wir erhalten eine obere Abschätzung, indem wir das erste Integral über S_x und das zweite über S_y auswerten. Wir schreiben $z(s) = x + s \frac{z-x}{\|z-x\|}$. Dann ist mit $\rho = \|z-x\|$

$$u(z) - u(x) = \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial s} u(z(s)) ds.$$

Also folgt

$$\int_{S_x} |u(x) - u(z)|dz \leq \int_{S_x} \int_0^\rho \left| \frac{\partial}{\partial s} u(z(s)) \right| ds dz.$$

Mit Polarkoordinaten (r, θ) um x kann dies wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} \int_{S_x} \left(\int_0^\rho \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| ds \right) \rho^{n-1} d\theta d\rho &\leq d^{n-1} \int_{S_x} \left(\int_0^\rho \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| ds \right) d\theta d\rho \\ &\leq d^{n-1} \int_{S_x} \left(\int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| ds \right) d\theta d\rho \\ &\leq Cd^n \int_{S_x} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right| \frac{dz}{\rho^{n-1}} \\ &\leq Cd^n \left(\int_{S_x} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^r dz \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{S_x} \rho^{\frac{(1-n)r}{r-1}} dz \right)^{\frac{r-1}{r}}. \end{aligned}$$

Die gleiche Abschätzung für das zweite Integral ergibt

$$|u(x) - u(y)|\mu(S) \leq cd^{n+1-n/r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |D_i u|^r dz \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Da $\mu(S)$ proportional zu d^n ist, folgt die Behauptung nach Division durch $\mu(S)$. $\square$

2.5 Einbettungssätze

Satz 2.5.1 (Sobolevscher Einbettungssatz) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das einer Kegelbedingung mit Kegelkonstanten ρ, h genüge. Falls $u \in W^{j,p}(\Omega)$, $j > m + \frac{n}{p}$, so gibt es einen Repräsentanten von u in $C^m(\Omega)$.*

Beweis. $\hat{C}^{j,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{j,p}(\Omega)$. Es sei $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \hat{C}^{j,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{j,p}^\Omega$. Für α mit $0 \leq |\alpha| \leq m$ gilt mit Satz 2.4.7 angewendet auf $D^\alpha u \in W^{j-|\alpha|,p}(\Omega)$

$$\sup_{\Omega} |D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu| \rightarrow 0 \text{ mit } \nu, \mu \rightarrow \infty.$$

Damit ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = \tilde{u} \in C^m(\Omega)$. $\square$

Definition 2.5.2 (i) *Es seien X, Y Banachräume. Wir sagen, der Banachraum X ist beschränkt in den Banachraum Y eingebettet, wenn $X \subset Y$ und die Abbildung $T : X \rightarrow Y : x \mapsto x$ beschränkt ist. T wird die Einbettungsabbildung genannt. Wir schreiben $X \hookrightarrow Y$.*

(ii) *Die Einbettung heißt kompakt, wenn die Einbettungsabbildung kompakt ist ($X \hookrightarrow Y$).*

Korollar 2.5.3 *Mit der Bezeichnung $C_*^m(\Omega)$ für den Unterraum von $C^m(\Omega)$ von Funktionen, für die gilt*

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| < \infty,$$

hat man für $j > m + \frac{n}{p}$ eine beschränkte Einbettung $W^{j,p}(\Omega) \rightarrow C_^m(\Omega)$. (Beachte, $\|\cdot\|_m$ macht $C_*^m(\Omega)$ zum Banachraum.)*

Lemma 2.5.4 (Verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung) *Es seien $p_1, \dots, p_\ell > 1$ und $\sum p_i^{-1} = 1$, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^{\ell} f_i \in L^1(\Omega)$$

und

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^{\ell} f_i \right| dx \leq \prod_{i=1}^{\ell} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

Beweis. (Induktion über ℓ) Sei $\sum_{i=1}^{\ell-1} p_i^{-1} = q^{-1}$. Dann ist $q^{-1} + p_\ell^{-1} = 1$ und $\prod_{i=1}^{\ell-1} |f_i| \in L^q(\Omega)$, denn

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{q}{p_i} = 1$$

und

$$|f_i|^q \in L^{\frac{p_i}{q}}(\Omega)$$

und damit ist (mittels der Induktionsannahme)

$$\prod_{i=1}^{q-1} |f_i|^q \in L^1(\Omega)$$

und somit auch

$$\left| \prod_{i=1}^{\ell-1} f_i \right| \in L^q(\Omega).$$

Es gilt dann mit der Hölder'schen Ungleichung

$$\int_{\Omega} \prod_{i=1}^{\ell} |f_i| dx \leq \left\| \prod_{i=1}^{\ell-1} |f_i| \right\|_{L^q(\Omega)} \|f_{\ell}\|_{L^{p_{\ell}}(\Omega)}.$$

Nach Induktionsannahme gilt die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung für Produkte von $\ell - 1$ -Funktionen und man hat daher (unter Beachtung von $\sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{q}{p_i} = 1$ und von $|f_i|^q \in L^{\frac{p_i}{q}}(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \prod_{i=1}^{\ell-1} |f_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\prod_{i=1}^{\ell-1} \left(\int_{\Omega} |f_i|^{q \frac{p_i}{q}} dx \right)^{\frac{q}{p_i}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \prod_{i=1}^{\ell-1} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit ist die verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung gezeigt. $\square$

Satz 2.5.5 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) & p < n \\ C(\overline{\Omega}) & p > n. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Außerdem existieren Konstanten $C = C(n, p)$ mit

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} & p < n \\ \sup_{\Omega} |u(x)| \leq C |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)} & p > n. \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Beweis. Wir beweisen dies für Funktionen $u \in C_0^1(\Omega)$ und führen dann die gleichen Grenzübergänge wie oben durch. Für $u \in C_0^1(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$|u(x)| \leq \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \quad (2.5.12)$$

und daher

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i. \quad (2.5.13)$$

Wir beweisen den Satz zunächst für $p = 1$. Betrachte also

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (2.5.14)$$

Wir wollen das Integral

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx$$

abschätzen. Es gilt

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \dots dx_n.$$

Wir nutzen dies zur iterativen Berechnung (per Induktion) aus:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{konstant bzgl. } x_1} \left(\prod_{i=2}^n \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\prod_{i=2}^n \left(\int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\in L^{n-1}(\mathbb{R})} dx_1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung verwendet.

Dies war der erste Schritt in der Induktion. Wir nehmen nun an, nach j Schritten (für $j \in \{1, \dots, n\}$) sei gezeigt

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \dots dx_j &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_j \dots dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &\quad \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_j \dots dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
 &\quad \left(\prod_{i=j+1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_j \dots dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5.15}$$

Nun erhält man durch Integration bezüglich x_{j+1}

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \dots dx_j dx_{j+1} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \left(\prod_{i=j+1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_{j+1} \\
\leq & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \right. \\
& \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \left. \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_{j+1} u| dx_{j+1} dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{konstant bez. } x_{j+1}} \right) \\
& \left(\prod_{i=j+2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_{j+1} \\
\leq & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_{j+1} u| dx_1 \dots dx_{j+1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^j \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \right. \\
& \left. \prod_{i=j+2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1 \dots dx_j \right)^{\frac{1}{n-1}} \right) dx_{j+1}.
\end{aligned}$$

Eine erneute Anwendung der verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung ergibt (2.5.15) für $j + 1$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u| dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u| dx \text{ (geom. Mittel } \leq \text{ arith. Mittel)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|Du\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die weiteren Fälle bekommt man durch Betrachten von Potenzen von u . Ist $\gamma > 1$, so gilt

$$\| |u|^{\gamma} \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{p'}(\Omega)} \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.5.16)$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ist. Wähle γ so, daß

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}, \text{ d.h. } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p} \quad (p < n). \quad (2.5.17)$$

Wegen (2.5.16) hat man die Abschätzung

$$Q = \frac{\| |u|^{\gamma} \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)}}{\| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für den Zähler von Q ergibt sich

$$\begin{aligned} \| |u|^{\gamma} \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

und für den Nenner

$$\left. \begin{aligned} \| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{p'}(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u|^{(\gamma-1)p'} dx \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{1/p'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.18)$$

Also hat man für Q wegen $\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'} = \frac{n-p}{np}$ die Gleichung

$$Q = \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{np}{n-p}} \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'}} = \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)}.$$

Wir bemerken zum Fall $p > n$ zunächst, daß für Gebiete, die einer Kegelbedingung genügen, bereits aus Satz 2.4.7 die stetige Einbettung von $W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $C(\overline{\Omega})$ folgt. Hier geht es darum, eine vergleichbare Behauptung ohne Kegelbedingung (aber für $W_0^{1,p}(\Omega)$ -Gebiete zu zeigen. Für Gebiete mit Kegelbedingung folgt die Form der Abschätzung auch aus dem Beweis von Satz 2.4.7.

Wir kommen zum Beweis im allgemeinen Fall. Es sei $p > n$. Wir definieren für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine neue Funktion

$$v = \sqrt{n} \frac{|u|}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Ferner setzen wir voraus, daß $|\Omega| = 1$ ist. Dann gilt

$$\|v^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

mit

$$n' = \frac{n}{n-1}, \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

und $p' < n'$ und $\gamma > 1$ wie oben, denn aus dem ersten Teil des Beweises folgt dann

$$\begin{aligned} \|v^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} &\leq \left(\frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \right)^\gamma \| |u|^\gamma \|_{L^{n'}(\Omega)} \\ &\leq \gamma \sqrt{n}^{\gamma-1} \| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{p'}(\Omega)} \frac{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}^\gamma} \\ &\leq \gamma \sqrt{n}^{\gamma-1} \frac{\| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{p'}(\Omega)}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}^{\gamma-1}} \\ &= \gamma \|v^\gamma\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\|v\|_{L^{\gamma n'}(\Omega)} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{L^{(\gamma-1)p'}(\Omega)}^{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

Die rechte Seite wird wegen $|\Omega| = 1$ durch (vgl. Lemma A.2.4)

$$\gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{L^{\gamma p'}(\Omega)}^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

nach oben abgeschätzt. Sei $\delta = \frac{n'}{p'} > 1$ und $\gamma = \delta^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$. Dies ergibt

$$\|v\|_{L^{n'\delta^\nu}(\Omega)} \leq \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|v\|_{L^{n'\delta^{\nu-1}}(\Omega)}^{1-\delta^{-\nu}},$$

wegen $\gamma p' = \delta^\nu p' = n' \delta^{\nu-1}$.

Setze zunächst $\nu = 1$ und erhalte eine Abschätzung

$$\|v\|_{L^{n'\delta^\nu}(\Omega)} \leq \delta^{\delta^{-1}} \|v\|_{L^{n'}(\Omega)}^{1-\delta^{-1}}.$$

Hier kann $\|v\|_{L^{n'}(\Omega)}$ durch

$$\|v\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \|u\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \|Du\|_{L^1(\Omega)}$$

unter Verwendung von 2.5.18 abgeschätzt werden. Da wegen Lemma A.2.4

$$\frac{\|Du\|_{L^1(\Omega)}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \leq 1$$

erhält man für beliebiges ν

$$\|v\|_{L^{n'\delta^\nu}(\Omega)} \leq \delta^{\sum_{\nu} \nu \delta^{-\nu}} C = K,$$

für eine Konstante K . Man beachte die Iteration deren Anfang für $\nu = 2$ so aussieht

$$\|v\|_{L^{n'\delta^2}(\Omega)} \leq \delta^{2\delta^{-2}} \|v\|_{L^{n'\delta}(\Omega)}^{1-\delta^{-2}} \leq \delta^{2\delta^{-2}} \delta^{\delta^{-1}} \|v\|_{L^{n'}(\Omega)}^{(1-\delta^{-1})(1-\delta^{-2})}$$

Mit $\nu \rightarrow \infty$ konvergiert die linke Seite gegen $\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, also

$$\sup_{\Omega} v \leq \tilde{K}.$$

Damit ist

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\tilde{K}}{\sqrt{n}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Durch eine Koordinatentransformation erhält man das Resultat auch für Gebiete mit $|\Omega| \neq 1$. $\square$

2.6 Kompaktheit

Der folgende Satz ist die Grundlage aller Überlegungen zur Kompaktheit in Funktionenräumen, eine Diskussion der Voraussetzungen und einen Beweis findet man im Anhang A Satz A.3.4.

Satz 2.6.1 (Ascoli¹⁰–Arzelà¹¹) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $K \subset C(\overline{\Omega})$ eine Teilmenge. Ist K punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, so ist K relativ kompakt.

¹⁰Giulio Ascoli (20.11.1843–12.7.1896) versuchte das sogenannte Dirichletsche Prinzip in der Variationsrechnung zu rechtfertigen. Dabei gelang es ihm, das nach ihm benannte Kriterium für die relative Kompaktheit von Funktionenmengen zu beweisen. Durch die Fortführung dieser Ideen im Werk von Arzelà wurde dies zu einer Grundlage der Funktionalanalysis.

¹¹Cesare Arzelà (6.3.1847–15.3.1912) stammt aus einfachen Verhältnissen. Ab 1880 hatte er einen Lehrstuhl für Analysis an der Universität Bologna. Er führte einen Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ein und zeigte die Stetigkeit der Grenzfunktionen, wie auch Vertauschungssätze für das Riemannsche Integral. Er verallgemeinerte das Kompaktheitskriterium von Ascoli. Diese Arbeit wurde zum Ausgangspunkt von wichtigen Überlegungen zur Funktionalanalysis.

(Hier bedeutet *punktweise beschränkt*: für jedes x ist $\sup_K |f(x)| < \infty$, *gleichgradig stetig* heißt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $|x - y| < \delta$ und $f \in K$ folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.)

Satz 2.6.2 (Fréchet¹²–Kolmogorov¹³) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega' \subset\subset \Omega$. Für $p \in [1, \infty)$ sei $S \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, $\delta < \text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, so daß

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta, \quad \forall f \in S,$$

so ist $S|_{\Omega'}$ relativ kompakt in $L^p(\Omega')$. ($\tau_h f(x) = f(x + h)$).

Satz 2.6.3 Seien Ω, S wie oben, gilt zusätzlich $\forall \varepsilon > 0$ existiert $\Omega' \subset\subset \Omega$, so daß

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < \varepsilon, \quad \forall f \in S,$$

so ist S relativ kompakt.

Aufgabe 2.6.4 Sei $Z \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Wir fassen jedes $u \in Z$ als auf triviale Weise zu einer Funktion $u \in \mathbb{R}^n$ fortgesetzt auf. Man zeige: Z ist genau dann relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, wenn

$$\|J_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

gleichmäßig in $u \in Z$ konvergiert.

Für den nächsten Satz benötigen wir eine Interpolationsungleichung, die aus der Hölderschen Ungleichung folgt und zunächst formuliert wird.

Lemma 2.6.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in L^p(\Omega)$, dann hat man für λ mit

$$\lambda + (1 - \lambda) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{q}$$

die folgende Ungleichung

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\lambda \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda},$$

wobei $r = \frac{np}{n-p}$ ist.

¹²Maurice René Fréchet (2.9.1879–4.6.1973) fand in seiner Dissertation den Begriff des metrischen Raumes und baute darauf ein neues abstraktes Gebäude auf. Er führte die Begriffe *separabel* und *kompakt* ein. Er hatte Vorbehalte gegen die Theorie der normierten Räume von Banach und legte mit seinem Begriff der Ableitung die Grundlagen der nichtlinearen Funktionalanalysis.

¹³Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (25.4.1903–20.10.1987) begann seine berufliche Arbeit als Schaffner, bevor er das Studium aufnahm. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit. Von ihm wurde nicht nur die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie entscheidend geprägt, sondern auch in der Theorie der dynamischen Systeme stammen wichtige Resultate von ihm (KAM-Theorie).

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |u|^s |u|^{q-s} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\| |u|^s \|_{L^{\tilde{p}}(\Omega)} \| |u|^{q-s} \|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{mit } \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{r}} = 1 \\
&= \left(\left(\int_{\Omega} |u|^{s\tilde{p}} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\int_{\Omega} |u|^{\tilde{r}(q-s)} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|u\|_{L^{s\tilde{p}}(\Omega)}^{\frac{s}{q}} \|u\|_{L^{(q-s)\tilde{r}}(\Omega)}^{\frac{q-s}{q}} \\
&= \|u\|_{L^m(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda}
\end{aligned}$$

mit

$$\lambda = \frac{s}{q}, \quad m = s\tilde{p}, \quad r = (q-s)\tilde{r}.$$

Damit findet man

$$\frac{\lambda}{m} + \frac{1-\lambda}{r} = \frac{s}{mq} + \frac{q-s}{qr} = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) = \frac{1}{q}.$$

Wir wählen nun s , so daß

$$\frac{q-s}{1-s} = \frac{np}{n-p}$$

erfüllt ist, dann sind alle Bedingungen des Lemmas erfüllt. $\square$

Satz 2.6.6 $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist für beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt eingebettet in

(i) $L^q(\Omega)$, $q < \frac{np}{n-p}$ und $p < n$,

(ii) $C(\overline{\Omega})$, $p > n$.

und es gilt

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{1,p}^{\Omega} \leq c \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer gemeinsamen Vorüberlegung: sei $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt und $A_{\varepsilon} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid \|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon, u \in A\}$ und $\tilde{A}_{\varepsilon} = A_{\varepsilon} \cap C_0^1(\Omega)$. Da $C_0^1(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt, ist $A \subset \overline{\tilde{A}_{\varepsilon}}$. (Hier wird der Abschluß bezüglich der $W^{1,p}$ -Norm gebildet.) Wir müssen also zeigen:

- (i) $\tilde{A}_\varepsilon$ ist relativ kompakt in $C(\bar{\Omega})$ für $p > n$, und
- (ii) $\tilde{A}_\varepsilon$ ist relativ kompakt in $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ für $p < n$.

Wir beginnen mit dem ersten Teil:

$\tilde{A}_\varepsilon$ ist in $W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt, also gibt es eine Zahl $B > 0$ mit $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq B$. Wir haben

$$\sup |u| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)} \leq CB|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}.$$

Damit ist $\tilde{A}_\varepsilon$ punktweise beschränkt. Nach Satz 2.4.6 ist $\tilde{A}_\varepsilon$ gleichgradig stetig und damit nach dem Satz von Ascoli-Arzelà Satz 2.6.1 kompakt.

Wir kommen zur zweiten Behauptung:

Sei $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt (o.B.d.A. $A \subset C_0^1(\Omega)$). Ebenfalls stellt es keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, anzunehmen, daß

$$u \in A \Rightarrow \|u\|_{1,p}^\Omega \leq 1.$$

Sei für festes $h > 0$

$$A_h = \{u_h \mid u \in A\}.$$

Dann ist $A_h \subset L^1(\Omega)$ relativ kompakt, denn

$$|u_h(x)| \leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - zh)| dz \leq h^{-n} (\sup \rho) \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

und

$$|Du_h(x)| \leq h^{-1} \int_{|z| \leq 1} |D\rho(z)| |u(x - hz)| dz \leq h^{-n-1} (\sup |D\rho|) \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Dies impliziert, daß A_h beschränkt und gleichgradig stetig in $C(\bar{\Omega})$ ist. Daher ist A_h relativ kompakt in $C(\bar{\Omega})$ und damit relativ kompakt in $L^1(\Omega)$.

Wir beweisen nun, daß A relativ kompakt ist. Dieser Beweis besteht aus drei Schritten:

- (i) u_h ist gleichmäßig nahe an u für $u \in A$.
- (ii) A ist total beschränkt.
- (iii) Totale Beschränktheit impliziert relative Kompaktheit.

(i) Für $u \in A$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
 |u_h(x) - u(x)| &\leq \left| \int_{|z| \leq 1} \rho(z) u(x - zh) dz - u(x) \right| \\
 &= \left| \int_{|z| \leq 1} (\rho(z) u(x - zh) - u(x)) dz \right| \\
 &\leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - zh) - u(x)| dz \\
 &\leq \int_{|z| \leq 1} \int_0^{|z|h} \left| \partial_r u\left(x - r \frac{z}{|z|}\right) \right| dr dz.
 \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man aus der Integration dieser Gleichung

$$\int_{\Omega} |u_h(x) - u(x)| dx \leq h \int_{\Omega} |Du| dx \leq h.$$

Nun ist u_h gleichmäßig (bezüglich A) nahe u in $L^1(\Omega)$ wegen

$$\begin{aligned}
 \|u(x) - u_h(x)\| &\leq \int_{\|z\| \leq 1} \rho(z) |u(x) - u(x - zh)| dz \\
 &\leq \int_{\|z\| \leq 1} \rho(z) \int_0^{h\|z\|} |D_r u\left(x - r \frac{z}{\|z\|}\right)| dz.
 \end{aligned}$$

Integration dieser Ungleichung liefert

$$\int_{\Omega} |u(x) - u_h(x)| dx \leq h \int_{\Omega} |Du| dx \leq h.$$

- (ii) A ist total beschränkt. Zunächst zur Definition der totalen Beschränktheit: eine Menge M in einem Banachraum X heißt total beschränkt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und eine endliche Menge x_i $i = 1, \dots, N$ existiert, so daß $M \subset x_i + \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon}(x_i)$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $h_0 > 0$, so daß für $h < h_0$ und $u \in A$ $\|u_h - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon/2$. Außerdem sei h_0 so klein, daß jedes u_h , $h < h_0$ in $\bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon/2}(x)$. Dann gibt es x_i $i = 1, \dots, N$ mit $A_h \subset \bigcup B_{\varepsilon/2}(x_i)$ $h < h_0$ fest. Dann überdecken die $B_{\varepsilon}(x_i)$ die Menge A . Also ist A total beschränkt.
- (iii) Totale Beschränktheit ist gleichwertig zur relativen Kompaktheit. Aus der Kompaktheit folgt die totale Beschränktheit unmittelbar. Die Umkehrung wird im Anhang gezeigt, siehe Satz A.3.2 im Anhang A.

Nun folgt die relative Kompaktheit von A in $L^1(\Omega)$ aus der von A_h sofort.

Um auf $q > 1$ zu schließen, wenden wir die Interpolationsungleichung aus Lemma 2.6.5 an,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\lambda \|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)}^{1-\lambda} \quad \text{mit } \lambda + (1-\lambda)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{q}. \\ &\leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\lambda \|Du\|_{L^p(\Omega)}^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Jede beschränkte Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$ enthält eine $L^1(\Omega)$ -Cauchyfolge, diese ist damit auch $L^q(\Omega)$ -Cauchyfolge. $\square$

2.7 Differenzenquotienten

Definition 2.7.1 Für $h \neq 0$ ist

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

wobei e_i der i -te Standard Einheitsvektor ist, der i -te Differenzenquotient.

Lemma 2.7.2 Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $h < \text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ gilt für alle $1 \leq i \leq n$

$$\Delta_i^h u \in L^p(\Omega')$$

und es gilt

$$\|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis. Für $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ hat man

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi.$$

Damit folgt

$$|\Delta_i^h u(x)|^p \leq \frac{1}{h} \int_0^h |D_i u(\dots, x_i + \xi, \dots)|^p d\xi.$$

Integration dieser Ungleichung ergibt

$$\int_{\Omega'} |\Delta_i^h u(x)|^p dx \leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_{B_h(\Omega')} |D_i u|^p dx d\xi \leq \int_{\Omega} |D_i u|^p dx.$$

Fortsetzung auf $W^{1,p}$ -Funktionen durch Approximation. $\square$

Für das nächste Lemma benötigen wir die schwache Topologie auf einem Banachraum X .

Definition 2.7.3 (i) Die grösste Topologie auf X , für die jedes Element $x^* \in X^*$ stetig ist, heißt schwache Topologie auf X .

(ii) Die grösste Topologie auf X^* , für die jedes Element $x^{**} \in J(X)$ stetig ist, heißt schwach* Topologie auf X^* .

Es gilt der folgende fundamentale Satz.

Satz 2.7.4 (i) Die Einheitskugel in X^* ist in der schwach* Topologie kompakt.

(ii) Ist X reflexiv, so ist die Einheitskugel schwach kompakt.

(iii) Ist X separabel so kann in beiden Fällen kompakt durch folgenkompakt ersetzt werden.

Beweis. Für einen vollständigen Beweis ziehe man ein Lehrbuch der Funktionalanalysis zu Rate. Wir zeigen einen wichtigen Spezialfall: ist X separabel und reflexiv, so enthält jede beschränkte Folge in X^* eine schwach*konvergente Teilfolge. Sei X separabel, und $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X^* . Da X separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $S \subset X$. Sei x_n eine Abzählung dieser Menge. Dann ist mit $s_n = Jx_n$

$$\{s_n(y_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$$

für jedes n eine beschränkte reelle Folge und besitzt damit eine konvergente Teilfolge. Durch Iteration konstruieren wir eine Teilfolge $\{y_{j_n(k)}^n\}_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $s_m(y_{j_n(k)}^n)$ für $m \leq n$ und $k \rightarrow \infty$ konvergiert. Betrachte die Folge $y_{j_n(n)}^n$. Nach Konstruktion ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ $s_k(y_{j_n(n)}^n)$ konvergent. Also hat man für die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$y_{j_n(n)}^n(x_m) = s_m(y_{j_n(n)}^n) \rightarrow \alpha_m \in \mathbb{R} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Die Abbildung, die auf S definiert ist, und jedem $x_m \in S$ den Wert α_m zuordnet ist beschränkt. Da $S \subset X$ dicht liegt, definiert dies eine Abbildung $y : X \rightarrow \mathbb{R}$ die stetig und linear ist. Faßt man nun, im reflexiven Fall, X mittels der Isomorphie J als Dualraum von X^* auf, so folgt eine entsprechende Aussage für die schwache Konvergenz in X . $\square$

Lemma 2.7.5 Ist $u \in L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ und existiert eine Konstante K , so daß für alle $h > 0$ und jedes $\Omega' \subset \subset \Omega$ mit $\text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > h$ gilt

$$\Delta_i^h u \in L^p(\Omega'), \quad \|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K,$$

so existiert die schwache Ableitung $D_i u$ und es gilt

$$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K.$$

Beweis. Da beschränkte Mengen in $L^p(\Omega')$ schwach kompakt sind ($L^p(\Omega')$ ist reflexiv), gibt es eine Folge $h_m \rightarrow 0$ und ein $v \in L^p(\Omega)$, $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq K$, so daß für jedes $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta_i^{h_m} u dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi v dx.$$

Für $h < \text{dist}(\text{supp } \varphi, \partial\Omega)$ folgt

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta_i^{h_m} u dx \rightarrow - \int_{\Omega} u D_i \varphi dx.$$

Daraus folgt nun

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = - \int_{\Omega} u D_i \varphi dx.$$

Also ist $v = D_i u$. □

2.8 Randwerte

Lemma 2.8.1 Ist $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap C^{m-1}(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^m$, so gilt für $|\alpha| = 0, \dots, m-1$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = 0$$

auf $\partial\Omega$.

Beweis. Wir betrachten den Fall $m = 1$, der Rest ist eine Induktion. Sei $x_0 \in \partial\Omega$, U eine Umgebung von x_0 . Für $U \cap \partial\Omega$ gibt es eine Funktion h , so daß (o.B.d.A.)

$$x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$$

und

$$U \cap \Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n > h(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

ist. Betrachte $F(x) = y$ gegeben durch

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{2.8.19}$$

$$y_n = x_n - h(x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{2.8.20}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $u(x_0) = 0$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Betrachte einen Zylinder Z der Höhe h und einer Kreisscheibe um y_0 mit Radius R in $y_1, \dots, y_{n-1}$ als Boden. Definiere eine Funktion v durch $v(y) = u(F^{-1}(y))$. Dann folgt

$$|v(y)|^2 \leq \left(\int_0^{y_n} \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right| dy_n \right)^2 \leq h \int_0^{y_n} \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right|^2 dy_n.$$

Insbesondere hat man

$$\int_Z |v|^2 dy \leq h^2 \int_Z \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right|^2 dy.$$

Daraus folgt

$$\int_{F^{-1}(Z)} |u|^2 dx \leq Ch^2 \int_{F^{-1}(Z)} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx. \quad (2.8.21)$$

Ist nun $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, so existiert eine Folge $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$u_\nu \rightarrow u \text{ in } W^{m,p}(\Omega)$$

für $\nu \rightarrow \infty$. Da (2.8.21) für jedes u_ν gilt, hat man (2.8.21) auch für u .

Daraus folgt nun

$$\frac{1}{h} \int_Z |v(y)|^2 dy \leq Ch \int_{F^{-1}(Z)} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Da v stetig ist, folgt mit $h \rightarrow 0$, daß $v(y) = 0$ auf der Kreisscheibe mit Radius R ist, also $u(x_0) = 0$. Da x_0 beliebig in $\partial\Omega$ gewählt ist, folgt der Satz. $\square$

Korollar 2.8.2 Ist $p > n$, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Beweis. Es folgt sofort, daß $u \in C(\overline{\Omega})$. Dies impliziert die Behauptung. $\square$

