Partielle Differentialgleichungen

Vorlesung

Universität Hamburg

Reiner Lauterbach

WS 1998/99

Kapitel 1

Grundlagen

Einführung

Nachdem Isaac Newton[1] und Gottfried Wilhelm Leibniz[2] unabhängig Theorien geschaffen hatten, die die Grundlage der Analysis geworden sind, hat Leonhard Euler[3] die Bedeutung des Funktionsbegriffes erkannt und Gleichungen für Funktionen aufgeschrieben, vor allem um Probleme der realen Welt zu verstehen. Bevor wir in die Theorie einsteigen, möchte ich derartige Probleme aufnehmen und lösen. Funktionen als eigenständige Größen aufzufassen, ebnete den Weg für neuartige und weitreichende Entwicklungen. So kann man damit Variationsprobleme formulieren. Joseph Louis Lagrange[4] erkannte, daß die Bewegung eines Körpers die Energie minimiert. Damit kann man die Bewegung eines Körpers als Variationsproblem aufschreiben. Dies ist vergleichbar der Charakterisierung

[1]Isaac Newton (4.1.1643–31.3.1727) Berühmtester englischer Mathematiker, Physiker und Astronom, einer der wenigen Naturwissenschaftler, dem die Ehre zuteil wurde, in Westminster Abbey begraben zu werden, legte die Grundlagen des Verständnisses des Schwerkraft und damit der klassischen Mechanik, die er auf axiomatische Grundlagen stellte. Daneben hatte er als erster Einsicht in die Farbenlehre und begründete die moderne Optik. In der Mathematik war er einer der Wegbereiter der Differentialrechnung.

[2]Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646–14.11.1716) war Philosoph, Mathematiker und Naturforscher. Seine Leistungen wurden nicht anerkannt. Er war einer der Begründer der Analysis und erzielte Erfolge bei der Summation von Reihen. Er erkannte, daß Differentiation und Integration sich umkehren und kannte Kettenregel und andere Differentiationsregeln. Auch er nutzte die neue Theorie, um Probleme der Realität zu lösen, u.a. Belastung eines Balkens. Die Entwicklung der Logik wurde durch seine Arbeiten begonnen.

[3]Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen. Die Herausgabe seines vollständigen Werkes ist bis heute nicht abgeschlossen. Er verbrachte längere Zeit an der Akademie der Wissenschaften in Potsdam und am Hofe der Zarin in St. Petersburg.

[4]Joseph Louis Lagrange (25.1.1736–10.4.1813) war Mathematiker, Physiker und Astronom. Er arbeitete zunächst über Variationsprobleme. Auf Einladung von Friedrich II verbrachte er 20 Jahre in Berlin und verfaßte hier unter anderem sein Werk *Mécanique analytique*. Neben seinen Beiträgen zur Analysis (nach ihm sind eine Restgliedformel und der Multiplikator benannt) stammen auch algebraische Erkenntnisse von ihm.

des Weges des Lichtes, wie sie schon von Pierre de Fermat[5] gegeben wurde. Extremalprobleme in euklidischen Räumen werden durch Bedingungen an die Ableitung gelöst. Für Variationsprobleme übernehmen Funktionenräume die Rolle des euklidischen Raumes, die Bedingungen an die Ableitung führen auf partielle Differentialgleichungen. Damit hat man eine reiche Quelle verschiedenster partieller Differentialgleichungen. Wir werden darauf zurückkommen.

Partielle Differentialgleichungen sind, grob gesprochen, Gleichungen für Funktionen mehrerer Veränderlicher, in denen die Funktion und ihre partiellen Ableitungen vorkommen. Dabei läßt man i.a. nicht zu, daß die Funktion mit mehreren Argumenten (oder Integrale der Funktion usw.) in der Gleichung auftreten. Damit hat die einfachste partielle Differentialgleichung für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.0.1}$$

Wie man schon von den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewöhnt ist, bestimmt die Gleichung allein noch nicht die Lösung. Bei partiellen Differentialgleichungen kommen noch weitere Fragen dazu: auf welchem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ soll die Lösung definiert sein? Wie glatt soll die Funktion sein? Sind alle Ableitungen in der Gleichung an allen Stellen erklärt? Bei den partiellen Differentialgleichungen, und das werden uns gleich die ersten Beispiele zeigen, gibt es keine einheitliche Methode, um alle Gleichungen zu behandeln. Vielmehr gibt es eine Fülle von Werkzeugen, die bei speziellen Gleichungen und Gleichungstypen weiterhelfen. Oft sind diese Gleichungen aus angewandten Wissenschaften und werden benannt nach demjenigen, der als erster diese Gleichungen als Modell für einen realen Vorgang aufgeschrieben hat.

Bevor wir die oben genannte, einfachste Gleichung lösen, kommen wir zu Beispielen aus der Physik. Partielle Differentialgleichungen kommen allerdings nicht nur in der Physik, sondern auch in der Chemie, in der Biologie und in den Wirtschaftswissenschaften vor.

1.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Hier geht es darum, die Wärmeleitung in einem Medium zu modellieren. Dabei setzen wir voraus, daß das Gebiet Ω des $\mathbb{R}^3$ von dem Medium ausgefüllt sei und an jedem Punkt $\omega \in \Omega$ eine Temperatur

$$u_0(\omega) \tag{1.1.2}$$

vorgegeben sei. Wir interessieren uns für die Funktion $u(t, \omega)$, welche jedem $\omega \in \Omega$ und jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Temperatur an dieser Stelle und zu diesem Zeitpunkt zuordnet. Dabei machen wir eine von zwei üblichen zusätzlichen

[5] Pierre de Fermat (20.8.1601–12.1.1665) französischer Jurist und Mathematiker. Er verfaßte Arbeiten zur Geometrie und Zahlentheorie. Bekannt ist vor allem der nach ihm benannte Satz, der vor kurzem von Andrew Wiles bewiesen wurde.

Annahmen: am Rand herrscht eine von außen gegebene Temperatur oder der Rand ist vollkommen isoliert, d.h.

(i) Für $x \in \partial\Omega$ ist $u(t,x)$ durch eine gegebene Umgebungstemperatur bestimmt. Oft wird diese Bedingung normalisiert, so daß man fordert

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.1.3}$$

Wir sprechen von Dirichlet–Randbedingungen[6].

(ii) Die andere Bedingung am Rand unseres Mediums ist, daß kein Wärmefluß durch den Rand stattfindet, d.h., daß am Rand kein Temperaturgradient auftritt, und damit, daß

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t,\omega) = 0 \tag{1.1.4}$$

ist, wobei n den äußeren Normaleneinheitsvektor an den Rand von Ω im Punkt $\omega \in \partial\Omega$ bedeutet. In diesem Fall sprechen wir von Neumann'schen Randbedingungen[7].

Nun kommen wir zur Modellierung im Inneren des Gebietes. Mit c sei die spezifische Wärme unseres Materials bezeichnet, mit γ das spezifische Gewicht. Dann stehen Temperaturänderung Δu und Wärmeänderung ΔQ in einem Volumen V im Zusammenhang $\Delta\ u\ c\ \gamma\ V = \Delta Q$ oder

$$\Delta u = \frac{\Delta Q}{c\gamma V}. \tag{1.1.5}$$

Sei nun $B_\varepsilon(\omega_0)$ eine Kugel, die so klein gewählt sei, daß die Temperatur in dieser Kugel als konstant angesehen werden kann, d.h.

$$\int_{B_\varepsilon(\omega_0)} u(\omega)d\omega = u(\omega_0)V.$$

Dann ist

$$u(t+h,\omega_0) - u(t,\omega_0) = \frac{Q(t+h) - Q(t)}{c\gamma V}, \tag{1.1.6}$$

wobei Q nun die Wärmemenge in $B_\varepsilon(\omega_o)$ beschreibt. Nun nehmen wir an, daß die Veränderung der Wärme in der Kugel proportional zum Wärmefluß durch die Oberfläche ist, also

$$Q(t+h) - Q(t) = \tau h \int\limits_{\partial B_\varepsilon(\omega_0)} \langle \nabla u,\ n\rangle do, \tag{1.1.7}$$

---

[6] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805-5.5.1859) Er bewies den großen Fermat'schen Satz für $n = 5$. Bekannt sind vor allem die nach ihm benannten Reihen, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielen und sein Beitrag zur Variationsrechnung.

[7] Franz Ernst Neumann (11.9.1798-23.5.1895) arbeitete vor allem zur mathematischen Physik.

wobei τ die Proportionalitätskonstante (Wärmeleitzahl) und n die äußere Normale zur Kugel darstellt. ∇ bezieht sich auf die partielle Ableitung bezüglich ω. Nimmt man an, daß die Funktion u genügend glatt ist, so folgt aus dem Satz von Gauß[8], daß

$$\int_{\partial B_\varepsilon(\omega_0)} \langle \nabla u,\ \nu \rangle do = \int\limits_{B_\varepsilon(\omega_0)} \operatorname{div} \nabla u(t,\omega) d\omega. \tag{1.1.8}$$

Damit ergibt sich insgesamt, daß

$$\frac{1}{h}(u(t+h,\omega_0) - u(t,\omega_0)) = \frac{\tau}{c\gamma V} \int_{B_\varepsilon(\omega_0)} \Delta u(t,\omega) d\omega. \tag{1.1.9}$$

Wir setzen $k = \frac{\tau}{c\gamma}$ und erhalten durch Grenzübergang $(h, \varepsilon \to 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \tag{1.1.10}$$

Im weiteren steht Δ für den Laplace-Operator[9], d.h.

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u.$$

Eine Lösung dieser Gleichung, zusammen mit der Anfangsbedingung (1.1.2) und einer der Randbedingungen (1.1.3) oder (1.1.4) beschreibt für uns die Wärmeleitung in Ω. Eine Lösung dieser Gleichung, die nicht von $t \in \mathbb{R}$ abhängt, heißt stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Sie modelliert eine Temperaturverteilung in unserem Medium, die sich im Gleichgewicht befindet, wo keine Wärmefluß auftritt. Nun wollen wir die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet'schen Randbedingungen auf $[-\pi, \pi]$ mit $k = 1$ lösen. Wir wenden dabei das Verfahren der *Trennung der Veränderlichen* an und entwickeln $u(t,x)$ für jedes t in eine Fourierreihe[10], d.h. wir machen den Ansatz

$$u(t,x) = a_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu(t)\cos(\nu x) + b_\nu(t)\sin(\nu x))$$

---

[8] Carl Friedrich Gauß (30.4.1777–23.2.1855) zeigte schon als Kind mathematische Genialität und wurde vom Großherzog Wilhelm Ferdinand gefördert. Im Jahr 1797 bewies er den Fundamentalsatz der Algebra. Sein wissenschaftliches Werk umfaßt bedeutende Beiträge zu allen Bereichen der Mathematik, insbesondere Algebra, Zahlentheorie, reelle und komplexe Analysis und Differentialgeometrie. Darüberhinaus war er für lange Zeit Direktor des Göttinger Observatoriums.

[9] Pierre Simon Laplace (28.3.1749–5.3.1827) war während der französischen Revolution engagiert und wechselte danach mehrfach die politische Richtung. Seine mathematischen Untersuchungen betreffen partielle Differentialgleichungen, Kugelflächenfunktionen, Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und die Wahrscheinlichkeitstheorie.

[10] Jean Baptiste Joseph de Fourier (21.3.1768–16.5.1830) war einer der Begründer der mathematischen Physik. Er beschäftigte sich mit der Wärmeleitung und trug zur Theorie partieller Differentialgleichungen bei. Er nahm am Feldzug Napoleons in Ägypten teil, war als Diplomat tätig und machte nebenbei mathematische Forschung. Nach der Rückkehr wurde er von Napoleon zum Präfekten des Departements d'Isère ernannt. Dies hinderte ihn nicht an einer weiteren fruchtbaren wissenschaftlichen Arbeit.

mit ausreichend glatten Funktionen $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$. Eine knappe Zusammenstellung der Theorie der Fourierreihen findet man in Appendix A.2

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= a_0'(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu'(t)\cos(\nu x) + b_\nu'(t)\sin(\nu t)\right) \\ &= \Delta u \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\nu^2)\left(a_\nu(t)\cos(\nu x) + \sin(\nu x)\right). \end{aligned}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit Funktionen $\cos(\overline{\nu} x$ ($\overline{\nu} \geq 0$), $\sin(\overline{\nu} x)$, ($\nu > 0$) ergibt unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x)\cos(\overline{\nu} x)dx &= \delta_{\nu,\overline{\nu}}\pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\sin(\overline{\nu} x)dx &= \delta_{\nu,\overline{\nu}}\pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\cos(\overline{\nu} x)dx &= 0 \end{aligned}$$

eine unendliche Folge *gewöhnlicher* Differentialgleichungen

$$\frac{da_\nu}{dt}(t) = -\nu^2 a_\nu(t)$$

und entsprechendes für b_ν. Als Lösung erhält man

$$a_\nu(t) = a_\nu^0 e^{-\nu^2 t}.$$

Damit ergibt sich als eine Lösung der *partiellen Differentialgleichung*

$$u(t,x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 t}\left(a_\nu^0\cos(\nu x) + b_\nu^0\sin(\nu x)\right),$$

mit reellen Zahlen a_0, a_ν^0, b_ν^0. Diese wiederum erhält man aus der Fourierentwicklung des Anfangswertes $u_0(x)$. Aus der Dirichlet'schen-Randbedingung folgert man (für $t \to \infty$ konvergiert $u(t,x)$ gegen a_0), daß $a_0 = 0$ ist.

Aufgabe 1.1.1 *Bei einer stationären Temperaturverteilung erwartet man, daß die Temperatur $u(x)$ an der Stelle x gleich dem Mittelwert der Temperaturen in einer umgebenden Kugel ist:*
Es sei Ω offen und $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, so daß die Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, und u eine stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Ω. Man zeige:

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x_0))}\int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)dx. \tag{1.1.11}$$

Dabei ist $\mu(B_\varepsilon(x_0))$ das Lebesgue-Maß der Kugel $B_\varepsilon(x_0)$).

1.2 Die Wellengleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Differentialgleichung für die schwingende Saite ableiten. Dabei sei zwischen $a, b \in \mathbb{R}$ eine Saite eingespannt, und $u(t,x)$ bezeichne die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t > 0$ an der Stelle $x \in [a,b]$. Wie zuvor sei $u_0(x)$ die Konfiguration der Saite zum Zeitpunkt 0 und entsprechend der Befestigung am Rande setzen wir Dirichlet–Randbedingungen (keine Auslenkung am Rand) voraus. Nach Newton ist die an einem Körper angreifende Kraft gleich dem Produkt aus Masse des Körpers und dessen Beschleunigung. Sei nun ein Stück der Länge ε der Saite (spezifisches Gewicht γ) gegeben, wir betrachten die Bewegung des Mittelpunktes x_0. Die Masse ist nun $\gamma\varepsilon$, die Beschleunigung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_0)$ und damit ist die angreifende Kraft gleich $\gamma\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_0)$. Diese ist gegeben durch die Spannung, welche längs der Saite wirkt. Sei ξ ein Punkt auf der Saite in der Ausgangslage, dann ist die Länge $L(\xi)$ der Saite bis ξ gegeben durch $L(\xi) = \int_a^\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx$, die infinitesimale Längenänderung ist also

$$\frac{dL(\xi)}{d\xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi)\right)^2}. \tag{1.2.12}$$

Falls $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ klein ist, ist diese Größe näherungsweise gleich $1 + \frac{\partial u}{\partial \xi}$. Auf das Stück der Länge ε wirkt also eine Kraft proportional zu $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + \varepsilon/2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 - \varepsilon/2)$. Also gilt mit der Proportionalitätskonstante τ (Hooke'sches Gesetz[11])

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \frac{1}{\gamma}\varepsilon^{-1}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 + \varepsilon/2) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0 - \varepsilon/2)\right). \tag{1.2.13}$$

Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \eta = \frac{\tau}{\gamma}. \tag{1.2.14}$$

Die soeben hergeleitete Gleichung nennt man *Wellengleichung*.

Aufgabe 1.2.1 *Man löse die Wellengleichung wie oben die Wärmeleitungsgleichung unter der Annahme Dirichlet'scher Randbedingungen und bei einer Ausgangsauslenkung $u_0(x)$. Sollte damit die Lösung nicht eindeutig bestimmt sein, überlege man sich weitere sinnvolle Bedingungen um eine eindeutige Lösbarkeit zu garantieren.*

1.3 Kontinuitätsgleichung und Navier-Stokessche Gleichungen

Es sei zunächst $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Mit $\langle .,. \rangle$ werde das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

[11] Robert Hooke (18.7.1635-3.3.1703) war Naturforscher und ab 1665 Professor für Geometrie in London. Er arbeitete an der Luftpumpe, normierte die Temperaturmessung und führte aufgrund mikroskopischer Beobachtungen den Begriff der Zelle ein.

Definition 1.3.1 *Das Gebiet heißt von der Klasse C^1 (berandet), falls es zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U gibt, so daß $U \cap \partial\Omega$ Graph einer C^1-Funktion $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ist, d.h. daß $\partial\Omega$ eine C^1-Mannigfaltigkeit ist.*

Bei vielen physikalischen Vorgängen spielt die Zeit eine ausgezeichnete Rolle, man beschreibt Vorgänge, die mit der Zeit ablaufen. Der Buchstabe t ist im weiteren für die Zeit reserviert. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\Omega_t \subset \Omega$ ein Teilgebiet, das für jedes $t \in \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 ist. Ferner sei eine Funktion $\rho \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben, die wir als Dichte auffassen wollen. Wir werden die Ableitung

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx \tag{1.3.15}$$

benötigen. Ferner sei eine Abbildung $\xi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ gegeben mit

$$\Omega_t = \{\xi(t,x) \mid x \in \Omega_0\}.$$

Dabei stellen wir uns unter $\xi(\cdot, x)$ die Stromlinie einer Flüssigkeit vor. Wir setzen voraus $\xi(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \Omega$ sei C^1. Dann ist

$$v(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\xi(t,x)_{|t=\tau}$$

eine stetige Abbildung.

Die Berechnung der Ableitung in 1.3.15 erfolgt mittels der Differenzenquotienten, also:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int\limits_{\Omega_{t+\Delta t}} \rho(x,t+\Delta t)dx - \int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(x,t+\Delta t) - \rho(x,t)}{\Delta t} dx \\ &\quad + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int\limits_{\Omega_{t+\Delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x,t+\Delta t)dx - \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\Delta t}} \rho(x,t+\Delta t)dx \right\}. \end{aligned}$$

Den ersten Ausdruck erhält man durch Vertauschung von Integral und Grenzwert als

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(x,t+\Delta t) - \rho(x,t)}{\Delta t} dx = \int\limits_{\Omega_t} \rho_t dx.$$

Für den zweiten Ausdruck erhalten wir

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int\limits_{\Omega_{t+\Delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x,t+\Delta t)dx - \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\Delta t}} \rho(x,t+\Delta t)dx \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int\limits_{\Omega_{t+\Delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x,t)dx - \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\Delta t}} \rho(x,t)dx \right).$$

Nun gilt es, die Differenz dieser beiden Integrale zu berechnen. Dazu approximieren wir den Rand $\partial\Omega_t$ durch Polyeder, wobei jede Seite eine durch eine Größe $\delta > 0$ begrenzte Fläche habe und an einem Punkt tangential an $\partial\Omega_t$ sei. Sei nun $\mathcal{F}(\delta) = \{F_1, \ldots, F_{r(\delta)}\}$ so eine Kollektion von Flächen und $x_j \in F_j$ die Kollektion der Punkte, wo F_j tangential an $\partial\Omega_t$ ist. Die Größe δ sei dabei genügend klein gewählt, so daß jede der Flächen F_j in einer Koordinatenumgebung U_j, welche in der Definition der C^1-Glattheit von Ω auftritt, von x_j enthalten ist. Nun wird die Menge

$$\Omega_{t+\Delta t} \setminus \Omega_t \cup \Omega_t \setminus \Omega_{t+\Delta t}$$

durch schiefe Zylinder mit Grundfläche F_j und Höhe

$$\Delta t \langle v(x_j, t), n_j \rangle$$

in Richtung n_j, der äußeren Normalen zu $\partial\Omega_t$ in x_j, approximiert. Wir fixieren für den Moment $\Delta t > 0$ und erhalten

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int\limits_{\Omega_{t+\Delta t} \setminus \Omega_t} \rho(x,t)dx - \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\Delta t}} \rho(x,t)dx \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{r(\delta)} \rho(x_j, t) \langle v(x_j, t), n_j \rangle |F_j| \\ &= \int\limits_{\partial\Omega_t} \rho \langle v, n \rangle dF + O(\Delta t) \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert nun

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = \int\limits_{\Omega_t} \rho_t(x,t)dx + \int\limits_{\partial\Omega_t} \rho(x,t) \langle v, n \rangle dF. \tag{1.3.16}$$

Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\int\limits_{\partial\Omega_t} \rho \langle v, n \rangle dF = \int\limits_{\Omega_t} \operatorname{div}(\rho v) dx.$$

Damit wird aus (1.3.16) die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = \int\limits_{\Omega_t} \left(\rho_t(x,t) + \operatorname{div}(\rho(x,t) v(x,t)) \right) dx. \tag{1.3.17}$$

Wir kommen wieder zu physikalischen Anwendungen. Sei ρ die Dichte eines Gases oder einer Flüssigkeit (orts- und zeitabhängig). Dann ist

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx$$

die Gesamtmasse zum Zeitpunkt t. Da die Masse erhalten wird, hat man

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = 0. \tag{1.3.18}$$

Insbesondere folgt aus 1.3.17 und 1.3.18

$$\int\limits_{\Omega_t} \left(\rho_t(x,t) + \operatorname{div}(\rho(x,t)v(x,t))\right) dx = 0. \tag{1.3.19}$$

Da $\Omega_0 \subset \Omega$ beliebig ist, erhält man aus (1.3.19) die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.3.20}$$

Im folgenden betrachten wir den Fall einer idealen, kompressiblen Flüssigkeit im Gebiet Ω. Dabei sei $\rho(x,t)$ die Dichte am Ort x zum Zeitpunkt t und $v(x,t)$ der Geschwindigkeitsvektor an der Stelle $x \in \Omega$. Wir können uns $x(t)$ als die Bewegung eines Teilchens vorstellen, die Bewegung genügt dann der Gleichung

$$\dot{x} = v(x,t).$$

Für die Beschleunigung des Teilchens erhält man

$$\ddot{x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Sei nun, wie oben, Ω_0 ein beliebiges Teilgebiet von Ω mit C^1-Rand. Auf ein solches Gebiet wirken die folgenden Kräfte und sind im Gleichgewicht:

(i) Beschleunigungskräfte:

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) dx,$$

(ii) Kräfte aufgrund des Druckes:

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} pndo,$$

(iii) Externe Kräfte und Kräfte aufgrund von innerer Reibung

$$-\int\limits_{\Omega_0} f dx.$$

Damit erhält man als Gleichung

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho \left(v_t + \langle v, \nabla \rangle v\right) dx = -\int\limits_{\partial\Omega_0} pndo + \int\limits_{\Omega_0} f dx. \tag{1.3.21}$$

Mit dem Satz von Gauß wird das Randintegral zu

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} pndo = \int\limits_{\Omega_0} \nabla p dx.$$

Da Ω_0 beliebig war, erhält man daraus die Form

$$\rho \left(v_t + \langle v, \nabla \rangle v\right) = -\nabla p + f. \tag{1.3.22}$$

Diese Gleichung ist nach Navier[12] und Stokes[13] benannt. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ergibt sich der folgende Spezialfall. ρ ist konstant oder $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ und aus der Kontinuitätsgleichung folgt div $v = 0$.

Die innere Reibung wird üblicherweise durch einen Term der Form $-\nu \Delta v$ modelliert. Damit ergibt sich dann insgesamt die Gleichung

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \Delta v + \langle v, \nabla \rangle v = -\nabla p + f_e. \tag{1.3.23}$$

Hier steht f_e für die externen Kräfte. Solche können Gravitationskräfte, elektrische oder magnetische Felder bei ionisierten Flüssigkeiten sein. Anwendungen mit solchen elektrisch nicht neutralen Flüssigkeiten finden sich beim Studium der Konvektionsströme im Erdinneren mit Anwendungen auf Orientierungswechsel des Erdmagnetfeldes oder auch bei der Untersuchung von Fusionsreaktoren.

---

[12] Claude Louis Marie Henri Navier (15.2.1785-21.8.1836) war als Professor für Mechanik an der Ecole des Ponts et Chaussées in Paris tätig. Später wurde er Professor für Analysis und Mechanik an der Ecole Polytechnique. Er gilt als Begründer der Elastizitätstheorie. 1824 gab er die Navier-Stokessche Gleichungen für die Bewegung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit an.

[13] Georg Gabriel Stokes (13.8.1819-2.2.1903) studierte und lehrte an der Universität Cambridge. Er erweiterte die von Navier angegebenen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen vom Fall der inkompressiblen auf den Fall der kompressiblen Flüssigkeit. Auf ihn geht der nach ihm benannte Integralsatz und der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz zurück.

1.4 Eine einfache Gleichung

In diesem und im nächsten Abschnitt wollen wir an ausgewählten Beispielen einige Phänomene studieren, zunächst ohne auf die physikalische Relevanz der Gleichungen zu achten.

Zunächst wollen wir die Konvention einführen, partielle Ableitungen als Indizes zu notieren, d.h. u_x steht für $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Satz 1.4.1 *Jede stetig differenzierbare Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Gleichung $u_x - u_y = 0$ hat die Form $u(x,y) = v(x+y)$ für $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Jede Funktion dieser Gestalt löst die Differentialgleichung.*

Beweis: Die Rückrichtung ist trivial.

Sei $u(x,y)$ eine Lösung, wir zeigen: u hängt nur vom Wert $x+y$ ab. Seien also zwei Paare (x_1, y_1), (x_2, y_2) mit $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ gegeben. Zu zeigen ist $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$. Aus $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ folgt $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. Nennen wir diese Zahl ξ_0. Dann ist $x_2 = x_1 - \xi_0$ und $y_2 = y_1 + \xi_0$. Betrachte $h(\xi) = u(x - \xi, y + \xi)$. Da $h'(\xi) = 0$, ist h konstant und $h(0) = h(\xi_0)$.

$\square$

1.5 Burgers Gleichung

Die nach Burgers[14] benannte Gleichung hat die Form

$$u_x + uu_y = 0.$$

Diese Gleichung spielt eine gewisse Rolle in der Gasdynamik, es ist die 1-dimensionale Version der Gleichung (1.3.22) mit trivialer rechter Seite. Wir untersuchen inwieweit man stetige Lösungen dieser Gleichung erwarten darf. Sei $u(x,y)$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = u(x,y).$$

Ist $y(x)$ eine Lösung dieser Gleichung, so gilt

$$\frac{du}{dx}(x, y(x)) = u_x + u_y y' = u_x + uu_y = 0.$$

Also ist $u(x, y(x))$ konstant, d.h. u ist längs Kurven $(x, y(x))$ konstant $u = u_0$. Da aber $y' = u_0$ ist $y = u_0 x + a$. Ist nun ein "Anfangswert"

$$u(x, 0) = \phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

gegeben, so ist u auf der Linie durch $(x, 0)$ mit Steigung $\phi(x)$ konstant und gleich $\phi(x)$. Ist ϕ nicht monoton fallend, schneiden sich diese Linien, und u kann im Schnittpunkt nicht stetig sein!

[14] Johannes Martinus Burgers (1895-7.6.1981) promovierte 1918 bei Ehrenfest mit einer Arbeit über das Bohrsche Atommodell. Danach war er einer der jüngsten Professoren an der Technischen Hochschule Delft. Er machte sich vornehmlich Gedanken über die Natur der Turbulenz und faßte die nach ihm benannte Gleichung als Modell dafür auf. Er gilt als einer der bedeutendsten niederländischen Strömungsmechaniker.

1.6 Charakteristiken

Definition 1.6.1 *Ist $F(x, u, D^{\alpha^1}u, \ldots, D^{\alpha^m}u) = 0$ mit Multiindizes α^i eine partielle Differentialgleichung, so nennt man* $\max\{|\alpha^i|\}$ *die* Ordnung *der Differentialgleichung.*

Definition 1.6.2 (i) *Eine partielle Differentialgleichung, welche in der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen linear ist, heißt* linear.

(ii) *Hängen die Terme höchster Ordnung linear von u ab, so heißt die Gleichung* semilinear.

(iii) *Sei m die Ordnung der Differentialgleichung. Ist die Gleichung linear in $D^{\alpha^i}u$ für alle α^i mit $|\alpha^i| = m$, so nennt man die Gleichung* quasilinear.

Beispiel 1.6.3 (i) *$u_t = u_x$ ist eine lineare Gleichung.*

(ii) *$u_{xx} + uu_x = 0$ ist semilinear.*

(iii) *$u_t = uu_x$ ist quasilinear.*

Eine Gleichung erster Ordnung hat die Gestalt

$$F(x, u, \nabla u) = 0.$$

Ist sie zusätzlich quasilinear, so läßt sie sich schreiben als

$$f_0(x, u) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0. \tag{1.6.24}$$

Ähnliche Methoden wie in den Abschnitten 1.4, 1.5 führen zum Verständnis, welche Anfangsdaten man vorschreiben darf. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und (1.6.24) eine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung über Ω und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-glatte Lösung. Setze

$$\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (u(x), x).$$

Dies definiert eine Fläche

$$G_\Psi = \{(u(x), x) \mid x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Tangentialvektoren an diese Fläche haben die Form $(\langle y, \nabla u\rangle, y)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$. Man sieht leicht:
auf dem Tangentialraum zu G_Ψ steht der Vektor $(-1, \nabla u)$ senkrecht, denn

$$\langle(-1, \nabla u), (\langle y, \nabla u\rangle, y)\rangle = 0.$$

Der Vektor

$$F(x, u) = (-f_0(x, u), f_1(x, u), \ldots, f_n(x, u)) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

steht ebenfalls auf $(-1, \nabla u)$ senkrecht, da u die Differentialgleichung erfüllt. Damit ist $F(x, u)$ tangential an G_Ψ, und der zum Vektorfeld F gehörende Fluß läßt die Fläche G_Ψ invariant.

Definition 1.6.4 *Eine Lösungskurve der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\dot{z} = F(z)$$

heißt Charakteristik *von* (1.6.24).

Eine Methode zur Lösung der Gleichung (1.6.24) besteht nun darin, längs einer Hyperfläche $K : \mathbb{R}^{n-1} \to \Omega$ die Funktion u vorzuschreiben und die Funktion dann längs Charakteristiken mittels des Flusses von F fortzusetzen. Es ist klar, daß diese Methode funktioniert, wenn die Hyperfläche K transversal zu den Charakteristiken ist.

1.7 Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Definition 1.7.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein* linearer Differentialoperator zweiter Ordnung *hat die Form*

$$Lu(x) = \sum_{i,j} a^{ij}(x) u_{x_i,x_j}(x) + \sum_i b^i(x) u_{x_i}(x) + c(x)u(x), \;\; a^{ij} = a^{ji}, \;\; x \in \Omega. \tag{1.7.25}$$

(Für den Moment sei $u \in C^2(\Omega)$.)

Definition 1.7.2 *(i) L heißt im Punkt $x \in \Omega$ elliptisch, wenn die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ positiv definit ist, d.h. wenn Zahlen $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ existieren mit*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \langle \xi, A(x)\xi \rangle \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(ii) L heißt stark elliptisch, wenn ein $\lambda_0 > 0$ existiert mit $\lambda_0 \leq \lambda(x)$ für alle $x \in \Omega$.

(iii) Ist $\frac{\Lambda}{\lambda}$ auf Ω beschränkt, so nennt man L gleichmäßig elliptisch.

(iv) Ist L stark elliptisch und gleichmäßig elliptisch, so nennen wir L gleichmäßig stark elliptisch.

Neben den Annahmen, die sich auf die zweiten Ableitungen beziehen, benötigen wir oft noch Voraussetzungen, die die erste und zweite Ableitung in Beziehung setzen. Eine solche, in vielen Fällen nützliche, Annahme ist

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq \text{const.} < \infty, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; x \in \Omega. \tag{1.7.26}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung elliptischer Randwertprobleme folgt aus einem Maximumprinzip. Solche Prinzipien sind aus der Funktionentheorie bekannt. Die Verbindung wird hergestellt, da holomorphe Funktionen w die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen lösen. Die Realteile $u = \text{Re } w$ dieser holomorphen Funktionen sind harmonische Funktionen und damit Lösungen von $\Delta u = 0$.

Satz 1.7.3 *Es sei L elliptisch im beschränkten Gebiet Ω, ferner gelte (1.7.26). Unter der Annahme $c = 0$ folgt aus $Lu \geq 0$ für ein solches $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, daß u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ annimmt. Genauer gilt*

$$\sup\{u(x)|x \in \Omega\} = \sup\{u(x)|x \in \partial\Omega\}.$$

Ganz ähnlich erhält man aus $Lu \leq 0$

$$\inf\{u(x)|x \in \Omega\} = \inf\{u(x)|x \in \partial\Omega\}.$$

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir noch ein Lemma aus der linearen Algebra bereitstellen.

Lemma 1.7.4 *Sind A, B positiv semidefinite $(n \times n)$–Matrizen, so ist* $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$. *(Man beachte, daß das Produkt positiv semidefiniter Matrizen i. a. nicht positiv semidefinit ist.)*

Beweis von Lemma 1.7.4: Zunächst bemerken wir, daß für je zwei Matrizen A, B gilt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Ferner ist für eine positiv semidefinite Matrix A die Spur $\mathrm{tr}(A) \geq 0$. Zu jeder positiv semidefiniten Matrix B gibt es eine positiv semidefinite Quadratwurzel $B^{\frac{1}{2}}$. Also ist

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}).$$

Da $B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}$ positiv semidefinit ist, ist deren Spur nicht negativ und damit ist das Lemma gezeigt. □

Beweis von Satz 1.7.3: Ist $Lu > 0$, so kann u im Inneren kein Maximum haben, denn sei $x_0 \in \Omega$ die Stelle an der $u(x_0)$ maximal ist, so ist $D_i u(x_0) = 0$ für alle i. Die Hessesche $\mathrm{Hess}(u(x_0))$ ist negativ semidefinit. Aufgrund der Elliptizität ist A positiv definit. Also gilt

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) D_{ij} u(x_0) = \mathrm{tr}(A \text{ Hess } u(x_0)) \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $Lu > 0$.

Nun ist nach (1.7.26) $\frac{|b^i|}{\lambda} \leq b_0$, welches eine Konstante ist. Da $a^{11}(x) \geq \lambda(x)$ ist, gibt es eine genügend große Zahl $\gamma > 0$ mit

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1) e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1} > 0.$$

Also ist für alle $\varepsilon > 0$

$$L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$$

in Ω. Aus dem ersten Teil folgt nun

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung des Satzes. □

Korollar 1.7.5 *Es seien die Voraussetzungen wie oben erfüllt, zusätzlich gelte* $c \le 0$. *Sei* $u^+ = \max\{u, 0\}$. *Dann ist*

$$\text{(a)} \qquad \sup_{x\in\Omega} u(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x).$$

Gilt zusätzlich $Lu = 0$ *in* Ω, *so ist*

$$\text{(b)} \qquad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|.$$

Entsprechende Aussagen gelten für das Infimum und u^-.

Man vergleiche das Maximumprinzip für elliptische Differentialoperatoren mit dem Maximumprinzip der Funktionentheorie. Wie hängen diese Aussagen zusammen?

Korollar 1.7.6 *Ist* $c \le 0$, $f \in C(\Omega)$ *so hat*

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \tag{1.7.27}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.7.28}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

1.8 Harmonische Funktionen

Definition 1.8.1 *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $u \in C^2(\Omega)$. u *heißt harmonisch, falls* $\Delta u = 0$. *Entsprechend heißt* u subharmonisch *falls* $\Delta u \ge 0$ *und* superharmonisch *falls* $\Delta u \le 0$ *in* Ω.

In den Übungen hatten wir gesehen, daß harmonische Funktionen einer Mittelwerteigenschaft genügen: d.h. für $x \in \Omega$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x))} \int\limits_{B_\varepsilon(x)} u(\xi)d\xi. \tag{1.8.29}$$

Zum Beweis dieser Aussage leitet man üblicherweise eine entsprechende Aussage für die Mittelwerte auf der Oberfläche einer kleinen Kugel her. Fast gleichlautende Aussagen erhält man auf gleichem Wege auch für sub- bzw. superharmonische Funktionen und dies begründet letztendlich auch die Namensgebung für diese Funktionen. Wir fassen diese Resultate zusammen im folgenden Satz.

Satz 1.8.2 *Für ein Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sei* $u \in C^2(\Omega)$ *und harmonisch (superharmonisch, subharmonisch), dann gelten die folgenden Mittelwert(un)gleichungen*

$$u(x_0) \;=(\ge,\le)\; \frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} udF$$

$$u(x_0) \;=(\ge,\le)\; \frac{1}{\omega_n\rho^{n}} \int\limits_{B_\rho(x_0)} udx,$$

wobei ω_n *für das Volumen der Einheitskugel im* $\mathbb{R}^n$ *steht.*

Es gilt allerdings der folgende Satz, der eine Umkehrung dieses Resultates beinhaltet.

Satz 1.8.3 *Ist $u \in C(\Omega)$ und genügt der Mittelwerteigenschaft, so ist u harmonisch.*

Bevor wir zum Beweis (im nächsten Abschnitt) kommen, wollen wir eine einfache Folgerung aus diesem Satz ziehen.

Korollar 1.8.4 *Ist $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz konvergente Folge harmonischer Funktionen, so ist der Grenzwert harmonisch.*

Beweis: Folgt sofort aus der Charakterisierung harmonischer Funktionen durch die Mittelwerteigenschaft. □

Im letzten Abschnitt hatten wir Maximumprinzipien für Lösungen elliptischer Randwertprobleme abgeleitet, damit gelten diese natürlich auch für harmonische, bzw. subharmonische Funktionen. Wir wollen hier noch kurz zeigen, daß ähnliche Sätze auch für Funktionen mit Mittelwerteigenschaften gelten.

Satz 1.8.5 *Gegeben sei $u \in C(\Omega)$ mit*

$$u(x) \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int\limits_{B_\rho(x)} u(y)dy,$$

für jede kompakt in Ω liegende Kugel $B_\rho(x)$. Gibt es dann einen Punkt $y_0 \in \Omega$ mit $u(y_0) = \sup\{u(y) \mid y \in \Omega\}$, so ist u konstant.

Beweis: Sei $\Omega_{max} = \{y \in \Omega \mid u(y) = u(y_0)\}$. $\Omega_{max} \neq \emptyset$, Ω_{max} ist relativ abgeschlossen in Ω. Können wir noch zeigen, daß Ω_{max} offen in Ω ist, so folgt $\Omega_{max} = \Omega$. Sei $x \in \Omega_{max}$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subset \Omega$. Dann folgt

$$u(y_0) = u(x) \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int\limits_{B_\rho(x)} u(y)dy \leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int\limits_{B_\rho(x)} u(y_0)dy = u(y_0).$$

Dann ist wegen der Stetigkeit von u auch $u = u(y_0)$ auf $B_\rho(x)$. □

1.9 Die Poisson'sche Gleichung

Wir beginnen mit der sogenannten zweiten Greenschen Formel (vgl. Übungen, Blatt 2, Aufgabe 2) für Funktionen $u, v \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dF. \tag{1.9.30}$$

Wenden wir diese Formel auf $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ mit $v(x) = \Gamma(x-y) = \Gamma_y(x)$ an, so bekommt man, da $\Gamma(x-y)$ auf dieser Menge harmonisch ist,

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)\right) dF$$
$$+ \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)dF\right).$$

Das Integral über den Rand der ε-Kugel um y läßt sich in zwei Teile aufspalten und diese werden getrennt behandelt:

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}dF = \tilde{\Gamma}(\varepsilon) \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}dF,$$

dabei steht $\tilde{\Gamma}$ für die Funktion $\tilde{\Gamma}(\|x\|) = \Gamma(x)$, da Γ nur von der Norm des Arguments abhängt. Das letzte Integral wird betragsmäßig durch

$$n\omega_n\varepsilon^{n-1} \max_{\partial B_\varepsilon(y)} \|\nabla u\|$$

abgeschätzt, wobei $\omega_n = \mu(B_1(0))$ ist. Man beachte, daß die Oberfläche der Einheitskugel durch $n\omega_n$ gegeben ist, vgl. Aufgabe 2 Blatt 2. Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert dies gegen 0 und es bleibt das andere Integral. Hier beachtet man, daß für $x \in \partial B_\varepsilon(y)$ $\nabla\Gamma(x-y)$ colinear zu ν ist, und daher $\frac{\partial \Gamma}{dn}(x-y) = \tilde{\Gamma}'(\varepsilon)$ ist, also hat man

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)dF = -\tilde{\Gamma}'(\varepsilon) \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} udF = \frac{-1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} u\, dF \to -u(y)$$

für $\varepsilon \to 0$. Damit erhalten wir die sogenannte *Greensche Darstellungsformel*

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right) dF + \int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx.$$

Zwei wichtige Spezialfälle ergeben sich erstens für u mit kompaktem Träger, denn dann fällt das erste Integral weg und man erhält

$$u(y) = \int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx$$

und zweitens für harmonisches u, denn dann ist das zweite Integral null und man behält nur

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right) dF.$$

Der zweite Fall erlaubt uns einen typischen Regularitätsschluß, wie wir ihn noch öfters sehen werden: ist u harmonisch, so hat man u durch obiges Integral gegeben. Die rechte Seite ist C^∞, ja sogar reell analytisch, also ist jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ reell analytisch. Damit erhält man Aussagen, die man für holomorphe Funktionen aus der Funktionentheorie kennt.

Die Darstellungsformel wird noch etwas vereinfacht, wenn man Γ modifiziert. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Der Raum $C^1(\overline{\Omega})$ besteht aus Funktionen, die C^1 auf einer offenen Menge sind, die $\overline{\Omega}$ enthält. Die Norm wird auf die übliche Weise erklärt. Hat man nun eine harmonische Funktion $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, so folgt aus der Greenschen Formel

$$\int\limits_{\Omega} h\Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(h\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial h}{\partial \nu}\right) dF.$$

Setzen wir nun

$$G = \Gamma + h$$

so ergibt sich die neue Greensche Darstellungsformel

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dF + \int\limits_{\Omega} G\Delta u dx.$$

Definition 1.9.1 *Ist $h \in C(\Omega \times \Omega)$, $h(\cdot, y)$ harmonisch für alle $y\,\mathbf{O}(n)\Omega$, so heißt $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x,y)$ Green'sche Funktion, falls für jedes $y \in \Omega$ $G(\cdot, y)$ auf $\partial\Omega$ verschwindet.*

Satz 1.9.2 *Existiert eine Greensche Funktion, so ist sie eindeutig.*

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Maximumprinzip und dem daraus folgenden Eindeutigkeitssatz. □

Bemerkung 1.9.3 *Die* **Bedeutung** *der Greenschen Funktion liegt darin, daß man mit ihrer Hilfe harmonische Funktionen in $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ durch ihre* **Randwerte** *darstellen kann.*

Im Spezialfall $\Omega = B_R(0)$ kann man die Greensche Funktion explizit konstruieren. Man erhält

$$G(x,y) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\|x-y\|) - \tilde{\Gamma}(\|y\|\|x-\overline{y}\|/R), & y \neq 0 \\ \tilde{\Gamma}(\|x\|) - \tilde{\Gamma}(R), & y = 0. \end{cases},$$

wobei $\overline{y} = \frac{R^2}{\|y\|^2} y$ die Spiegelung am Rand der Kugel vom Radius R sei.

Aufgabe 1.9.4 *Man gebe eine geschlossene Formel für $G(x,y)$ auf $B_R(0)$ an und zeige $G(x,y) = G(y,x)$ und $G(x,y) \leq 0$. Man berechne die äußere Normalenableitung.*

Satz 1.9.5 *Ist $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ harmonisch, so erhält man folgende Poissonsche Darstellungsformel*

$$u(y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{u dx}{\|x-y\|^n}.$$

Beweis: Folgt sofort aus den vorherigen Aussagen. □

Ist $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$, so existiert eine Folge $u_\nu \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$, mit $u_\nu \to u$ für $\nu \to \infty$. Dann folgt aus einfachen Konvergenzüberlegungen, daß der obige Satz auch für Funktionen mit nur stetigen Randwerten gilt. Eine Umkehrung dieser Aussage enthält der nächste Satz.

Satz 1.9.6 *Es sei $\varphi : \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = R\} \to \mathbb{R}$ stetig, dann definiert*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - \|x\|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(y) dy}{\|x-y\|^n} & \text{für } \|x\| < R \\ \varphi(x) & \text{für } \|x\| = R \end{cases} \tag{1.9.31}$$

eine harmonische Funktion in $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$.

Beweis: Die Harmonizität von u folgt sofort aus der von G. Bleibt die Stetigkeit am Rand von $B_R(0)$ zu beweisen. Setzt man in die Poissonsche Darstellung die harmonische Funktion $u(x) = 1$ ein, so ergibt sich

$$1 = \int\limits_{\partial B_\rho(0)} \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R \|x-y\|^n} dF_x$$

für alle $y \in B_R(0)$. Für den Integranden schreiben wir kurz $K(x,y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{n\omega_n R\|x-y\|^n}$. Wir benutzen für den Beweis der Stetigkeit am Rand die klassische $\varepsilon - \delta$-Methode. Seien $y_0 \in \partial B_R(0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$, so daß $\|y\| = R$ und $\|y - y_0\| < \delta$ impliziert, daß $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Sei nun $\|y - y_0\| < \delta/2$ dann folgt

$$\begin{aligned} |u(y) - u(y_0)| &= \left| \int\limits_{\partial B_R(0)} K(x,y) \left(\varphi(x) - \varphi(y_0)\right) dF_x \right| \\ &\leq \int\limits_{\partial B_R(0) \cap \|x-y_0\| \leq \delta} + \int\limits_{\partial B_R(0) \cap \|x-y_0\| \geq \delta} K(x,y) |\varphi(x) - \varphi(y_0)| dF_x \\ &\leq \varepsilon + \frac{2M(R^2 - \|y\|^2) R^{n-2}}{(\delta/2)^n}. \end{aligned}$$

Ist nun y genügend nahe am Rand wird auch der zweite Term klein und wir haben die erforderliche Stetigkeit am Rand. □

Beweis von Satz 1.8.3: Gegeben sei eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$, die auf jeder Kugel $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ der Mittelwerteigenschaft genügt. Nach dem vorhergehenden Satz existiert nun eine harmonische Funktion $h \in C^2(B_R(x_0))$, so daß $h = u$ auf dem Rand $\partial B_R(x_0)$. Die Differenz $w = u - h$ genügt nun auf $B_R(x_0)$ der Mittelwerteigenschaft und hat Randwerte 0. Das Maximumprinzip für Funktionen mit Mittelwerteigenschaft, siehe Satz 1.8.5, impliziert, daß $w = 0$. □

1.10 Das klassische Dirichlet-Problem

Wir erweitern zunächst die Definition von subharmonischen Funktionen von C^2-Funktionen auf beliebige stetige Funktionen.

Definition 1.10.1 *Eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt subharmonisch, wenn zu jeder Kugel $B_\rho(x) \subset\subset \Omega$ und jeder harmonischen Funktion $h : B_\rho(x) \to \mathbb{R}$ gilt: ist $u \leq h$ auf $\partial B_\rho(x)$, so ist $u \leq h$ in $B_\rho(x)$. Entsprechend definieren wir den Begriff superharmonisch.*

Aufgabe 1.10.2 *Ist $u \in C^2(\Omega)$, dann ist u gemäß der neuen Definition genau dann subharmonisch falls $\Delta u \geq 0$.*

Die wesentlichen Eigenschaften der neuen Funktionenklasse sind in den folgenden Sätzen enthalten.

Satz 1.10.3 *(i) Ist u subharmonisch, dann genügt u dem starken Maximumprinzip, d.h. ist $y_0 \in \Omega$ mit $u(y_0) = \sup \{u(z) \mid z \in \Omega\}$, so ist u konstant.*

(ii) Ist v superharmonisch auf einem beschränkten Gebiet Ω, $v \geq u$ auf $\partial\Omega$. Dann ist entweder $v > u$ in Ω oder $u = v$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die erste Aussage. Der Beweis beruht auf inzwischen bekannten Gedanken. Wir betrachten die Menge

$$\Omega_{max} = \{x \in \Omega \mid u(x) = u(y_0)\}.$$

Diese ist nach Annahme nichtleer und wegen der Stetigkeit von u relativ abgeschlossen. Wiederum müssen wir zeigen, daß Ω_{max} relativ offen ist.

Sei $x_0 \in \Omega_{max}$ und $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei h harmonisch auf $B_\rho(x_0)$ mit $h = u$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Dann ist

$$u(x_0) \leq h(x_0) = \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} h dF \leq u(x_0),$$

da $h(x) \leq u(x_0)$ auf $\partial B_\rho(\Omega)$. Also ist $u = h = u(x_0)$ auf $\partial B_\rho(x_0)$. Da dies für alle $0 < r < \rho$ gilt, ist Ω_{max} relativ offen in Ω und es gilt $\Omega = \Omega_{max}$.

Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir, daß $u - v$ subharmonisch ist und ≤ 0. Gilt Gleichheit an einer Stelle, so gilt sie wegen der ersten Aussage überall. □

Definition 1.10.4 *Sei Ω ein Gebiet und $u \in C(\Omega)$ subharmonisch. Ferner sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ eine Kugel. Sei $h \in C^2(B_R(x_0))$ die harmonische Funktion auf $B_R(x_0)$ deren Randwerte mit denen von u auf $\partial B_R(x_0)$ übereinstimmt. Wir bezeichnen die Funktion*

$$U(x) = \begin{cases} h(x) & x \in B_R(x_0) \\ u(x) & x \in \Omega \setminus B_R(x_0) \end{cases}$$

als harmonische Hebung von u bezüglich $B_R(x_0)$.

Satz 1.10.5 *Die harmonische Hebung U bezüglich einer Kugel $B_R(x_0)$ einer subharmonischen Funktion $u \in C(\Omega)$ ist subharmonisch.*

Beweis: Sei $\rho > 0$ und $B_\rho(y) \subset\subset \Omega$, $p \in C^2(B_\rho(y))$ harmonisch auf $B_\rho(y)$ mit $p \geq U$ auf $\partial B_\rho(y)$. Dann ist auf dem Rand $\partial B_\rho(y)$

$$p \geq U \geq u$$

und damit ist $p \geq u$, da u subharmonisch ist. Damit ist die Behauptung außerhalb von $B_R(x_0)$ gezeigt. Im Sonderfall $B_\rho(y) \subset B_R(x_0)$ ist die Behauptung trivial, ansonsten ist entweder $B_R(x_0) \subset B_\rho(y)$ oder $\partial(B_R(x_0) \cap B_\rho(y))$ besteht aus

$$((\partial B_R(x_0)) \cap B_\rho(y)) \bigcap (B_R(x_0) \cap \partial B_\rho(y))$$

und aus eventuell zwei weiteren Punkten. In jedem Fall ist auf $(\partial B_R(x_0)) \cap B_\rho(y)$ $U = u$ und daher $U \leq p$. Daher ist auf $\partial(B_R(x_0) \cap B_\rho(y))$ $U \leq p$. Da U, p in diesem Gebiet harmonisch sind, ist auch die Differenz $U - p$ harmonisch und wegen des Maximumprinzips im Inneren ≤ 0. □

Satz 1.10.6 *Ist $\mathcal{U}$ eine Familie stetiger subharmonischer Funktionen aus einem Gebiet Ω. Dann ist*

$$U(x) = \sup \{u(x) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

subharmonisch.

Beweis: Ist $B_\rho(y)$ gegeben und h harmonisch auf $B_\rho(y)$ mit $h \geq U$ auf $\partial B_\rho(y)$. Dann folgt $h \geq u$ für alle $u \in \mathcal{U}$ auf $B_\rho(y)$ und damit natürlich auch $h \geq U$. □

Bevor wir den wichtigsten Satz dieses Abschnittes beweisen können, benötigen wir noch ein technisches Hilfsmittel. Es ist Prototyp einer Klasse von resultaten, die in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine große Rolle spielen und unter dem Schlagwort „a-priori Abschätzung“ läuft. Dabei versucht man ohne Kenntnis der Lösung u, allein aufgrund der Tatsache, daß u eine gewisse Gleichung erfüllt Abschätzungen für Normen von Ableitungen von u zu bekommen. Oft steckt gerade in diesen Abschätzungen viel Arbeit und es ist dann vergleichsweise einfach, unter Verwendung allgemeiner Sätze weiter zu kommen.

Satz 1.10.7 *Ist u harmonisch im Gebiet Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$, dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|,$$

wobei $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ist.

Beweis: Wir wissen bereits, daß jede harmonische Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$ ist. Wählen wir eine spezielle Ableitung D^α aus, so gilt

$$\Delta D^\alpha u = D^\alpha \Delta u = 0.$$

Also ist jede Ableitung wieder harmonisch und genügt insbesondere der lokalen Mittelwerteigenschaft. Also hat man

$$\nabla u(y) = \frac{1}{\mu(B_R(0))} \int\limits_{B_R(y)} \nabla u dx = \frac{1}{\mu(B_R(0))} \int\limits_{\partial\mu(B_R(y))} u\,\nu\, dF$$

Insbesondere folgt nun durch Abschätzen des letzten Integrals durch

$$\sup |u(x)| \mu(\partial(B_R(0))),$$

daß

$$\|\nabla u\| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(y)} |u|.$$

Natürlich folgt durch Übergang $R \to d_y = \inf_{x \in \partial\Omega} \|y - x\|$, daß gilt

$$\|\nabla u\| \leq \frac{n}{d_y} \sup |u|.$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Formel für konzentrische Kugeln erhält man die behauptete Aussage. □

Satz 1.10.8 (Perron) [15] *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Setze*

$$\mathcal{U} = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u \text{ ist subharmonisch und } u \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Dann ist

$$U(x) = \sup\{u(x) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

harmonisch auf Ω.

[15] O. Perron(), lehrte in München, bedeutende Beiträge zur Theorie von Differentialgeichungen usw.

Beweis: Wir beobachten zunächst, daß $\mathcal{U}$ nicht leer ist, denn jede Konstante $c < \inf_{\partial\Omega} \varphi$ ist in $\mathcal{U}$. Wegen des Maximumprinzips ist $u \in \mathcal{U}$ punktweise durch $\sup \varphi$ beschränkt und damit ist U defininiert. Wähle $x \in \Omega$. Dann gibt es eine Folge $u_n \in \mathcal{U}$ mit $u_n(x) \to U(x)$. Nun sei $B_R(x) \subset\subset \Omega$ gewählt und U_n die harmonische Liftung von u_n bezüglich $B_R(x)$. Offenkundig ist $U_n \in \mathcal{U}$ für alle n und damit hat man auf $B_R(x)$ eine beschränkte Folge harmonischer Funktionen. Nach Satz 1.10.7 ist diese Folge für jedes $\rho < R$ auf $B_R(x)$ gleichgradig stetig und bei $x = 0$ konvergent. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine auf $B_\rho(x)$ konvergente Teilfolge U_{n_k}. Diese konvergiert gegen eine auf $B_\rho(x)$ harmonische Funktion v. Es gilt $v \leq U$ und $v(x) = U(x)$ (nach Konstruktion).

Wir zeigen nun $v = U$ auf $B_\rho(x)$. Ist $v(y) < U(y)$ für ein $y \in B_\rho(x)$, dann gibt es (wegen der Definition von U) ein $u \in \mathcal{U}$ mit $v(y) < u(y) \leq U(y)$. Sei $v_k = \max\{u, U_k\}$. Mit der harmonischen Hebung V_k von v_k auf $B_R(x)$ bekommen wir eine Folge harmonischer Funktionen

$$U_k \leq V_k \leq U$$

mit $V_k \to V$ und V ist harmonisch in $B_\rho(x)$. Also sind $v \leq V$ harmonisch auf $B_\rho(x)$ und $v(x) = V(x)$. Dann ist aber $v - V \leq$ und harmonisch in $B_\rho(x)$, also wegen des Maximimprinzips identisch 0. Dies widerspricht aber der Definition von u. □

Damit haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um für stetige Funktionen $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Randwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu studieren.

Definition 1.10.9 *Die oben im Satz 1.10.8 konstruierte harmonische Funktion heißt Perron'sche Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \textit{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Die Frage der Annahme der Randwerte auf $\partial\Omega$ ist dabei noch offen. Wir werden sehen, daß es eine Frage der lokalen Geometrie des Randes ist, in welcher Weise die Randwerte angenommen werden.

Definition 1.10.10 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\xi \in \partial\Omega$. Dann heißt eine Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ Schranke bei ξ, falls*

(i) w superharmonisch auf Ω ist, und

(ii) $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ und $w(\xi) = 0$

gilt. Eine lokale Schranke bei ξ ist eine Funktion, die auf einer Umgebung $B_\rho(\xi)$ definiert ist, so daß die Bedingungen auf $B_\rho(\xi) \cap \Omega$ erfüllt sind.

Lemma 1.10.11 *Die Existenz einer lokalen Schranke impliziert die Existenz einer Schranke.*

Beweis: Klar! □

Definition 1.10.12 *Ein Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ heißt regulär, falls es eine Schranke bei ξ gibt.*

Satz 1.10.13 *Für die Perron'sche Lösung u des obigen Randwertproblems gilt, daß $u(x) \to \varphi(\xi)$ konvergiert (für $x \to \xi$), falls ξ regulärer Punkt ist und φ bei ξ stetig ist.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $M = \sup|\varphi|$. da ξ regulärer Punkt ist, existiert eine Schranke w. Dann gibt es ein $\delta > 0$, $k > 0$ mit $\|x - \xi\| < \delta$ impliziert $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ und $kw(x) > 2M$, falls $\|x - \xi\| \geq \delta$. Dann sind $v_o = \varphi(\xi) + \varepsilon + w$ und $v_u = \varphi(\xi) - \varepsilon - w$ super- bzw. subharmonisch und $\geq \varphi$, bzw. $\leq \varphi$ auf $\partial\Omega$. Dann hat man in Ω

$$v_u \leq u \leq v_o$$

oder

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Da $w(\xi) = 0$ folgt der Satz unmittelbar. □

Wir fassen die Resultate zum klassischen Dirichletproblem zusammen.

Satz 1.10.14 *Das klassiche Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist für jede stetige Randfunktion φ genau dann lösbar, falls jeder Randpunkt regulär ist.

Beweis: Die eine Richtung wurde gerade gezeigt.

Für die Umkehrung wählen wir die spezielle Randfunktion

$$\varphi(x) = |x - \xi|.$$

Die zugehörige Lösung des klassischen Dirichletproblems ist harmonisch, und damit natürlich eine Schranke. Damit ist ξ regulär. □

Kapitel 2

Sobolev–Räume

2.1 Funktionalanalytische Vorbemerkungen

Wir wiederholen einige Definitionen und Sätze aus der Funktionalanalysis. Wir werden dazu keine Beweise angeben, diese können in jedem Lehrbuch der Funktionalanalysis gefunden werden.

In diesem Abschnitt sei V ein (reell) linearer Vektorraum.

Definition 2.1.1 *V heißt ein Banachraum[1], falls es eine Abbildung (Norm) $\|.\|_V : V \to \mathbb{R}$ gibt mit*

(i) $\|v\|_V \geq 0 \ \forall v \in V$;

(ii) $\|v\|_V = 0$ *genau dann, wenn* $v = 0$;

(iii) $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ v \in V$;

(iv) $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \ \forall v_1, v_2 \in V$.

(v) Bezüglich der durch diese Norm induzierten Metrik ist V vollständig.

Definition 2.1.2 *Ein Banachraum heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.*

Lemma 2.1.3 *Die Menge aller linearen, stetigen Abbildungen*

$$l : V \to \mathbb{R}$$

ist nicht leer und bildet mit der Norm

$$\|l\|_{V^*} = \sup_{\{x \in V \,|\, \|x\|_V = 1\}} |l(x)|$$

einen Banachraum V^*.

[1] Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945) polnischer Mathematiker. Er war der Begründer der Theorie linearer, normierter Räume und ihren linearen Abbildungen. Seine Arbeiten sind die Grundlage der modernen Funktionalanalysis. Er und seine Schüler zeigten viele Anwendungen der Funktionalanalysis auf.

Beweis: Folgt aus den Sätzen von Hahn[2] und Banach. □

Definition 2.1.4 *(i) Es sei V ein Banachraum. Der Raum V^* heißt Dualraum von V. Der biduale Raum V^{**} ist definiert als*

$$V^{**} = (V^*)^*.$$

(ii) Die Abbildung $J : V \to V^{**} : v \mapsto v^{**}$ mit

$$v^{**}(w) = w(v) \ \forall w \in V^*$$

heißt kanonische Inklusion.

(iii) Ist die kanonische Inklusion ein Isomorphismus, so nennt man V reflexiv.

Satz 2.1.5 *Direkte Produkte und abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.*

Bemerkung 2.1.6 *Die Reflexivität ist entscheidend bei der Frage nach der Kompaktheit von beschränkten Mengen in der sogenannten schwach-*-Topologie.*

Ein Spezialfall dafür sind Hilberträume[3].

Definition 2.1.7 *Ein reeller Banachraum V heißt Hilbertraum wenn für je zwei Elemente $x, y \in V$ gilt*

$$\|x+y\|_V^2 + \|x-y\|_V^2 = 2(\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2).$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Existenz eines Skalarproduktes, d.h. einer Abbildung $\langle .,. \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\langle ax, y\rangle_V = a\langle x, y\rangle_V \ \forall x, y \in V, \ a \in \mathbb{R}$

(ii) $\langle x+y, z\rangle_V = \langle x, z\rangle_V + \langle y, z\rangle_V$

(iii) $\langle x, y\rangle_V = \langle y, x\rangle_V$

(iv) $\langle x, x\rangle_V = \|x\|_V^2$.

Lemma 2.1.8 *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

Beweis: Leicht nachzuprüfen! □

[2]Hans Hahn (27.9.1879-24.7.1934) formulierte unabhängig von Banach den Begriff des normierten linearen Raumes und zeigte zwei Jahre vor Banach Fortsetzungssätze für stetige lineare Funktionale.

[3]David Hilbert (23.1.1862-14.2.1943) begann seine mathematische Karriere mit Untersuchungen zur Invariantentheorie. Er gilt als einer der universalsten Mathematiker seiner Zeit und arbeitete auf praktisch allen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik. Dabei hat er mehrfach wesentliche neue Entwicklungen angebahnt. Er war einer der Hauptvertreter der mathematischen Logik und der axiomatischen Begründungen.

Definition 2.1.9 *Es seien $V_{1,2}$ reelle Banachräume. Eine lineare Abbildung $L : V_1 \to V_2$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß für jedes $v \in V_1$ gilt:*

$$\|Lv\|_{V_2} \leq c\|v\|_{V_1}.$$

Dann gilt folgendes einfache Lemma.

Lemma 2.1.10 *Ein linearer Operator $L : V_1 \to V_2$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.*

Im Gegensatz dazu ist der folgende Satz nichttrivial. Beweise findet man in Büchern über Funktionalanalysis.

Satz 2.1.11 (Banach) *Es sei $L : V_1 \to V_2$ ein beschränkter linearer Operator. Ist L surjektiv, so ist L offen, d.h. Bilder offener Mengen unter L sind offen.*

Eine weitere wichtige Klasse bilden die sogenannten abgeschlossenen Operatoren. Im folgenden sei $L : V_1 \to V_2$ nicht notwendig überall definiert, mit $D(L)$ bezeichnen wir den Definitionsbereich.

Definition 2.1.12 *Es sei $L : V_1 \to V_2$ ein linearer Operator. L heißt abgeschlossen, wenn der Graph $G(L) = \{(v, Lv) \mid v \in V\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $V_1 \times V_2$ ist.*

Man beachte, daß

(i) kartesische Produkte von Banachräumen wieder Banachräume sind.

(ii) Unterräume von Banachräumen nicht notwendig abgeschlossen sind.

Es gibt ein einfaches Kriterium für die Abgeschlossenheit eines Operators.

Lemma 2.1.13 *Ein Operator $L : V_1 \to V_2$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(L)$ mit $v_n \to v$ für die auch $\{Lv_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist (gegen ein Element $w \in V_2$), gilt*

(i) $v \in D(L)$

(ii) $Lv = w$.

<u>**Beweis:**</u> Nachrechnen! □

Für lineare Operatoren sind Spektrum und Resolventenmenge zwei wesentliche Begriffe.

Definition 2.1.14 *Es sei V ein Banachraum, $V^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung und $L : V \to V$ ein abgeschlossener, linearer Operator. Wir fassen L als Operator $L : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ auf.*

(i) *Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von L, falls $L - z\mathbb{1}$ nicht injektiv ist. $E(L)$ sei die Menge aller Eigenwerte von L.*

(ii) *Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liegt im kontinuierlichen Spektrum, wofür wir $T(L)$ schreiben, wenn $L - z\mathbb{1}$ injektiv ist, ein in V dichtes Bild hat und die inverse Abbildung nicht beschränkt ist.*

(iii) *Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liegt im Residualspektrum $R(L)$ von L, falls $L - z\mathbb{1}$ injektiv und das Bild nicht dicht liegt.*

(iv) *Das Spektrum von L wird mit $\Sigma(L)$ bezeichnet und ist definiert durch*

$$\Sigma(L) = E(L) \cup T(L) \cup R(L).$$

(v) *Die Resolventenmenge ist das Komplement des Spektrums, also*

$$P(L) = \mathbb{C} \setminus \Sigma(L)$$

.

Definition 2.1.15 (i) *Ein beschränkter, linearer Operator L heißt kompakt, falls das Bild beschränkter Mengen relativ kompakt ist.*

(ii) *Ein Operator L hat kompakte Resolvente, wenn für $z \in P(L)$ gilt*

$$(L - z\mathbb{1})^{-1} \textit{ ist kompakt.}$$

Definition 2.1.16 *Für $z \in P(L)$ schreiben wir $R(z, L) = (L - z\mathbb{1})^{-1}$ und nennen dies die Resolvente von L im Punkt z.*

Bemerkung 2.1.17 *Die Resolvente ist entweder für alle oder für kein $z \in P(L)$ kompakt.*

Satz 2.1.18 *Sei V ein unendlich dimensionaler Banachraum und $L : V \to V$ ein linearer Operator.*

(i) *Ist L kompakt, so ist $0 \in \Sigma(L)$. Das weitere Spektrum besteht nur aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich höchstens bei 0 häufen.*

(ii) *Hat L eine kompakte Resolvente, so besteht $\Sigma(L)$ aus abzählbar vielen Eigenwerten, die sich im Endlichen nicht häufen.*

2.2 Schwache Ableitungen

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Der *Träger* einer stetigen Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch
$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \mid u \neq 0\}}.$$
Mit $C_0^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge der C^∞–Funktionen mit kompaktem Träger. Wie üblich steht $L^p(\Omega)$ für den Raum der Funktionen, deren Betrag zur p–ten Potenz integrierbar ist, mit der üblichen Norm, welche wir mit $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ bezeichnen. $L^1_{loc}(\Omega)$ steht für den Raum aller meßbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$, so daß $u \in L^1(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wir nennen diesen Raum den *Raum der lokal integrierbaren Funktionen.* Dabei steht $\Omega' \subset\subset \Omega$ dafür, daß der Abschluß von Ω' eine kompakte Teilmenge von Ω ist.

Definition 2.2.1 *Es sei u eine lokal integrierbare Funktion auf Ω.*

(a) Die lokal integrierbare Funktion v heißt die schwache Ableitung von u nach x_i, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v \varphi dx.$$

(b) Ist α ein Multiindex, v lokal integrierbar, so sagen wir $v = D^\alpha u$ im schwachen Sinn, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx.$$

Aufgabe 2.2.2 *Man zeige, daß eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m$ schwache Ableitungen $D^\alpha u$ besitzt und daß diese mit den klassischen Ableitungen zusammen fallen.*

Lemma 2.2.3 *Besitzt die lokal integrierbare Funktion u eine schwache Ableitung $D^\alpha u$ und $D^\alpha u$ wiederum eine schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$, so hat u auch eine schwache Ableitung der Form $D^{\alpha+\beta} u$ und es gilt $D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u)$.*

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann folgt
$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega (D^\alpha u)\, \varphi dx$$
Ist $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und schreiben wir $D^\beta \psi = \varphi$, so folgt
$$\int\limits_\Omega (D^\alpha u)\, \varphi dx = \int\limits_\Omega (D^\alpha u) \left(D^\beta \psi\right) dx = (-1)^{|\beta|} \int\limits_\Omega D^\beta (D^\alpha u) \psi dx$$
und insgesamt
$$\int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta} \psi dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega D^\beta (D^\alpha u) \psi dx$$
□

Definition 2.2.4 *Mit $W^{m,p}(\Omega)$ werde für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ der Raum*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \ \exists\, v \in L^p(\Omega), \textit{ so daß } v = D^\alpha u\}$$

bezeichnet. $W^{m,p}(\Omega)$ heißt Sobolevraum[4].

Satz 2.2.5 *(i) $W^{m,p}(\Omega)$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum mit Norm*

$$\|u\|_{m,p}^{\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.1}$$

(Für $p = \infty$ betrachtet man die Summe der L^∞-Normen). Für $p < \infty$ ist dieser Banachraum separabel.

(ii) Für $p \in (1, \infty)$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ reflexiv.

(iii) Für $p = 2$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Hilbertraum. Dieser wird mit $H^m(\Omega)$ bezeichnet.

Beweis:

(i) Die Eigenschaften einer Norm sind für (2.2.1) leicht nachzuprüfen. Als einziges bleibt die Vollständigkeit zu beweisen. Dazu sei $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Cauchy–Folge m-fach schwach differenzierbarer Funktionen, bezüglich der Norm (2.2.1). Ferner sei $u_\nu^\alpha = D^\alpha u_\nu$. Dann ist u_ν^α für jedes α eine Cauchy–Folge in $L^p(\Omega)$. Es existiert also ein $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $u_\nu^\alpha \to u^\alpha$. Für jedes ν, α gilt aber

$$\int_\Omega u_\nu^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\nu D^\alpha \varphi dx.$$

Durch Grenzübergang auf beiden Seiten erhält man das erwünschte Resultat.

(ii) Sei s die Anzahl der Multiindizes $|\alpha| \leq m$. Dann können wir $W^{m,p}(\Omega)$ als Unterraum von $(L^p(\Omega))^s$ auffassen durch

$$u \mapsto (u, D^{(1,0,\ldots,0)}u, \ldots, D^\alpha u, \ldots).$$

Auf diese Weise wird $W^{m,p}(\Omega)$ zum abgeschlossenen Unterraum von $(L^p(\Omega))^s$. Da letzterer separabel ist, gilt dies auch für $W^{m,p}(\Omega)$.

[4]Sergej Lwowitsch Sobolev (6.10.1908–3.1.1989) erkannte aufgrund von physikalischen Überlegungen, daß es sinnvoll ist den Lösungsbegriff für partielle Differentialgleichungen abzuschwächen. Später konnte er diese verallgmeinerten Lösungen als Funktionale interpretieren und schuf damit die Grundlage der Theorie der Distributionen. Er war damit der Wegbereiter für den Gebrauch funktionalanalytischer Methoden in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Diese sind heute auch aus der Numerik partieller Differentialgleichungen nicht mehr wegzudenken. Auch für diese Entwicklungen legte er den Grundstein in einer Arbeit mit W. I. Smirnow

(iii) Da für $1 < p < \infty$ $L^p(\Omega)$ reflexiv ist, gilt dies auch für $(L^p(\Omega))^s$ und damit auch für dessen abgeschlossene Unterräume.

□

2.3 Approximation durch glatte Funktionen

Definition 2.3.1 *Eine Glättungsfunktion* (engl. mollifier) *ist eine Funktion* $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *mit*

(i) $\rho = 0$ *außerhalb* $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.

(iii) $\rho \geq 0$.

Beispiel 2.3.2

$$\rho_c(x) = \begin{cases} ce^{-\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Glättungsfunktion, falls $c > 0$ *so gewählt wird, daß*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_c(x)dx = 1.$$

Definition 2.3.3 *Für* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h > 0$ *und eine Glättungsfunktion* ρ *ist*

$$(J_h u)(x) = \frac{1}{h^n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy$$

die Regularisierung von u*. Diese ist für alle* $x \in \Omega$ *mit*

$$h < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

definiert.

Bemerkung 2.3.4 *Für alle* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *ist* $u_h = J_h u \in C^\infty(\Omega')$*, sofern* $h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Lemma 2.3.5 *Ist* $u \in C(\Omega)$*, so konvergiert* $u_h \to u$ *gleichmäßig auf jedem Kompaktum* $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis: Mit der Substitution

$$z = \frac{x-y}{h}$$

wird u_h zu

$$\begin{aligned} u_h &= \frac{1}{h^n} \int\limits_{|x-y|\leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy \\ &= \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x-zh)dz. \end{aligned}$$

Daher gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $2h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega'} |u_h(x) - u(x)| &= \sup_{\Omega'} \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z) \left|u(x-zh) - u(x)\right| dz \\ &\leq \sup_{\Omega'} \sup_{|z|\leq 1} |u(x) - u(x-zh)|. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß $\int_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x)dz = u(x)$.

Da u auf dem Kompaktum $\overline{\Omega''}$ mit

$$\Omega'' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(z, \Omega') < h\}$$

gleichmäßig stetig ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 2.3.6 *Ist Ω beschränkt und $u \in L^p(\Omega)$ oder $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, so konvergiert u_h für $h \to 0$ gegen u im Sinne der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ beziehungsweise in $L^p_{loc}(\Omega)$.*

(Konvergenz in $L^p_{loc}(\Omega)$ bedeutet

$$u_m \overset{L^p_{loc}(\Omega)}{\longrightarrow} u \Longleftrightarrow u_m \overset{L^p(\Omega')}{\longrightarrow} u \;\forall\, \Omega' \subset\subset \Omega.)$$

Beweis: Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2h$. Wir setzen

$$\Omega'' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \Omega')\} < h$$

und zeigen zunächst

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}$$

Für die nächste Umformung benötigen wir die Hölder'sche Ungleichung [5], sie besagt, daß für Zahlen $p, q > 1$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und Funktionen $f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$ gilt

$$|\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

[5] Ludwig Otto Hölder (22.12.1859–29.8.1937) arbeitete an den Universitäten Göttingen, Tübingen und Königsberg. Er trug zu vielen Gebieten der Mathematik bei, im Mittelpunkt seines Werkes steht die Algebra mit Untersuchungen spezieller Gruppen. In der Analysis stammen u.a. Arbeiten zur Potentialtheorie und ein Satz über das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten von ihm. In der Mechanik führte er das Hamiltonsche Prinzip für nichtholonome Zwangsbedingungen ein.

Wir wenden diese an, auf

$$
\begin{aligned}
|u_h(x)|^p &\le \left(\int\limits_{|z|\le 1} \rho(z)|u(x-zh)|dz \right)^p \\
&= \left(\int\limits_{|z|\le 1} \underbrace{\rho(z)^{\frac{p-1}{p}}}_{\in L^q(\Omega)} \underbrace{\rho(z)^{\frac{1}{p}}|u(x-zh)|}_{\in L^p(\Omega)} dz \right)^p \\
&\le \left(\int\limits_{|z|\le 1} \rho(z)dz \right)^{p-1} \int_{|z|\le 1} \rho(z)|u(x-zh)|^p dz \\
&\le \int\limits_{|z|\le 1} \rho(z)|u(x-zh)|^p dz.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega'} |u_h(x)|^p dx &\le \int\limits_{|z|\le 1} \left(\int_{\Omega'} |u(x-zh)|^p dx \right) \rho(z) dz \\
&\le \int\limits_{B_h(\Omega')} |u|^p dx
\end{aligned}
$$

und damit

$$\|J_h u(x)\|_{L^p(\Omega')} \le \|u\|_{L^p(\Omega'')}.$$

Wir finden zu $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion w mit

$$\|u-w\|_{L^p(\Omega'')} < \varepsilon.$$

Für ein geeignetes $h > 0$ hat man für die Glättung von w

$$\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon.$$

Alles in allem ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_{L^p(\Omega')} &\le \underbrace{\|u-w\|_{L^p(\Omega')}}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\le\varepsilon} + \|w_h-u_h\|_{L^p(\Omega')} \\
&\le 2\varepsilon + \underbrace{\|w_h-u_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\le\|w-u\|_{L^p(\Omega'')}\le\varepsilon} \le 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Um die Richtigkeit des Satzes bezüglich der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ zu schließen, wenden wir das Ergebnis auf $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ an. Wir beachten dabei, daß die triviale Fortsetzung einer Funktion $u \in L^p(\Omega)$ durch

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ liegt. □

Satz 2.3.7 *Es seien $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $v = D^\alpha u$. Dann konvergiert u_h gegen u und $D^\alpha(u_h)$ gegen v in Sinne der Konvergenz von $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Beweis: Wegen

$$D^\alpha_x \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha J_h u(x) &= h^{-n} \int_\Omega D^\alpha_x \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= h^{-n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) v(y) dy \\ &= J_h v. \end{aligned}$$

Wie bereits in Lemma 2.3.6 gezeigt konvergiert $J_h v \to v$. □

Definition 2.3.8 *Seien $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Mit $\hat{C}^{m,p}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilmenge mit*

$$\|u\|^\Omega_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

Bemerkung 2.3.9 *$\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist ein normierter linearer Raum, der jedoch* nicht *vollständig ist.*

Satz 2.3.10 (Meyers[6] und Serrin[7](1964)) *Die Vervollständigung von $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|^\Omega_{m,p}$ ist $W^{m,p}(\Omega)$.*

Im Beweis benötigen wir die sogenannte *Partition der Eins*, ein wichtiges Hilfsmittel der modernen Analysis.

Satz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\{U_\iota\}_{\iota \in J}$ eine offene Überdeckung von Ω. Dann existiert eine Familie von Funktionen $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, so daß

[6] N. G. Meyers ist Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Seine Arbeiten betreffen vornehmlich elliptische Differentialgleichungen

[7] James Serrin ist emeritierter Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Er hat Arbeiten zu vielen Aspekten partieller Differentialgleichungen und deren Anwendungen speziell in der Mechanik und Hydrodynamik geschrieben. Er war für viele Jahre einer der Herausgeber des Archive for rational mechanics and analysis, einer der führenden Zeitschriften auf diesem Gebiet.

(i) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_\iota$ für ein $\iota(j) \in J$,

(ii) für alle j ist $\varphi_j \geq 0$,

(iii) für alle $x \in \Omega$ gilt
$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1, \tag{2.3.2}$$

(iv) zu jedem $x \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung U, so daß nur für endlich viele $j \in \mathbb{N}$
$$\operatorname{supp}(\varphi_j) \cap U \neq \emptyset. \tag{2.3.3}$$

Man beachte, daß die Summe in (2.3.2) wegen der Bedingung (2.3.3) für jedes $x \in \Omega$ endlich ist.

Beweis von Satz 2.3.10: Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

(i) $\overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}} \subset W^{m,p}(\Omega)$,

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \subset \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$.

(i) Wir zeigen, aus $u \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$ folgt $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Zu zeigen ist, daß jede Cauchyfolge in $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ eineindeutig einem Element in $W^{m,p}(\Omega)$ entspricht. Zur Erinnerung: die Vervollständigung ist als Menge von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen definiert. Die Abbildung
$$T : \hat{C}^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) : u \mapsto u$$
ist linear und stetig (Norm ≤ 1). Also folgt aus $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist Cauchyfolge, daß auch $\{Tu_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Sei $\overline{u} = \lim_{\nu\to\infty} u_\nu$ in $\overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$, so existiert $v \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $v =\in_{\nu\to\infty} Tu_\nu$. Setze
$$T\overline{u} = v,$$
in $W^{m,p}(\Omega)$. Diese Zuordnung hat alle erforderlichen Eigenschaften (Stetigkeit und Injektivität).

(ii) Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gegeben, sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir betrachten eine Überdeckung $\{\Omega_\nu\}_\nu$, d.h. $\Omega = \cup_{\nu=1}^{\infty}\Omega_\nu$ mit den zusätzlichen Eigenschaften,

(i) $\overline{\Omega_\nu} \subset\subset \Omega_{\nu+1}$ und

(ii) $\tilde{\Omega}_\nu = \Omega_{\nu+2} \setminus \overline{\Omega_\nu}$ ist eine offene Überdeckung von Ω. (Man weise nach, daß eine solche Überdeckung existiert!)

Beachte, daß jedes $x \in \Omega$ in maximal zwei Elementen dieser Überdeckung $\{\tilde{\Omega}\}_\nu$ liegt. Im weiteren betrachten wir nur diese Überdeckung $\{\tilde{\Omega}\}_\nu$. Nun sei $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine dieser Überdeckung subordinierte Teilung der Eins, d.h. $\operatorname{supp}\psi_j \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega}_j$.

Betrachte nun $u\,\psi_j$ mit $\operatorname{supp} u\,\psi_j \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega_j}$. Jede der Funktionen $u\,\psi_j$ hat m schwache Ableitungen. Für genügend kleines $h_i = h_i(\varepsilon)$ hat

$$w_i = J_{h_i}(u\,\psi_i)$$

den Träger

$$\operatorname{supp} w_i \subset \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$$

und es gilt

$$\|w_i - u\,\psi_i\|^{\Omega}_{m,p} < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Setze $w = \sum w_i$. w ist in $C^\infty(\Omega)$, und es gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha w = \sum_i D^\alpha w_i &= \sum_i D^\alpha(w_i - u\,\psi_i) + \sum_i D^\alpha(u\,\psi_i) \\ &= \sum_i D^\alpha(w_i - u\,\psi_i) + D^\alpha u. \end{aligned}$$

Für jedes $x \in \Omega$ sind in der Summe rechts höchstens endlich viele Terme nicht null (mit gleicher oberer Schranke, nämlich 4). Deshalb folgt für $(0 \le |\alpha| \le m)$

$$D^\alpha w - D^\alpha u = \sum_i D^\alpha(w_i - u\,\psi_i)$$

und daher

$$\begin{aligned} \|D^\alpha w - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &\le \sum_i \|D^\alpha(w_i - u\,\psi_i)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist $u \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\,\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$. □

Tatsächlich haben wir gezeigt, daß $W^{m,p}(\Omega)$ im Abschluß (bezüglich der Norm $\|.\|^{\Omega}_{m,p}$) der Teilmenge der Funktionen von $C^\infty(\Omega)$ ist, deren $\|.\|^{\Omega}_{m,p}$–Norm endlich ist.

Definition 2.3.11 *$W_0^{m,p}(\Omega)$ ist der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $\|.\|^{\Omega}_{m,p}$–Norm, entsprechend $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.*

Bemerkung 2.3.12 *$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. Ist Ω beschränkt, so ist*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \ne W^{m,p}(\Omega)!$$

2.4 Sobolev-Ungleichungen

Satz 2.4.1 *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ von der Klasse C^2, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, p, m)$ und zu jedem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Konstante $C = C(\Omega, m, p, \varepsilon)$, so daß für alle $u \in C^m(\overline{\Omega})$ gilt*

$$\|u\|_{m-1,p}^{\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p}^{\Omega} + C\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus

$$\sum_{|\alpha|=i} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |D^\beta u|^p dx + \frac{C}{\varepsilon^{\frac{i}{m-i}}} \int_\Omega |u|^p dx \tag{2.4.4}$$

mit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $C = C(p, m, \Omega)$ und $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Wir beweisen diese Abschätzung durch vollständige Induktion und beginnen mit dem Fall $i = 1, m = 2, n = 1$. Sei $0 < \varepsilon < 2^p|\Omega|^p$, wobei hier $|\Omega|$ die Intervallänge ist. Wir unterteilen Ω in Intervalle der Länge

$$L \in [\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \varepsilon^{\frac{1}{p}}].$$

Sei (a, b) eines dieser Teilintervalle. Setze $\alpha = \frac{b-a}{4}$. Wähle Punkte $x_1 \in (a, a+\alpha)$, $x_2 \in (b-\alpha, b)$. Für ein $x_{12} \in (x_1, x_2)$ gilt

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = Du(x_{12}).$$

Es gilt

$$Du(x) = Du(x_{12}) + \int_{x_{12}}^{x} D^2u(\xi)d\xi.$$

Daraus folgt nun

$$|Du(x)| \leq \frac{|u(x_1)| + |u(x_2)|}{2\alpha} + \int_a^b |D^2u(\xi)|d\xi.$$

Integration dieser Ungleichung über $x_1 \in (a, a+\alpha)$, $x_2 \in (b-\alpha, b)$ ergibt

$$\alpha^2|Du(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |u(\xi)|d\xi + \alpha^2 \int_a^b |D^2u(\xi)|d\xi.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir durch Potenzieren

$$|Du(x)|^p \leq \frac{c}{\alpha^{p+1}} \int_a^b |u(\xi)|^p d\xi + c\alpha^{p-1} \int_a^b |D^2u(\xi)|^p d\xi \tag{2.4.5}$$

mit $c = c(p)$. Man beachte dazu, daß wegen

$$\int_a^b 1|u(\xi)|d\xi \leq \left(\int_a^b 1^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \leq (4\alpha)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |u(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

und einer entsprechenden Abschätzung für $\int_a^b |D^2 u|dx$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha^{2p}|Du(x)|^p &\leq 2^p \left(\int_a^b |u(\xi)|d\xi\right)^p + 2^p\alpha^{2p}\left(\int_a^b |D^2u(\xi)|d\xi\right)^p \\ &\leq 2^{p(1+\frac{2}{q})}\alpha^{\frac{p}{q}} \int_a^b |u(\xi)|^p d\xi + 2^{p(1+\frac{2}{q})}\alpha^{\frac{p}{q}}\alpha^{2p}\int_a^b |D^2u(\xi)|^p d\xi. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $p^{-1} + q^{-1} = 1$ schließt man (2.4.5). Wir integrieren nun (2.4.5) bezüglich x und erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b |Du(x)|^p dx &\leq \frac{c}{\alpha^p}\int_a^b |u(x)|^p dx + c\alpha^p \int_a^b |D^2u(x)|^p dx \\ &\leq \frac{c'}{\varepsilon}\int_a^b |u(x)|^p dx + c'\varepsilon \int_a^b |D^2u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Aufaddieren über alle Teilintervalle ergibt das Teilergebnis. Hier, wie im folgenden bedeuten gleiche Konstanten nicht notwendig das gleiche, hängen aber von den gleichen Größen ab. Im Regelfall kann man alle gleichen Konstanten durch die jeweils Größte ersetzen. Verschiedene Konstanten werden eingeführt um den Überblick zu behalten, in welcher Reihenfolge neue Konstanten eingeführt werden müssen.

Der nächste Schritt besteht darin, Würfel mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen zu betrachten. Im wesentlichen wird dabei der gleiche Trick wiederholt, d.h. wir betrachten Würfel $Q = [a_1, b_1] \times \ldots [a_i, b_i] \ldots [a_n, b_n]$ der Kantenlänge L, wie im ersten Schritt. Dann ergibt sich für einen solchen Würfel und eine Koordinatenparallele $x^i = (x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0)$, wobei X_i in einem Intervall der Länge L variiert

$$\int_{a_i}^{b_i} |D_i u(x^i)|^p dx_i \leq \varepsilon \int_{a_i}^{b_i} |D_{ii}u(x^i)|^p dx_i + \frac{c'}{\varepsilon}\int_{a_i}^{b_i} |u(x^i)|^p dx_i.$$

Integration bezüglich der anderen Variablen x_j, $j \neq i$ ergibt

$$\int_Q |D_i u|^p dx \leq c'\varepsilon \int_Q |D_{ii}u|^p dx + \frac{c'}{\varepsilon}\int_Q |u|^p dx.$$

Addition der entsprechenden Ausdrücke für die verschiedenen Ableitungen $D_i u$ und aufaddieren über die Würfel Q, ergibt die Gleichung 2.4.4.

Im folgenden schreiben wir $|D^k u|^p$ für $\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p$. Der Rest ist eine Induktion über m: für $m = 2$ ist die Behauptung gezeigt für $i = 1$ (trivial für $i = 0$). Angenommen die Gleichung ist wahr für $m = 2, \ldots, j$.

Sei $k = m$ und $i = k - 1$. Wir wenden obiges Resultat für $i = 1,\ m = 2$ auf die $(k-1)$–ste Ableitung an und erhalten (mit $\varepsilon/2$ statt ε)

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \le \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_1}{\varepsilon} |D^{k-1} u|^p dx.$$

Die Induktionsvoraussetzung für $k = m,\ i = k - 1$ ergibt nun

$$\int_\Omega |D^{k-1} u|^p dx \le \delta \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_2}{\delta^{k-1}} \int_\Omega |u|^p dx$$

Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{2C_1}$. Damit erhalten wir

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \le \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{C_2}{\varepsilon^{k-1}} (2C_1)^{k-1} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Alles in allem wird dies zu

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \le \varepsilon \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{\tilde{C}_1}{\varepsilon^k} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Dies ist die Behauptung für $m = k + 1, i = k$.

Als nächstes wollen wir den Induktionsschritt $(i, k) \to (i, k+1)$ durchführen. Wir schreiben die Behauptung für $i = k, m = k + 1$ als

$$\int_\Omega |D^k u|^p dx \le \mu \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_4}{\mu^k} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Dies ergibt mit der Induktionsannahme für allgemeines (i, k)

$$\int_\Omega |D^i|^p dx \le \delta \int_\Omega |D^k u|^p dx + \frac{C_3}{\delta^{\frac{i}{k-i}}} \int_\Omega |u|^p dx \tag{2.4.6}$$

$$\int_\Omega |D^i u|^p dx \le \delta\mu \int_\Omega |D^{k+1} u|^p dx + \frac{C_4 \delta}{\mu^k} \int_\Omega |u|^p dx + \frac{C_3}{\delta^{i/(k-i)}} \int_\Omega |u|^p dx.$$

Mit der Wahl

$$\delta = \varepsilon^{\frac{k-i}{k+1-i}}, \qquad \mu = \varepsilon^{\frac{1}{k+1-i}}$$

ergibt sich $\delta\mu = \varepsilon$ und $\mu^k = \varepsilon^{\frac{k}{k+1-i}}$, $\delta^{\frac{i}{k-i}} = \varepsilon^{\frac{i}{k+1-i}}$. Ist $m = k + 1$ folgt daher $\mu^k = \delta^{\frac{i}{m-i}}$. Damit hat man die Behauptung für i, $m = k + 1$. $\square$

Definition 2.4.2 *(i) Der Standardkegel mit Öffnung $\rho > 0$ im $\mathbb{R}^n$ ist die Teilmenge*

$$K_\rho^S = \{tx \mid x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), \|x'\| < \rho, x_n = 1\}.$$

(ii) Der Standardkegel mit Öffnung ρ und Höhe $h > 0$ ist

$$K_{\rho,h}^S = K_\rho^S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < h\}.$$

(iii) Jedes Bild $K_{\rho,h} = f(K_{\rho,h}^S)$, wobei $f(x) = Ax + b, A \in \mathbf{O}(n), b \in \mathbb{R}^n$, heißt Kegel mit Öffnung ρ und Höhe h. Dabei wird b die Spitze von $K_{\rho,h}$ genannt.

Definition 2.4.3 *Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$* erfüllt eine (gleichmäßige) Kegelbedingung mit Kegelkonstanten $\rho > 0,\ h > 0$, *falls zu jedem Punkt $x \in \Omega$ ein Kegel $K_{\rho,h}$ mit Spitze in x existiert, so daß $K_{\rho,h} \subset \Omega$.*

Satz 2.4.4 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches einer Kegelbedingung mit Konstanten $\rho, h > 0$ genüge. Ist $u \in C^m(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, $m > \frac{n}{p}$, so gibt es eine Konstante $C = C(\rho, h, n, p)$ mit*

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \|u\|_{m,p}^{\Omega}.$$

Beweis: Wir beweisen den Satz für $p > 1$, für $p = 1$ muß man den Beweis geringfügig modifizieren. Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 1 \\ 1 & t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für festes $x \in \Omega$ führen wir im $K_{\rho,h}$ mit Spitze x Polarkoordinaten $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ um x ein. Mit diesen gilt

$$u(x) = -\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr. \tag{2.4.7}$$

Man beachte, daß die Stammfunktion von $\frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right)$ für $r = 0$ den Wert $u(0, \theta) = u(x)$ und für $r = 1$ den Wert 0 hat. Integration der Gleichung (2.4.7) führt auf

$$u(x) = -\frac{1}{\mu(S_\rho)} \int_{S_\rho} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr\, d\theta.$$

Mehrmaliges Anwenden partieller Integration der Form

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr = -\int_0^h r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(g\left(\frac{r}{h}\right) u(r, \theta) \right) dr$$

führt auf

$$u(x)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!\mu(S_\rho)}\int\limits_{S_\rho}\int\limits_0^h r^{m-1}\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(g\left(\frac{r}{h}\right)u(r,\theta)\right)dr\,d\theta.$$

Mit $r^{m-1}=r^{m-n}r^{n-1}$, $r^{n-1}d\theta\,dr=dV$ und der Hölderschen Ungleichung schätzt man ab

$$|u(x)|\le C\left(\int\limits_{K_{\rho,h}}\left|\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(g\left(\frac{r}{h}\right)u(r,\theta)\right)\right|^p dV\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Um die Höldersche Ungleichung anwenden zu können muß r^{m-n} in $L^q(K_{\rho,h})$ sein, $q=p/(p-1)$. Betrachte

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_{\rho,h}} r^{(m-n)q}\,dx &= \int\limits_{K_{\rho,h}} r^{(m-n)\frac{p}{p-1}}dx\\ &= \int\limits_{S_\rho}\int\limits_0^h r^{n-1}r^{(m-n)\frac{p}{p-1}}dr\,d\theta\\ &= \mu(S_\rho)\int\limits_0^h r^{\frac{(m-n)p+(n-1)(p-1)}{p-1}}dr.\end{aligned}$$

Der Exponent hat die Form

$$\frac{mp-p-n+1}{p-1}=\frac{mp-n}{p-1}-1>-1.$$

Aus der obigen Beziehung folgt die Behauptung unmittelbar. $\square$

Definition 2.4.5 *Eine Funktion $v:\Omega\to\mathbb{R}$ heißt gleichmäßig Hölder-stetig*[8] *mit Exponent α, $0<\alpha\le 1$, falls*

$$|v|_\alpha=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|v(x)-v(y)|}{\|x-y\|^\alpha}<\infty.$$

Satz 2.4.6 *Sei $u\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $r>n$. Dann gilt für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$*

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^{1-n/r}}\le C\sum_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

[8]Ernst Hölder (2.4.1901–??), der Sohn von Ludwig Otto Hölder, beschäftigte sich am Anfang seiner Laufbahn mit Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten und mit Himmelsmechanik. Später beschäftigte er sich vornehmlich mit Variationsmethoden und partiellen Differentialgleichungen.

Beweis: Setze $d = \|x-y\|$, $S_x = B_d(x)$, $S = S_x \cap S_y$. Integration der Dreiecksungleichung liefert die Abschätzung

$$|u(x)-u(y)|\mu(S) \leq \int_S |u(x)-u(z)|dz + \int_S |u(z)-u(y)|dz.$$

Wir erhalten eine obere Abschätzung, indem wir das erste Integral über S_x und das zweite über S_y auswerten. Wir schreiben $z(s) = x + s\frac{z-x}{\|z-x\|}$. Dann ist mit $\rho = \|z-x\|$

$$u(z)-u(x) = \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial s} u(z(s))ds.$$

Also folgt

$$\int_{S_x} |u(x)-u(z)|dz \leq \int_{S_x}\int_0^\rho \left|\frac{\partial}{\partial s}u(z(s))\right| dsdz.$$

Mit Polarkoordinaten (r,θ) um x kann dies wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}
\int_{S_x}\left(\int_0^\rho \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| ds\right)\rho^{n-1}d\theta d\rho &\leq d^{n-1}\int_{S_x}\left(\int_0^\rho \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| ds\right)d\theta d\rho \\
&\leq d^{n-1}\int_{S_x}\left(\int_0^d \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| ds\right)d\theta d\rho \\
&\leq Cd^n \int_{S_x}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|\frac{dz}{\rho^{n-1}} \\
&\leq Cd^n\left(\int_{S_x}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{S_x}\rho^{\frac{(1-n)r}{r-1}}dz\right)^{\frac{r-1}{r}}.
\end{aligned}$$

Die gleiche Abschätzung für das zweite Integral ergibt

$$|u(x)-u(y)|\mu(S) \leq cd^{n+1-n/r}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n |D_i u|^r dz\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Da $\mu(S)$ proportional zu d^n ist, folgt die Behauptung nach Division durch $\mu(S)$. □

2.5 Einbettungssätze

Satz 2.5.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das einer Kegelbedingung mit Kegelkonstanten ρ, h genüge. Falls $u \in W^{j,p}(\Omega)$, $j > m + \frac{n}{p}$, so gibt es einen Repräsentanten von u in $C^m(\Omega)$.*

Beweis: $\hat{C}^{j,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{j,p}(\Omega)$. Es sei $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{j,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|.\|_{j,p}^{\Omega}$. Für α mit $0 \leq |\alpha| \leq m$ gilt mit Satz 2.4.4 angewendet auf $D^\alpha u \in W^{j-\alpha,p}(\Omega)$

$$\sup_{\Omega} |D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu| \to 0 \text{ mit } \nu, \mu \to \infty.$$

Damit ist $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = \tilde{u} \in C^m(\Omega)$. □

Definition 2.5.2 *Es seien X, Y Banachräume. Wir sagen, der Banachraum X ist beschränkt in den Banachraum Y eingebettet, wenn $X \subset Y$ und die Abbildung $T : X \to Y : x \mapsto x$ beschränkt ist. T wird die Einbettungsabbildung genannt. Wir schreiben $X \overset{\subseteq}{\to} Y$.*

Korollar 2.5.3 *Mit der Bezeichnung $C_*^m(\Omega)$ für den Unterraum von $C^m(\Omega)$ von Funktionen, für die gilt*

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)| < \infty,$$

hat man für $j > m + \frac{n}{p}$ eine beschränkte Einbettung $W^{j,p}(\Omega) \to C_*^m(\Omega)$. (Beachte, $\|\cdot\|_m$ macht $C_*^m(\Omega)$ zum Banachraum.)

Lemma 2.5.4 (Verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung) *Es seien $p_1, \dots, p_n > 1$ und $\sum p^{-1} = 1$, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega |\prod_{i=1}^n f_i| dx \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

Proof: Sei $\sum_{i=1}^{n-1} p_i^{-1} = q^{-1}$. Dann ist $q^{-1} + p_n^{-1} = 1$ und $\prod_{i=1}^{n-1} |f_i| \in L^q(\Omega)$, denn $q \leq p_i$ für $i = 1, \dots, n-1$ und es gilt mit der Hölder'schen Ungleichung

$$\int_\Omega \prod_{i=1}^n |f_i| dx \leq \|\prod_{i=1}^{n-1} |f_i|\|_{L^q(\Omega)} \|f_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}.$$

Nach Induktionsannahme gilt die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung für Produkte von $n-1$-Funktionen und man hat daher (unter Beachtung von $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{q}{p_i} = 1$ und von $|f_i|^q \in L^{\frac{p_i}{q}}(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \prod_{i=1}^{n-1} |f_i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_\Omega |f_i|^{q\frac{p_i}{q}} dx \right)^{\frac{q}{p_i}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit ist die verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung gezeigt. □

Satz 2.5.5 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) & p < n \\ C(\overline{\Omega}) & p > n. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

Außerdem existieren Konstanten $C = C(n,p)$ mit

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} & p < n \\ \sup_\Omega |u(x)| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} & p > n. \end{cases} \tag{2.5.9}$$

Beweis: Wir beweisen dies für Funktionen $u \in C_0^1(\Omega)$ und führen dann die gleichen Grenzübergänge wie oben durch. Für $u \in C_0^1(\Omega)$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$|u(x)| \leq \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \tag{2.5.10}$$

und daher

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i. \tag{2.5.11}$$

Wir beweisen den Satz zunächst für $p = 1$. Betrachte also

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{2.5.12}$$

Wir wollen das Integral

$$\int_\Omega |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx$$

abschätzen. Es gilt

$$\int_\Omega |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \ldots dx_n.$$

Wir nutzen dies zur iterativen Berechnung (per Induktion) aus:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{konstant bzgl. } x_1} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \end{aligned}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \underbrace{\left(\int_{x_i} |D_i u| dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\in L^{n-1}(\mathbb{R})} dx_1$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Im letzten Schritt wurde die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung verwendet.

Dies war der erste Schritt in der Induktion. Wir nehmen nun an, nach j Schritten (für $j \in \{1, \ldots, n\}$) sei gezeigt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \ldots dx_j \quad \leq \quad & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_j \ldots dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_j \ldots dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \left(\prod_{i=j+1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_j \ldots dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Nun erhält man durch Integration bezüglich x_{j+1}

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \ldots dx_j dx_{j+1} \leq & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_1 \ldots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right. \\ & \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_1 \ldots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \left.\left(\prod_{i=j+1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty} |D_i u| dx_i dx_1 \ldots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_{j+1} \\ \leq & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| dx_1 \ldots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right. \\ & \left(\prod_{i=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| dx_1 \ldots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_{j+1}u|dx_{j+1}dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{konstant bez. } x_{j+1}}$$

$$\left(\prod_{i=j+2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty}|D_iu|dx_idx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\Bigg) dx_{j+1}$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|D_{j+1}u|dx_1\dots dx_{j+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|D_iu|dx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right.$$

$$\left.\prod_{i=j+2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_i}^{\infty}|D_iu|dx_idx_1\dots dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) dx_{j+1}.$$

Eine erneute Anwendung der verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung ergibt (2.5.13) für $j+1$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left(\prod_{i=1}^{n}\int_\Omega |D_iu|dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\leq \frac{1}{n}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|D_iu|dx \text{ (geom. Mittel} \leq \text{arith. Mittel)}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|Du\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Die weiteren Fälle bekommt man durch Betrachten von Potenzen von u. Ist $\gamma > 1$, so gilt

$$\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_\Omega |u|^{\gamma-1}|Du|dx \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.5.14)$$

wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ ist. Wähle γ so, daß

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}, \text{ d.h. } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p} \quad (p<n). \qquad (2.5.15)$$

Wegen (2.5.14) hat man die Abschätzung

$$Q = \frac{\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)}}{\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für den Zähler von Q ergibt sich

$$\begin{aligned} \||u|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^{\gamma\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

und für den Nenner

$$\left.\begin{aligned} \||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)p'}\right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\right)^{1/p'}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.16}$$

Also hat man für Q wegen $\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'} = \frac{n-p}{np}$ die Gleichung

$$Q = \left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\right)^{\frac{n-1}{n}-\frac{1}{p'}} = \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)}.$$

Wir bemerken zum Fall $p > n$ zunächst, daß für Gebiete, die einer Kegelbedingung genügen, bereits aus Satz 2.4.4 die stetige Einbettung von $W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $C(\overline{\Omega})$ folgt. Hier geht es darum, eine vergleichbare Behauptung ohne Kegelbedingung (aber für $W_0^{1,p}(\Omega)$-Gebiete zu zeigen. Für Gebiete mit Kegelbedingung folgt die Form der Abschätzung auch aus dem Beweis von Satz 2.4.4.

Wir kommen zum Beweis im allgemeinen Fall. Es sei $p > n$. Wir definieren für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine neue Funktion

$$v = \sqrt{n}\frac{|u|}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Ferner setzen wir voraus, daß $|\Omega| = 1$ ist. Dann gilt

$$\|v^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \gamma\|v^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

mit

$$n' = \frac{n}{n-1}, \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

und $p' < n'$ und $\gamma > 1$ wie oben, denn aus dem ersten Teil des Beweises folgt dann

$$\|v^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}\right)^\gamma \||u|^\gamma\|_{L^{n'}(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma\sqrt{n}^{\gamma-1}\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}\frac{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}{\|Du\|^{\gamma}_{L^p(\Omega)}}\\
&\leq \gamma\sqrt{n}^{\gamma-1}\frac{\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(\Omega)}}{\|Du\|^{\gamma-1}_{L^p(\Omega}}\\
&= \gamma\|v^{\gamma}\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\|v\|_{L^{\gamma n'}(\Omega)} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\|v\|^{1-\frac{1}{\gamma}}_{L^{(\gamma-1)p'}(\Omega)}.$$

Die rechte Seite wird wegen $|\Omega| = 1$ durch (vgl. Lemma A.1.4)

$$\gamma^{\frac{1}{\gamma}}\|v\|^{1-\frac{1}{\gamma}}_{L^{\gamma p'}(\Omega)}$$

nach oben abgeschätzt. Sei $\delta = \frac{n'}{p'} > 1$ und $\gamma = \delta^{\nu}$ für $\nu \in \mathbb{N}$. Dies ergibt

$$\|v\|_{L^{n'\delta^{\nu}}(\Omega)} \leq \delta^{\nu\delta^{-\nu}}\|v\|^{1-\delta^{-\nu}}_{L^{n'\delta^{\nu-1}}(\Omega)},$$

wegen $\gamma p' = \delta^{\nu}p' = n'\delta^{\nu-1}$.

Setze zunächst $\nu = 1$ und erhalte eine Abschätzung

$$\|v\|_{L^{n'\delta^{\nu}}(\Omega)} \leq \delta^{\delta^{-1}}\|v\|^{1-\delta^{-1}}_{L^{n'}(\Omega)}.$$

Hier kann $\|v\|_{L^{n'}(\Omega)}$ durch

$$\|v\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}\|u\|_{L^{n'}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}}\|Du\|_{L^1(\Omega)}$$

unter Verwendung von 2.5.16 abgeschätzt werden. Da wegen Lemma A.1.4

$$\frac{\|Du\|_{L^1(\Omega)}}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \leq 1$$

erhält man für beliebiges ν

$$\|v\|_{L^{n'\delta^{\nu}}(\Omega)} \leq \delta^{\sum_{\nu}\nu\delta^{-\nu}}C = K,$$

für eine Konstante K. Man beachte die Iteration deren Anfang für $\nu = 2$ so aussieht

$$\|v\|_{L^{n'\delta^2(\Omega)}} \leq \delta^{2\delta^{-2}}\|v\|^{1-\delta^{-2}}_{L^{n'\delta}(\Omega)} \leq \delta^{2\delta^{-2}}\delta^{\delta^{-1}}\|v\|^{(1-\delta^{-1})(1-\delta^{-2})}_{L^{n'}(\Omega)}$$

Mit $\nu \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen $\|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}$, also

$$\sup_{\Omega} v \leq \tilde{K}.$$

Damit ist

$$\sup_{\Omega}|u| \leq \frac{\tilde{K}}{\sqrt{n}}\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Durch eine Koordinatentransformation erhält man das Resultat auch für Gebiete mit $|\Omega| \neq 1$. $\square$

2.6 Kompaktheit

Satz 2.6.1 (Ascoli[9]–Arzelà[10]) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $K \subset C(\overline{\Omega})$ eine Teilmenge. Ist K punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, so ist K relativ kompakt.*

(Hier bedeutet punktweise beschränkt: für jedes x ist $\sup_K |f(x)| < \infty$, gleichgradig stetig heißt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $|x-y| < \delta$ und $f \in K$ folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.)

Satz 2.6.2 (Fréchet[11]–Kolmogorov[12]) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega' \subset\subset \Omega$. Für $p \in [1,\infty)$ sei $S \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, $\delta < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, so daß*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \ \forall h \in \mathbb{R}^n, \ |h| < \delta, \ \forall f \in S,$$

so ist $S|_{\Omega'}$ relativ kompakt in $L^p(\Omega')$. ($\tau_h f(x) = f(x+h)$).

Satz 2.6.3 *Seien Ω, S wie oben, gilt zusätzlich $\forall \varepsilon > 0$ existiert $\Omega' \subset\subset \Omega$, so daß*

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\Omega')} < \varepsilon, \ \forall f \in S,$$

so ist S relativ kompakt.

Aufgabe 2.6.4 *Sei $Z \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Wir fassen jedes $u \in Z$ als auf triviale Weise zu einer Funktion $u \in \mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Man zeige: Z ist genau dann relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, wenn*

$$\|J_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

gleichmäßig in $u \in Z$ konvergiert.

---

[9] Giulio Ascoli (20.11.1843–12.7.1896) versuchte das sogenannte Dirichletsche Prinzip in der Variationsrechnung zu rechtfertigen. Dabei gelang es ihm, das nach ihm benannte Kriterium für die relative Kompaktheit von Funktionenmengen zu beweisen. Durch die Fortführung dieser Ideen im Werk von Arzelà wurde dies zu einer Grundlage der Funktionalanalysis.

[10] Cesare Arzelà (6.3.1847–15.3.1912) stammt aus einfachen Verhältnissen. Ab 1880 hatte er einen Lehrstuhl für Analysis an der Universität Bologna. Er führte einen Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ein und zeigte die Stetigkeit der Grenzfunktioen, wie auch Vertauschungssätze für das Riemannsche Integral. Er verallgemeinerte das Kompaktheitskriterium von Ascoli. Diese Arbeit wurde zum Ausgangspunkt von wichtigen Überlegungen zur Funktionalanalysis.

[11] Maurice René Fréchet (2.9.1879–4.6.1973) fand in seiner Dissertation den Begriff des metrischen Raumes und baute darauf ein neues abstraktes Gebäude auf. Er führte die Begriffe *separabel* und *kompakt* ein. Er hatte Vorbehalte gegen die Theorie der normierten Räume von Banach und legte mit seinem Begriff der Ableitung die Grundlagen der nichtlinearen Funktionalanalysis.

[12] Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (25.4.1903–20.10.1987) begann seine berufliche Arbeit als Schaffner, bevor er das Studium aufnahm. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit. Von ihm wurde nicht nur die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie entscheidend geprägt, sondern auch in der Theorie der dynamischen Systeme stammen wichtige Resultate von ihm (KAM-Theorie).

Für den nächsten Satz benötigen wir eine Interpolationsungleichung,die aus der Hölderschen Ungleichung folgt und zunächst formuliert wird.

Lemma 2.6.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in L^p(\Omega)$, dann hat man für λ mit*

$$\lambda + (1-\lambda)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{q}$$

die folgende Ungleichung

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)},$$

wobei $r = \frac{np}{n-p}$ ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\int_\Omega |u|^s |u|^{q-s} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\||u|^s\|_{L^{\tilde{p}}(\Omega)} \||u|^{q-s}\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{mit } \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{r}} = 1 \\
&= \left(\left(\int_\Omega |u|^{s\tilde{p}} dx\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\int_\Omega |u|^{\tilde{r}(q-s)} dx\right)^{\frac{1}{\tilde{r}}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|u\|^{\frac{s}{q}}_{L^{s\tilde{p}}(\Omega)} \|u\|^{\frac{q-s}{q}}_{L^{(q-s)\tilde{r}}(\Omega)} \\
&= \|u\|^{\lambda}_{L^m(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}
\end{aligned}$$

mit

$$\lambda = \frac{s}{q},\ m = s\tilde{p},\ r = (q-s)\tilde{r}.$$

Damit findet man

$$\frac{\lambda}{m} + \frac{1-\lambda}{r} = \frac{s}{mq} + \frac{q-s}{qr} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{r}}\right) = \frac{1}{q}.$$

Wir wählen nun s, so daß

$$\frac{q-s}{1-s} = \frac{np}{n-p}$$

erfüllt ist, dann sind alle Bedingungen des Lemmas erfüllt. □

Satz 2.6.6 *$W_0^{1,p}(\Omega)$ ist für beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt eingebettet in* *(i)* $L^q(\Omega)$, $q < \frac{np}{n-p}$ *und* $p < n$,

(ii) $C(\overline{\Omega})$, $p > n$.

und es gilt

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|^{\Omega}_{1,p} \leq c(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Wir beginnen mit einer gemwinsamen Vorüberlegung: sei $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt und $A_\varepsilon = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid \|v-u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon, u \in A\}$ und $\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \cap C_0^1(\Omega)$.Da $C_0^1(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt, ist $A \subset \overline{\tilde{A}_\varepsilon}$. (Hier wird der Abschluß bezüglich der $W^{1,p}$-Norm gebildet.) Wir müssen also zeigen:

(i) $\tilde{A}_\varepsilon$ ist relativ kompakt in $C(\bar{\Omega})$ für $p > n$, und

(ii) $\tilde{A}_\varepsilon$ ist relativ kompakt in $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ für $p < n$.

Wir beginnen mit dem ersten Teil:

$\tilde{A}_\varepsilon$ ist in $W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt, also gibt es eine Zahl $B > 0$ mit $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq B$. Wir haben

$$\sup |u| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} \leq CB\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}.$$

Damit ist $\tilde{A}_\varepsilon$ punktweise beschränkt. Nach Satz 2.4.6 ist $\tilde{A}_\varepsilon$ gleichgradig stetig und damit nach dem Satz von Ascoli-Arzelà Satz 2.6.1 kompakt.

Wir kommen zur zweiten Behauptung:

Sei $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt (o.B.d.A. $A \subset C_0^1(\Omega)$). Ebenfalls stellt es keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, anzunehmen, daß

$$u \in A \Rightarrow \|u\|^{\Omega}_{1,p} \leq 1.$$

Sei für festes $h > 0$

$$A_h = \{u_h \mid u \in A\}.$$

Dann ist $A_h \subset L^1(\Omega)$ relativ kompakt, denn

$$|u_h(x)| \leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|dz \leq h^{-n}(\sup \rho)\|u\|_{L^1(\Omega)}$$

und

$$|Du_h(x)| \leq h^{-1} \int_{z\leq 1} |D\rho(z)||u(x-hz)|dz \leq h^{-n-1}(\sup |D\rho|)\|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Dies impliziert, daß A_h beschränkt und gleichgradig stetig in $C(\overline{\Omega})$ ist. Daher ist A_h relativ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ und damit relativ kompakt in $L^1(\Omega)$.

Wir beweisen nun, daß A relativ kompakt ist. Dieser Beweis besteht aus drei Schritten:

(i) u_h ist gleichmäßig nahe an u für $u \in A$.

(ii) A ist total beschränkt.

(iii) Totale Beschränktheit impliziert relative Kompaktheit.

(i) Für $u \in A$ schätzen wir ab:

$$
\begin{aligned}
|u_h(x) - u(x)| &\leq \left| \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z) u(x - zh) dz - u(x) \right| \\
&= \left| \int\limits_{|z|\leq 1} (\rho(z) u(x - zh) - u(x) dz \right| \\
&\leq \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z) |u(x - zh) - u(x)| dz \\
&\leq \int\limits_{|z|\leq 1} \int\limits_0^{|z|h} \left| \partial_r u(x - r\frac{z}{|z|}) \right| dr dz.
\end{aligned}
$$

Insbesondere erhält man aus der Integration dieser Gleichung

$$
\int\limits_\Omega |u_h(x) - u(x)| dx \leq h \int\limits_\Omega |Du| dx \leq h.
$$

Nun ist u_h gleichmäßig (bezüglich A) nahe u in $L^1(\Omega)$ wegen

$$
\begin{aligned}
\|u(x) - u_h(x)\| &\leq \int\limits_{\|z\|\leq 1} \rho(z) |u(x) - u(x - zh)\| dz \\
&\leq \int\limits_{\|z\|\leq 1} \rho(z) \int\limits_0^{h\|z\|} |D_r u(x - r\frac{z}{\|z\|})| dz.
\end{aligned}
$$

Integration dieser Ungleichung liefert

$$
\int\limits_\Omega |u(x) - u_h(x)| dx \leq h \int\limits_\Omega |Du| dx \leq h.
$$

(ii) A ist total bescharänkt. Zunächst zur Definition der totalen Beschränktheit: eine Menge M in einem Banachraum X heißt total beschränkt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und eine endliche Menge x_i $i = 1, \ldots, N$ existiert, so daß $M \subset x_i + \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $h_0 > 0$, so daß für $h < h_0$

und $u \in A$ $\|u_h - u\|_{L^1(\Omega)} \le \varepsilon/2$. Außerdem sei h_0 so klein, daß jedes u_h, $h < h_0$ in $\cup_{x\in A} B_{\varepsilon/2}(x)$. Dann gibt es x_i $i = 1, \dots, N$ mit $A_h \subset \cup B_{\varepsilon/2}(x_i)$ $h < h_0$ fest. Dann überdecken die $B_\varepsilon(x_i)$ die Menge A. Also ist A total beschränkt.

(iii) Totale Beschränktheit ist gleichwertig zur relativen Kompaktheit. Aus der Kompaktheit folgt die totoale Beschränktheit unmittelbar. Die Umkehrung wird im Anhang gezeigt.

Nun folgt die relative Kompaktheit von A in $L^1(\Omega)$ aus der von A_h sofort.

Um auf $q > 1$ zu schließen, wenden wir die Interpolationsungleichung aus Lemma 2.6.5 an,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &\le \|u\|^\lambda_{L^1(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \quad \text{mit } \lambda + (1-\lambda)(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{q}. \\ &\le \|u\|^\lambda_{L^1(\Omega)} \|Du\|^{1-\lambda}_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Jede beschränkte Folge in $W^{1,p}_0(\Omega)$ enthält eine $L^1(\Omega)$–Cauchyfolge, diese ist damit auch $L^q(\Omega)$-Cauchyfolge.

□

2.7 Differenzenquotienten

Definition 2.7.1 *Für $h \neq 0$ ist*

$$\Delta^h_i u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

wobei e_i der i-te Standardeinheitsvektor ist, der i-te Differenzenquotient.

Lemma 2.7.2 *Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ gilt für alle $1 \le i \le n$*

$$\Delta^h_i u \in L^p(\Omega')$$

und es gilt

$$\|\Delta^h_i u\|_{L^p(\Omega')} \le \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis: Für $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ hat man

$$\Delta^h_i u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi.$$

Damit folgt

$$|\Delta^h_i u(x)|^p \le \frac{1}{h} \int_0^h |D_i u(\dots, x_i + \xi, \dots)|^p d\xi.$$

Integration dieser Ungleichung ergibt

$$\int_{\Omega'} |\Delta_i^h u(x)|^p dx \le \frac{1}{h} \int_0^h \int_{B_h(\Omega')} |D_i u|^p dx d\xi \le \int_{\Omega} |D_i u|^p dx.$$

Fortsetzung auf $W^{1,p}$–Funktionen durch Approximation. □

Für das nächste Lemma benötigen wir die schwache Topologie auf einem Banachraum X.

Definition 2.7.3 *(i) Die gröbste Topologie auf X, für die jedes Element $x^* \in X^*$ stetig ist, heißt schwache Topologie auf X.*

(ii) Die gröbste Topologie auf X^*, für die jedes Element $x^{**} \in J(X)$ stetig ist, heißt schwach Topologie auf X^*.*

Es gilt der folgende fundamentale Satz.

Satz 2.7.4 *(i) Die Einheitskugel in X^* ist in der schwach* Topologie folgenkompakt.*

(ii) Ist X reflexiv, so ist die Einheitskugel schwach folgenkompakt.

Beweis: Für einen vollständigen Beweis ziehe man ein Lehrbuch der Funktionalanalysis zu Rate. Wir zeigen einen wichtigen Spezialfall: ist X separabel und reflexiv, so enthält jede beschränkte Folge in X^* eine schwach*konvergente Teilfolge. Sei X separabel, und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X^*. Da X separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $S \subset X$. Sei x_n eine Abzählung dieser Menge. Dann ist mit $s_n = Jx_n$

$$\{s_n(y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$$

für jedes n eine beschränkte reelle Folge und besitzt damit eine konvergente Teilfolge. Durch Iteration konstruieren wir eine Teilfolge $\{y^n_{j_n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, so daß $s_m(y^n_{j_n(k)})$ für $m \le n$ und $k \to \infty$ konvergiert. Betrachte die Folge $y^n_{j_n(n)}$. Nach Konstruktion ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ $s_k(y^n_{j_n(n)})$ konvergent. Also hat man für die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$y^n_{j_n(n)}(x_m) = s_m(y^n_{j_n(n)}) \to \alpha_m \in \mathbb{R} \text{ für } n \to \infty.$$

Die Abbildung, die auf S definiert ist, und jedem $x_m \in S$ den Wert α_m zuordnet ist beschränkt. Da $S \subset X$ dicht liegt, definiert dies eine Abbildung $y : X \to \mathbb{R}$ die stetig und linear ist. Faßt man nun, im reflexiven Fall, X mittels der Isomorphie J als Dualraum von X^* auf, so folgt eine entsprechende Aussage für die schwache Konvergenz in X. □

Lemma 2.7.5 *Ist $u \in L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ und existiert eine Konstante K, so daß für alle $h > 0$ und jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > h$ gilt*

$$\Delta_i^h u \in L^p(\Omega'), \quad \|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K,$$

so existiert die schwache Ableitung $D_i u$ und es gilt

$$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K.$$

Beweis: Da beschränkte Mengen in $L^p(\Omega')$ schwach kompakt sind ($L^p(\Omega')$ ist reflexiv), gibt es eine Folge $h_m \to 0$ und ein $v \in L^p(\Omega)$, $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq K$, so daß für jedes $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int\limits_\Omega \varphi \Delta_i^{h_m} u dx \to \int\limits_\Omega \varphi v dx.$$

Für $h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial\Omega)$ folgt

$$\int\limits_\Omega \varphi \Delta_i^{h_m} u dx \to -\int\limits_\Omega u D_i \varphi dx.$$

Daraus folgt nun

$$\int\limits_\Omega \varphi v dx = -\int\limits_\Omega u D_i \varphi dx.$$

Also ist $v = D_i u$. □

2.8 Randwerte

Lemma 2.8.1 *Ist $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap C^{m-1}(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^m$, so gilt für $|\alpha| = 0, \ldots, m-1$*

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = 0$$

auf $\partial\Omega$.

Beweis: Wir betrachten den Fall $m = 1$, der Rest ist eine Induktion. Sei $x_0 \in \partial\Omega$, U eine Umgebung von x_0. Für $U \cap \partial\Omega$ gibt es eine Funktion h, so daß (o.B.d.A.)

$$x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

und

$$U \cap \Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_n > h(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

ist. Betrachte $F(x) = y$ gegeben durch

$$y_i = x_i, \; i = 1, \ldots, n-1, \tag{2.8.17}$$

$$y_n = x_n - h(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{2.8.18}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $u(x_0) = 0$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Betrachte einen Zylinder Z der Höhe h und einer Kreisscheibe um y_0 mit Radius R in $y_1, \dots, y_{n-1}$ als Boden. Definiere eine Funktion v durch $v(y) = u(F^{-1}(y))$. Dann folgt

$$|v(y)|^2 \leq \left(\int\limits_0^{y_n} \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right| dy_n \right)^2 \leq h \int\limits_0^{y_n} \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right|^2 dy_n.$$

Insbesondere hat man

$$\int\limits_Z |v|^2 dy \leq h^2 \int_Z \left| \frac{\partial v}{\partial y_n} \right|^2 dy.$$

Daraus folgt

$$\int\limits_{F^{-1}(Z)} |u|^2 dx \leq Ch^2 \int\limits_{F^{-1}(Z)} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx. \tag{2.8.19}$$

Ist nun $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, so existiert eine Folge $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$u_\nu \to u \text{ in } W^{m,p}(\Omega)$$

für $\nu \to \infty$. Da (2.8.19) für jedes u_ν gilt, hat man (2.8.19) auch für u.

Daraus folgt nun

$$\frac{1}{h} \int\limits_Z |v(y)|^2 dy \leq Ch \int\limits_{F^{-1}(Z)} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Da v stetig ist, folgt mit $h \to 0$, daß $v(y) = 0$ auf der Kreisscheibe mit Radius R ist, also $u(x_0) = 0$. Da x_0 beliebig in $\partial\Omega$ gewählt ist, folgt der Satz.

□

Korollar 2.8.2 *Ist $p > n$, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$.*

Beweis: Es folgt sofort, daß $u \in C(\overline{\Omega})$. Dies impliziert die Behauptung. □

Kapitel 3

Schwache Lösungen und Regularität

3.1 Operatoren in Divergenzform

Zur Erinnerung: ein elliptischer Operator zweiter Ordnung hat die Form

$$Lu = \sum_{i,j} a^{ij}(x) D_{ij} u + \sum_i b^i(x) D_i u + c(x) u.$$

Sind die Funktionen a^{ij} genügend glatt, so gilt

$$\sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u) = \sum_{i,j} (D_i a^{ij} D_j u + a^{ij} D_{ij} u)$$

und Lu hat die Form

$$Lu = \sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + \sum_i c^i D_i u + du.$$

Dabei sind b^i, c^i andere Funktionen als zuvor. Wir haben also gezeigt:

Lemma 3.1.1 *Ist L ein elliptischer Operator zweiter Ordnung mit genügend glatten Koeffizientenfunktionen a^{ij}, so kann der Operator in der Form*

$$Lu = \sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + \sum_i c^i D_i u + du.$$

geschrieben werden. Ebenso kann man bei C^1–Koeffizienten diese Form in die ursprüngliche zurückverwandeln.

Definition 3.1.2 *Die Form*

$$Lu = \sum_{i,j} D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + \sum_i c^i D_i u + du$$

heißt Divergenzform.

Definition 3.1.3 *Ist L ein Differentialoperator zweiter Ordnung, so nennt man*

$$L_H u = \sum_{i,j} a^{ij} D_i D_j u$$

den Hauptteil (oder auch Symbol) von L.

Wir haben also gesehen, daß bei ausreichender Glattheit der Koeffizienten ein Operator in Divergenzform geschrieben werden kann, ohne daß man den Hauptteil verändert.

3.2 Schwache Lösbarkeit des Dirichletproblems

In diesem Abschnitt sei Ω immer ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.2.1 *Es sei $\psi \in H^1(\Omega)$ und $f, g^1, \dots, g^n \in L^2(\Omega)$. L sei ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform. Wir sagen $u \in H^1(\Omega)$ ist eine schwache Lösung des Dirichlet–Problems*

$$\begin{aligned} Lu &= f + \sum_i D_i g^i \text{ in } \Omega && (3.2.1)\\ u_{|\partial\Omega} &= \psi, && (3.2.2)\end{aligned}$$

falls für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \left(-(\sum_{i,j} a^{ij} D_j u + \sum b^i u) D_i \varphi + (\sum_i c^i D_i u + du)\varphi \right) dx = \int_\Omega (-g^i D_i \varphi + f\varphi) dx$$

und

$$u - \psi \in H_0^1(\Omega)$$

ist.

Lemma 3.2.2 *Das Dirichlet–Problem mit $f, g^i \in L^2(\Omega)$ und $\psi \in H^1(\Omega)$ kann genau dann schwach gelöst werden, wenn es für $f, g^i \in L^2(\Omega)$ und $\psi = 0$ gelöst werden kann.*

Beweis: Wir betrachten die linke Seite und schreiben $w = u - \psi$ oder auch $u = w + \psi$. Dies ergibt

$$\int_\Omega \left(-(\sum_{i,j} a^{ij} D_j (w+\psi) + \sum_i \big(b^i (w+\psi)) D_i \varphi + c^i D_i (w+\psi)\big) + d(w+\psi))\varphi \right) dx.$$

Dies führt auf eine Differentialgleichung gleichen Typs mit der neuen rechten Seite

$$\int_\Omega (f\varphi - \sum_i g^i D_i \varphi) dx + \int_\Omega \sum_i \tau^i D_i \varphi dx + \int_\Omega \sigma \varphi dx.$$

Wir haben damit eine neue rechte Seite des Dirichlet–Problems konstruiert, welches $u + \psi$ als schwache Lösung besitzt. □

Um das Dirichlet–Problem schwach lösen zu können, brauchen wir den Satz von Lax[1]–Milgram[2]. Im folgenden bezeichnet X^* wieder den Dualraum von X, d.h. den Raum aller stetigen Linearformen $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition 3.2.3 *Eine stetige Bilinearform $B : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt koerziv, falls es eine positive Konstante $\mu > 0$ gibt, so daß $B(x, x) \geq \mu \|x\|^2$ ist.*

Satz 3.2.4 (Lax-Milgram) *Es sei X ein Hilbertraum, $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Ist B beschränkt und koerziv, so gibt es zu jedem beschränkten linearen Funktional $x^* \in X^*$ ein $y \in X$ mit $B(x, y) = x^*(x)$.*

Im Beweis brauchen wir den Riesz'schen[3] Darstellungssatz. Wir erinnern zunächst kurz daran.

Satz 3.2.5 *Für jedes stetige lineare Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum X gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $x_0 \in X$ mit*

$$x^*(x) = \langle x, x_0 \rangle_X.$$

Beweis: Ist $x^* = 0$, so ist nichts zu zeigen, im anderen Fall gilt mit $X_0 = \ker x^*$, daß $X_0 \neq X$ (klar!) ist und daß X_0 ein abgeschlossener Unterraum von X ist. Dann gibt es ein Element $\tilde{x} \in X$ mit

$$\langle x, \tilde{x} \rangle_X = 0, \ \forall x \in X_0.$$

$\tilde{x}$ ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig. Andernfalls gibt es x_1, x_2 linear unabhängig, so daß $x_i \perp X_0$. Dann ist $x^*(x_1) = \alpha x^*(x_2)$ und $x_1 - \alpha x_2 \in X_0$. Dies ist ein Widerspruch, denn $x_1 - \alpha x_2 \perp X_0$. □

Beweis des Satzes 3.2.4: Setze $\langle x, y \rangle_B = B(x, y)$. Dies ist ein Skalarprodukt auf X (nicht notwendig äquivalent zum Skalarprodukt ($\langle ., . \rangle_X$). Aus dem Satz von Riesz folgt die Existenz einer Abbildung $T : X \to X$ mit

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle_X,$$

[1] Peter Lax (1.5.1926–) studierte und lehrt am Courant Institute in New York. Er arbeitet vor allem über partielle Differentialgleichungen. Seine wichtigsten Arbeiten behandeln hyperbolische Erhaltungssätze.

[2] Milgram

[3] Frédéric Riesz (22.1.1880-28.2.1956) übertrug die Begriffe, die Fredholm und Hilbert im Kontext von Integralgleichungen entwickelt hatten, auf allgemeinere Räume und begründete damit die moderne, abstrakte Funktionalanalysis. Er zeigte im Jahr 1907 die Vollständigkeit des Raumes L^2. Von ihm stammt die Spektraltheorie für beschränkte selbstadjungierte Operatoren (1929). Er zeigte einen Darstellungssatz für lineare Funktionale auf dem Raum der stetigen Funktionen. Schon 1910 hatte er die Dualität der Räume L^p und L^q mit $p^{-1}+q^{-1} = 1$ erkannt. Auf ihn gehen darüberhinaus Beiträge zur Ergodentheorie, Topologie und Funktionentheorie zurück.

denn $B(\cdot, y)$ ist eine lineare Abbildung $X \to \mathbb{R}$ und als solche durch ein Skalarprodukt darstellbar. T ist offenkundig linear und stetig, denn $|B(x,y)| \leq K\|x\|\|y\|$ und damit ist wegen

$$K\|x\|\|y\| \geq |B(x,y)| = |\langle x, Ty\rangle_X|$$

$\|Ty\| \leq K\|y\|$. Aus

$$\mu\|x\|^2 \leq |B(x,x)| = |\langle x, Tx\rangle_X| \leq \|x\|\|Tx\|.$$

erhalten wir $\|Ty\| \geq \mu\|y\|$. Also ist T injektiv, die Inverse existiert und ist beschränkt. Insbesondere ist das Bild von T abgeschlossen. Angenommen $R(T) \neq X$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $B(x,y) = \langle x, Ty\rangle_X = 0$ für alle $y \in X$. Insbesondere ist $B(x,x) = 0$. Also folgt $x = 0$. Deshalb ist T^{-1} ein beschränkter linearer Operator auf X. Der Satz folgt nun mit $y = T^{-1}\tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ das dem Funktional mit dem Riesz'schen Satz zugeordnete Element in X ist. □

Um den soeben angegebenen Satz anzuwenden, benötigen wir eine Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$. Wir setzen

$$B_L(u,\varphi) = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ij} D_j u + \sum_i b^i u\right) D_i\varphi dx - \int_\Omega \left(\sum_i c^i D_i u + du\right)\varphi dx \tag{3.2.3}$$

für $u \in H_0^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Durch Fortsetzen erhalten wir eine Form auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ setzen wir

$$F(v) = \int\limits_\Omega (-fv + g^i D_i v) dx. \tag{3.2.4}$$

Damit ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von

$$Lu = F \text{ im schwachen Sinn} \iff \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \text{ gilt } B_L(u,v) = F(v).$$

F ist eine Linearform. Nach dem Satz von Lax–Milgram hat diese Gleichung immer dann eine Lösung, falls B_L beschränkt und koerziv und F beschränkt ist. Wir haben:

Lemma 3.2.6 *(i) F ist eine stetige Linearform auf $H_0^1(\Omega)$.*

(ii) Ist L stark elliptisch und gibt es Konstanten M, q mit

$$\sum_{i,j} |a^{ij}|^2 \leq M, \lambda^{-2}\left(\sum_i \left(|b^i|^2 + |c^i|^2\right)\right) + \lambda^{-1}|d| \leq q^2, \tag{3.2.5}$$

so ist B_L beschränkt auf $H_0^1(\Omega)$ und es gilt

$$B_L(u,u) \geq \frac{\lambda}{2}\int\limits_\Omega |Du|^2 dx - 2\lambda q^2 \int\limits_\Omega u^2 dx, \tag{3.2.6}$$

wobei $|Du| = \left(\sum_i |D_i u|^2\right)^{1/2}$.

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \sum_i \|g^i\|_{L^2(\Omega)}\|v\|^{\Omega}_{1,2} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|^{\Omega}_{1,2} \\ &\leq C\|v\|^{\Omega}_{1,2}. \end{aligned}$$

Dabei hängt C nur von der rechten Seite ab.

(ii) 1.) Stetigkeit von B_L:

$$\begin{aligned} |B_L(u,v)| &\leq \int_\Omega |\sum_{i,j} a^{ij}D_ju + \sum_i b^iu||D_iv|dx + \int_\Omega |\sum_i c^iD_iu + du||v|dx \\ &\leq \int_\Omega \sum_{ij} |a^{ij}D_juD_iv| + \sum_i |b^iuD_iv| + \sum_i |c^iD_iuv| + |duv|dx \\ &\leq C\|u\|^{\Omega}_{1,2}\|v\|^{\Omega}_{1,2}. \end{aligned}$$

2.) „Koerzivität“ von B_L:

$$\begin{aligned} B_L(u,u) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ij}D_juD_iu + \sum_i (b^i - c^i)(D_iu)u - du^2\right) dx \\ &\geq \int_\Omega (\lambda|Du|^2 - \sum_i (|b^i - c^i|)|(D_iu)u| - du^2)dx \\ &\geq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |Du|^2dx - \lambda q^2 \int_\Omega u^2dx, \end{aligned}$$

denn mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgert man

$$\begin{aligned} du^2 + \sum |b^i - c^i|uD_iu &\leq \sqrt{\sum |b^i - c^i|^2}\,|u||Du| + |d|u^2 \\ &\leq \sqrt{\sum (|b^i| + |c^i|)^2}|u||Du| + du^2 \\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{\sum (|b^i|^2 + |c^i|^2)}\,|u||Du| + |d|u^2 \\ &\leq \sqrt{2}\lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\sum (|b^i|^2 + |c^i|^2)}\,(\frac{\varepsilon^{-1}}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{2}|Du|^2) + |d|u^2 \\ &\leq \sqrt{2}\lambda\sqrt{q^2 - \frac{|d|}{\lambda}}(\frac{\varepsilon^{-1}}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{2}|Du|^2) + |d|u^2 \\ &\leq \sqrt{2}\lambda q\frac{\varepsilon}{2}|Du|^2 + \sqrt{2}\lambda q\frac{\varepsilon^{-1}}{2}u^2 + |d|u^2 \\ &\leq \frac{\lambda}{2}|Du|^2 + (\lambda q^2 + |d|)u^2 \quad (\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\lambda}{2}|Du|^2 + (\lambda q^2 + \lambda q^2)u^2 \\ &\leq \frac{\lambda}{2}|Du|^2 + 2\lambda q^2 u^2. \end{aligned}$$

□

Definition 3.2.7 *Für $\sigma \in \mathbb{R}$ setzen wir $L_\sigma u = Lu - \sigma u$.*

Korollar 3.2.8 *Genügen die Koeffizienten des stark elliptischen Operators L den Voraussetzungen (3.2.5), so ist die dem Operator L_σ zugeordnete Bilinearform B_{L_σ} für alle genügend großen $\sigma \in \mathbb{R}$ koerziv. Insbesondere ist das Dirichlet–Problem*

$$\begin{aligned} L_\sigma u &= f + D_i g^i \\ u &= \psi \end{aligned}$$

schwach lösbar.

Um eine allgemeine Lösungstheorie zu erhalten, betrachten wir die Gleichung

$$L_{\sigma_0} u + \sigma_0 \mathbb{I} u = F,\ \ F \in (H_0^1(\Omega))^*,\ \ \mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$$

für ein σ_0 so groß, so daß $B_{L_{\sigma_0}}$ beschränkt und koerziv ist. $\mathbb{I}$ sei die Abbildung $\mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$, die durch das L^2–Skalarprodukt definiert ist (siehe unten). Dann existiert nach dem Satz von Lax-Milgram

$$L_{\sigma_0}^{-1} : (H_0^1(\Omega))^* \to H_0^1(\Omega).$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I} u = L_{\sigma_0}^{-1} F.$$

Lemma 3.2.9 *Die Abbildung*

$$\mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^* : u \mapsto \langle u, . \rangle_{L^2(\Omega)}$$

ist kompakt.

Beweis: Man hat den sogenannten Gelfand[4]Dreier

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))^* \subset (H_0^1(\Omega))^*,$$

der einem erlaubt, $\mathbb{I}$ als Hintereinanderausführung

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \circ J \circ \mathbb{I}_2,$$

[4]Israil Moisejewitsch Gelfand (2.9.1913–) arbeitet vornehmlich über Funktionalanalysis. Er studierte Algebren von Operatoren und darauf aufbauend nichtkommutative Banachalgebren und nichtendlichdimensionale Darstellungen von Lie-Gruppen. Er arbeitet auch auf dem Gebiet der Differentialgleichungen, vor allem Randwertprobleme und Hamilton'sche Systeme. Er ist auch an Anwendungen außerhalb der Mathematik interessiert.

zu schreiben, wobei J durch den Riesz'schen Darstellungssatz gegeben ist und

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 &: H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \\ \mathbb{I}_1 &: (L^2(\Omega))^* \to (H_0^1(\Omega))^* \end{aligned}$$

die jeweiligen Einbettungen sind, mit $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2^*$. Da $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ ist, und letzterer kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist, ist $\mathbb{I}_2$ eine kompakte Einbettung. Die Operatoren $\mathbb{I}_1, J$ sind stetig, also ist $\mathbb{I}_1 \circ J \circ \mathbb{I}_2$ kompakt. □

Definition 3.2.10 *Es sei X ein Banachraum. Ein beschränkter linearer Operator $T : X \to X$ heißt Fredholm-Operator*[5]*, falls* $\dim \ker T < \infty$*, das Bild von T abgeschlossen ist und einen endlich dimensionalen Komplementärraum besitzt. Für dessen Dimension schreibt man oft* $\operatorname{codim} R(T)$*. Die Differenz* $\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \operatorname{codim} R(T)$ *heißt* Index *von T.*

Beispiel 3.2.11 *Matrizen sind immer Fredholm-Operatoren, sind sie quadratisch, so ist der Index* 0*.*

Bemerkung 3.2.12 *Kompakte Operatoren spielen in der Theorie der Fredholm-Operatoren eine spezielle Rolle. Es gilt allgemein: ist $L : X \to X$ ein Fredholm-Operator und ist $T : X \to X$ kompakt, so ist* $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(L + T)$

Von der Bemerkung 3.2.12 benötigen wir nur einen Spezialfall, nämlich den der kompakten Störung der Identität.

Satz 3.2.13 *Ist $T : X \to X$ kompakt, so ist* $\operatorname{ind}(\mathbb{1} + T) = 0$.

Beweis: siehe Lehrbücher der Funktionalanalysis. □
Damit hat man sofort:

Lemma 3.2.14 *Der Operator*

$$\mathbb{1} + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}$$

ist ein Fredholm–Operator vom Index 0. Insbesondere gilt

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I} u = F \quad \textit{ist immer lösbar} \iff \ker(\mathbb{1} + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}) \textit{ ist trivial.}$$

Für den Hauptsatz dieses Abschnittes, der das allgemeine Lösungsverhalten charakterisiert, benötigen wir den adjungierten Operator L_σ^*.

Definition 3.2.15 *Der zu L formal adjungierte Operator ist definiert durch*

$$L^f u = \sum_i (D_i(\sum_j a^{ji} D_j u - c^i u) - b^i D_i u) + du.$$

[5]Ivar Fredholm (7.4.1866–17.8.1927) nutzte Erkenntnisse über Integralgleichungen für die Theorie partieller Differentialgleichungen. Insbesondere erkannte er die strukturelle Ähnlichkeit der Lösungstheorie gewisser partieller Differentialgleichungen mit der endlich dimensionaler linearer Gleichungen. Er ist der Begründer der nach ihm benannten Alternative.

Formal erhält man für Funktionen $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ das L^2–innere Produkt

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^f v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Es gilt jedoch mehr als nur formale Adjungiertheit:

Satz 3.2.16

$$B_L(u,v) = B_{L^f}(v,u) \; \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Also ist L^f in $H_0^1(\Omega)$ zu L adjungiert.

Beweis: $B_L(u,v) = B_{L^f}(v,u)$ für $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ist offensichtlich. Ferner gilt für $u \in D(L) = D(L^f)$

$$\langle L_f v, u\rangle_{L^2(\Omega)} = B_{L^f}(v,u) = B_L(u,v) = \langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

□

Lemma 3.2.17 *Sei*

$$T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}.$$

Dann ist

$$T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma)(L_{\sigma_0}^f)^{-1} \mathbb{I}.$$

Beweis: Es reicht den Operator $L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ zu betrachten. Der adjungierte Operator ist eine Abbildung $H_0^1(\Omega)^* \to H_0^1(\Omega)^*$ und wir müssen zeigen, daß dieser für $u \in H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)^*$ durch $(L_{\sigma_0}^f)^{-1}\mathbb{I}$ gegeben ist. Dann ist

$$(L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I})^* : H_0^1(\Omega)^* \to H_0^1(\Omega)^*$$

und ist gegeben durch

$$\mathbb{I}^*(L_{\sigma_0}^{-1})^* : H_0^1(\Omega)^* \to H_0^1(\Omega)^{**} \to H_0^1(\Omega)^*$$

mit

$$\mathbb{I}^*(L_{\sigma_0}^{-1})^*(v^*)(u) = (L_{\sigma_0}^{-1})^*(v^*)(\mathbb{I}u) = v^*(L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u)$$

mit $v^* \in H_0^1(\Omega)^*$ und $u \in H_0^1(\Omega)$. Für $v^* = \mathbb{I}v$ ergibt sich dies zu

$$\langle v, L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Andrerseits ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle (L_{\sigma_0}^f)^{-1}\mathbb{I}u, v\rangle_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{I}v\big((L_{\sigma_0})^{-1})\mathbb{I}u\big) \\
&= \mathbb{I}v\big(((L_{\sigma_0}^f)^{-1})^*\mathbb{I}u\big) \\
&= \mathbb{I}v\big(((L_{\sigma_0}^f)^*)^{-1}\mathbb{I}u\big) \\
&= \mathbb{I}v(L_{\sigma_0}^{-1}(\mathbb{I}u)) \\
&= \langle v, L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}u\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 3.2.18 *Ist L stark elliptisch und genügt der Abschätzung (3.2.5), dann existiert eine abzählbare, diskrete Teilmenge $\Sigma \subset \mathbb{R}$, so daß für $\sigma \notin \Sigma$ das Dirichlet–Problem*

$$L_\sigma u = f + \sum_i D_i g^i, \quad L_\sigma^f u = f + \sum_i D_i g^i$$

$$u = \psi \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

für beliebige $f, g^i \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$ eindeutig lösbar ist. Ist hingegen $\sigma \in \Sigma$, so bilden die Lösungsmengen der homogenen Randwertprobleme

$$L_\sigma u = 0, \quad L_\sigma^f u = 0,$$

$$u = 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

positiv und endlich–dimensionale Unterräume von $H_0^1(\Omega)$. Das Problem

$$L_\sigma u = f + \sum_i D_i g^i \quad \textit{in } \Omega$$

$$u = \psi \ \textit{auf } \partial\Omega$$

ist genau dann lösbar, falls

$$\int_\Omega \left\{ \left(f - \sum_i c^i D_i \psi - d\psi + \sigma\psi \right) v - \left(\sum_i g^i - \sum_{i,j} a^{ij} D_j \psi - \sum_i b^i \psi \right) D_i v \right\} dx = 0$$

für alle v mit $L_\sigma^f v = 0$, $v = 0$ auf $\partial\Omega$.

Beweis: Folgt aus dem zuvor Gesagten. □

Lemma 3.2.19 *$G_\sigma = L_\sigma^{-1}$, $\sigma \notin \Sigma$, ist beschränkt.*

Beweis:

$$\begin{aligned} L_\sigma^{-1} &= \left(L_{\sigma_0} - (\sigma - \sigma_0)\mathbb{I}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbb{1} + (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} \mathbb{I}\right)^{-1} L_{\sigma_0}^{-1}. \end{aligned}$$

Da $(\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}$ kompakt ist, ist $\mathbb{1} + (\sigma - \sigma_0) L_{\sigma_0}^{-1}\mathbb{I}$ für $\sigma \notin \Sigma$ beschränkt invertierbar. □

Daraus folgt eine sogenannte à–priori–Abschätzung

Korollar 3.2.20 *Ist $u \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von $L_\sigma u = f + \sum_i D_i g^i$, $u = \psi$ auf $\partial\Omega$, $\sigma \notin \Sigma$, so existiert eine Konstante $C = C(L, \sigma, \Omega)$ mit*

$$\|u\|_{1,2}^\Omega \le C \left(\left(\int_\Omega f^2 + \sum_i \int_\Omega |D_i g^i|^2 \right)^{1/2} + \|\psi\|_{1,2}^\Omega \right).$$

3.3 Das schwache Maximumprinzip und eindeutige Lösbarkeit

Wir hatten die Eindeutigkeit einer eventuell existierenden Lösung für das klassische Dirichlet–Problem aus dem Maximumprinzip gefolgert. Das hilft hier natürlich nicht weiter. Wir müssen den entsprechenden Satz in einer Situation für die schwache Formulierung des Problems beweisen. Dabei treten natürliche Probleme auf, etwa was bedeutet $u \leq 0$ für $u \in H^1(\Omega)$. Entsprechende Probleme gibt es mehrere.

Definition 3.3.1 *(i) Es sei $u \in H^1(\Omega)$. Wir sagen $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$, falls $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ ist. Dabei ist u^+ definiert durch*

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}.$$

(ii) $u \geq 0$ auf $\partial\Omega \Longleftrightarrow -u \leq 0$ auf $\partial\Omega$,

(iii) $u \leq v$ auf $\partial\Omega \Longleftrightarrow u - v \leq 0$.

Lemma 3.3.2 *Ist u nahe dem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1, stetig, so folgt aus $u \leq 0$, daß diese Bedingung auch punktweise nahe x_0 erfüllt ist.*

Beweis: Annahme: $u(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung, auf der gilt $u^+ > 0$. Es sei $u_\nu \in C_0^1(\Omega)$ eine Folge, die in $H^1(\Omega)$ gegen u^+ konvergiert. Dann gibt es ein ν_0, so daß für alle $\nu > \nu_0$ gilt $u_\nu(x_0) > 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Für das klassische Maximumprinzip benötigt man eine Vorzeichenbedingung an den Koeffizienten d. Für das schwache Maximumprinzip wird diese Bedingung durch eine andere Ungleichung ersetzt.

Satz 3.3.3 *Sei L stark elliptisch mit*

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)dx \leq 0 \tag{3.3.7}$$

für alle $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$, und wir nehmen an, daß die Koeffizienten für Zahlen $M, q \in \mathbb{R}$ punktweise den Abschätzungen

$$\sum |a^{ij}|^2 \leq M \text{ und } \lambda^{-2} \sum(|b^i|^2 + |c^i|^2) + \lambda^{-1}|d| \leq q^2 \tag{3.3.8}$$

genügen. Dann gilt für $u \in H^1(\Omega)$ mit $Lu \geq 0$ (≤ 0) in Ω

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_\Omega u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Beweis: Für $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $uv \in H_0^1(\Omega)$ und $D_i(uv) = vD_iu + uD_iv$. Es gilt

$$B(u,v) \le 0 \iff \int\limits_\Omega \left(a^{ij}D_juD_iv - (b^i + c^i)vD_iu\right) dx \le \int\limits_\Omega duv - b^iD_i(uv)dx \le 0,$$

für alle $v \ge 0$ mit $uv \ge 0$. Daraus folgt dann

$$\int\limits_\Omega a^{ij}D_juD_ivdx \le 2\lambda q \int\limits_\Omega v|Du|dx$$

für alle $v \ge 0$ mit $uv \ge 0$. Im Spezialfall $b^i + c^i = 0$ nehme man $v = \max\{u-l, 0\}$ mit $l = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$ und schließe sofort das Resultat.

Im allgemeinen gilt: sei

$$l \le k < \sup_\Omega u, \;\; v = (u-k)^+,$$

so ist $v \in H_0^1(\Omega)$. Nebenbei sei bemerkt, daß im Falle der Nichtexistenz eines solchen k, der Satz direkt folgt. Damit ist

$$Dv = \begin{cases} Du, & u > k \\ 0, & u \le k \end{cases}.$$

Also hat man

$$\lambda \int\limits_\Omega |Dv|^2 dx \le \int\limits_\Omega a^{ij}D_jvD_ivdx \le 2\lambda q \int\limits_\Gamma v|Dv|dx$$

mit $\Gamma = \operatorname{supp} Dv \subset \operatorname{supp} v$. Also hat man

$$\int\limits_\Omega |Dv|^2 dx \le 2q \int\limits_\Gamma v|Dv|dx \le 2q\|v\|_{L^2(\Gamma)}\|Dv\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\|Dv\|_{L^2(\Omega)} \le 2q\|v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Im weiteren sei $n \ge 3$ (die andren Fälle müssen getrennt behandelt werden).

$$\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \le C\|v\|_{L^2(\Gamma)} \le C|\operatorname{supp} Dv|^{\frac{1}{n}}\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}.$$

Also ist

$$\operatorname{supp}|Dv| \ge C^{-n}.$$

Also nimmt u sein Maximum auf einer Menge vom positiven Maß an und es gilt $Du = Dv$ auf der gleichen Menge. Dies ist ein Widerspruch. □

3.4 Differenzierbarkeit schwacher Lösungen

Satz 3.4.1 *Es sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung $Lu = f$ in Ω, wobei*

(i) L stark elliptisch ist,

(ii) a^{ij}, b^i gleichmäßig Lipschitz stetig sind,

(iii) $c^i, d \in L^\infty(\Omega)$ sind,

(iv) $f \in L^2(\Omega)$ ist.

Dann gilt

(i) für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ ist $u \in H^2(\Omega')$ und

(ii) $\|u\|_{2,2}^{\Omega'} \leq C \left(\|u\|_{1,2}^{\Omega} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$

für eine Konstante $C = C(n, \lambda, K, d')$ mit

$$K = \max\{\|a^{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}, \|b^i\|_{C^{0,1}(\Omega)}, \|c^i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|d\|_{L^\infty(\Omega)}\}$$

und $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Außerdem erfüllt u die Gleichung punktweise f.ü..

Beweis: Da u schwache Lösung ist, folgt für $v \in C_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega a^{ij} D_j u D_i v g x = \int\limits_\Omega g v dx, \tag{3.4.9}$$

wobei $g \in L^2(\Omega)$ durch

$$g = (b^i + c^i) D_i u + (D_i b^i + d) u - f$$

gegeben ist. Sei $2h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$. Dann ist für $1 \leq k \leq n$ $\Delta_k^{-h} v \in C_0^1(\Omega)$. In der Gleichung 3.4.9 ersetzen wir v durch $\Delta_k^{-h} v$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega g \Delta_k^{-h} v dx &= \int\limits_\Omega a^{ij} D_j u D_i (\Delta_k^{-h} v) dx \\
&= \int\limits_\Omega a^{ij} D_j u \Delta_k^{-h} D_i v dx \\
&= \int\limits_\Omega \Delta_k^h (a^{ij} D_j u) D_i v dx.
\end{aligned}$$

Wir berechnen den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\Delta_k^h (a^{ij} D_j u)(x) &= \frac{1}{h} \left(a^{ij}(x + h e_k) D_j u(x + h e_k) - a^{ij}(x) D_j u(x) \right) \\
&= \frac{1}{h} \big(a^{ij}(x + h e_k) D_j u(x + h e_k) - a^{ij}(x + h e_k) D_j u(x) \\
&\quad + a^{ij}(x + h e_k) D_j u(x) - a^{ij}(x) D_j u(x) \big) \\
&= a^{ij}(x + h e_k) \Delta_k^h D_j u(x) + \left(\Delta_k^h a^{ij}(x) \right) D_j u(x)
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x + h e_k) D_j \Delta_k^h u D_i v dx = \int\limits_\Omega -G D_i v - g \Delta_k^{-h} v dx$$

mit $G = (G_1, \ldots G_n)$, $G_j = (\Delta_k^h a^{ij}) D_j u$. Damit schätzen wir ab (nach Lemma 2.7.5)

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega a^{ij}(x + h e_k) D_j \Delta_k^h u D_i v dx &\leq \left(\|G\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(C(n) K \|u\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fürs weitere sei $\eta \in C_0^1(\Omega)$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ und $v = \eta^2 \Delta_k^h u \in C_0^1(\Omega)$. Dann folgt aus $a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$, $(D = (D_1, \ldots, D_n))$,

$$\lambda \int\limits_\Omega |\eta D \Delta_k^h u|^2 dx \leq \int\limits_\Omega \eta^2 a^{ij}(x + h e_k) \Delta_k^h D_i u \Delta_k^h D_j u dx$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_\Omega a^{ij}(x+he_k)D_j\Delta_k^h u(D_i v - 2\Delta_k^h u\eta D_i\eta)dx \\
&\le \left(C(n)K\|u\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\|\eta D\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\Delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\quad + C(n)K\|\eta D\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Setze $a = \|\eta D\Delta_k^h u\|$, $A = C(n)K$, $b = \|u\|_{H^1(\Omega)}$, $c = \|f\|_{L^2(\Omega)}$, $d = \|\Delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}$. Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
\lambda a^2 &\le (Ab+c)(a+2d) + Aad \\
&\le (Ab+c)a + (Ab+d)2d * Ada \\
&\le \varepsilon a^2 + (Ab+c)^2\varepsilon^{-1}(Ab+c)2d + \frac{(Ad)^2}{\varepsilon} + a^2\varepsilon
\end{aligned}
$$

und damit

$$
(\lambda - 2\varepsilon)a^2 \le (Ab+c)^2\varepsilon^{-1}(Ab+c)2d + \frac{(Ad)^2}{\varepsilon}
$$

und weiter

$$
a^2 \le \frac{1}{\varepsilon(\lambda-2\varepsilon)\left((Ab+c)^2 + 2d(Ab+c) + A^2d^2\right)}.
$$

Dabei haben wir o.B.d.A. angenommen, daß $\varepsilon < 1$. Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten erhält man

$$
a \le C(A(b+d)+c).
$$

Rückeinsetzen ergibt

$$
\begin{aligned}
\|\eta\Delta_k^h Du\|_{L^2(\Omega)} &\le C\left(\|u\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_k^h u D\eta\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\le C\left(1 + \sup_\Omega |D\eta|\right)\left(\|u\|_{1,2}^\Omega + \|f\|_{L^2(\Omega)})\right)
\end{aligned}
$$

mit $C = C(n,\lambda,K)$. Wir wählen speziell $\eta = 1$ auf Ω' und $\sup\|D\eta\| \le \frac{2}{d'}$ mit $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Daraus folgt dann

(i) $Du \in H^1(\Omega')$ für alle Kompakta in Ω und daher

(ii) $u \in H^2(\Omega')$ (mit einer entsprechenden Abschätzung) und

(iii) $Lu \in L^2_{loc}(\Omega)$ mit $Lu = f$ punktweise fast überall.

□

Satz 3.4.2 *Es sei $L = \sum(a^{ij}D_iD_j + b^iD_i + c)$ stark elliptisch mit Koeffizienten $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $c \le 0$. Dann gibt es für $f \in L^2(\Omega)$ und $\varphi \in H^1(\Omega)$ eine Funktion $u \in H^1(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$ mit $Lu = f$ in Ω und $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$*
.

Beweis: Folgt aus dem soeben gezeigten. □

Satz 3.4.3 *Gegeben sei die Gleichung $Lu = f$, L stark elliptisch mit $a^{ij}, b^i \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$, $c^i, d \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$, $f \in H^k(\Omega)$ für $k \geq 1$.*

Dann gilt für eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$, daß für jedes Kompaktum $\Omega' \subset\subset \Omega$ $u \in H^{k+2}(\Omega')$ ist und es gilt eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{k+2,2}^{\Omega'} \leq C\left(\|u\|_{1,2}^{\Omega} + \|f\|_{k,2}^{\Omega}\right)$$

mit $C = C(n, \lambda, K, d', k)$ wobei

$$K = \max\left\{\|a^{ij}\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|b^i\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|c^i\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}, \|d\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}\right\}.$$

Beweis: Induktion über k! □

Satz 3.4.4 *Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des stark elliptischen Problems $Lu = f$ mit $a^{ij}, b^i, c^i, d, f \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis: Folgt sofort aus den Sobolev'schen Einbettungssätzen. □

3.5 Globale Regularität

Bisher hatten wir Glattheitsresultate in $H^2_{loc}(\Omega)$ erhalten. Unter entsprechenden Regularitätsannahmen an den Rand $\partial\Omega$ wollen wir globale Regularität, d.h. $u \in H^2(\Omega)$ nachweisen.

Satz 3.5.1 *Es sei der Operator L stark elliptisch mit gleichmäßig Lipschitz stetigen Koeffizienten a^{ij}, b^i und wesentlich beschränkten Koeffizienten c^i, d. Ferner sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von*

$$Lu = f, f \in L^2(\Omega).$$

Zusätzlich sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 und es existieren $\varphi \in H^2(\Omega)$, so daß $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$ ist. Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{2,2}^{\Omega} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{2,2}^{\Omega}\right) \tag{3.5.10}$$

mit $C = C(n, \lambda, K, \partial\Omega)$.

Beweis: Zeigen wir (3.5.10) für $w = u - \varphi$, so erhalten wir

$$\|w\|_{2,2}^{\Omega} \leq C\left(\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

also

$$\|u - \varphi\|_{2,2}^{\Omega} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

und damit

$$\|u\|_{2,2}^{\Omega} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{2,2}^{\Omega}\right).$$

Es reicht also (3.5.10) für $w = u - \varphi$ zu beweisen. Zunächst folgt aus Lemma 3.4.1, daß $u \in H_0^1(\Omega)$ durch $\|u\|_{1,2}^{\Omega} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$ abgeschätzt werden kann. Da $\partial\Omega \in C^2$, existiert zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel $B_{r_0}(x_0)$ und eine Funktion

$$\psi : B_{r_0}(x_0) \to D_0 \subset \mathbb{R}^n$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(B_{r_0}(x_0) \cap \Omega) &\subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \\ \psi(B_{r_0}(x_0) \cap \partial\Omega) &\subset \partial\mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

und

$$\psi \in C^2(B_{r_0}(x_0)), \ \psi^{-1} \in C^2(D_0).$$

Sei $R_0 < r_0$, so daß $B_{R_0}(x_0) \subset\subset B_{r_0}(x_0)$. Setze $B^+ = B_{R_0}(x_0) \cap \Omega$, $D' = \psi(B_{R_0}(x_0))$ und $D^+ = \psi(B^+)$. Unter der Abbildung ψ wird die Gleichung $Lu = f$ in B^+ auf eine Gleichung gleichen Typs in D^+ transformiert. Beachte mit $v(y) = u(\psi^{-1}(y))$ erhält man $D_i v = \sum_j D_j u \frac{\partial \psi_j^{-1}}{\partial y_i}$ und daher $D_{ik} v = \sum_{j,l} D_{jl} u \frac{\partial \psi_j^{-1}}{\partial y_i} \frac{\partial \psi_l^{-1}}{\partial y_j}$.

Weiter gilt

$$\langle B^T A T \xi, \xi \rangle = \langle AB\xi, B\xi \rangle \geq \lambda \|B\xi\|^2 \geq \lambda \underline{B} \|\xi\|^2,$$

mit $\underline{B} = \inf\{|Bx\|, \|x\| = 1\}$. Weiterhin ist mit $B = D\psi(x)$ und $A = (a^{ij})$ die Matrix $B^T AB$ durch

$$\hat{a}^{ij} = (B^T AB)^{ij} = \sum_{l,k} (B^T)^{il} a^{lk} B^{kj} = \sum_{l,k} a^{lk} b^{li} b^{kj}, \quad B = (b^{ij})_{i,j=1,\dots n}.$$

Der transformierte Operator hat nun die Form

$$L_H^{\psi} v(y) = \sum_{ij} \hat{a}^{ij}(y) D_{ij} v(y).$$

Durch Differenzieren der Gleichung $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$ erhält man

$$D\psi^{-1}(\psi(x)) D\psi(x) = \mathbb{1}.$$

Die Konstanten K, λ der transformierten Gleichung erhält man aus K, λ und den Ableitungen von ψ. Da $u \in H_0^1(\Omega)$ ist $v = u \circ \psi^{-1} \in H^1(D^+)$. Für alle $\eta \in C_0^1(D')$ gilt $\eta v \in H_0^1(D^+)$. Wir nehmen also an

$$v \in H_0^1(D^+) \text{ genügt } Lv = f \text{ in } D^+, \eta v \in H_0^1(D^+) \ \forall \eta \in C_0^1(D').$$

Für $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \eta, \partial\Omega')$ und für $1 \leq k < n-1$ gilt

$$\eta^2 \Delta_k^h v \in H_0^1(D^+).$$

Daher folgt aus dem Beweis von Satz 3.4.1, daß

$$D_{ij}v \in L^2(\psi(B_{\rho_0}(x_0) \cap \Omega))$$

für alle $\rho_0 < R_0$ und falls $k \neq n$ ist. Es bleibt eine zweite Ableitung $D_{nn}u$ übrig. Aber die läßt sich sofort aus der Differentialgleichung abschätzen. Damit ist $u \in H^2(B_{\rho_0}(x_0))$. Da x_0 beliebig ist, gibt es endlich viele Kugeln $B_{\rho_k}(x_k)$, so daß $u \in H^2(B_{\rho_k}(x_k))$ ist und die Vereinigung $\cup_k B_{\rho_k}(x_k)$ überdeckt $\partial\Omega$. Zusätzlich ist $u \in H^2_{loc}$, also ist $u \in H^2(\Omega)$ □

Nun folgen weitere Glättungseigenschaften wie im vorigen Abschnitt.

Satz 3.5.2 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.4.1 mit $\partial\Omega \in C^{k+2}$, $\varphi \in H^{k+2}(\Omega)$ mit $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$ folgt $u \in H^{k+2}(\Omega)$ und*

$$\|u\|^{\Omega}_{k+2,2} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|^{\Omega}_{k,2} + \|\varphi\|^{\Omega}_{k+2,2}\right)$$

mit $C = C(n, \lambda, K, k, \partial\Omega)$. Sind $a^{ij}, b^i, c^i, d, f \in C^\infty(\overline{\Omega}), \partial\Omega \in C^\infty$, so ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Schließlich ergeben die bisherigen Resultate zusammen:

Satz 3.5.3 *Es sei L stark elliptisch mit Koeffizienten in $C^\infty(\overline{\Omega})$ und $c \leq 0$. Ferner sei $\partial\Omega \in C^\infty$. Dann gibt es zu $f, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genau eine Lösung des Randwertproblems $Lu = f$ in Ω, $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Es gilt $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

3.6 Eigenwertaufgaben für elliptische Operatoren

Definition 3.6.1 *(i) Der elliptische Operator L heißt* symmetrisch*, falls*

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lu\rangle, \ \forall u, v \in D_L.$$

(ii) Definiere den Operator L^* durch: $v \in D_{L^*}$, wenn es zu jedem $u \in D_L$ ein w gibt mit

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, w\rangle.$$

Wir setzen dann $L^*v = w$.

(iii) L^* heißt selbstadjungiert*, falls L symmetrisch ist und $D_L = D_{L^*}$.*

Bemerkung 3.6.2 *Die Symmetrie eines elliptischen Operators ist leicht nachzuprüfen, die Selbstadjungiertheit ist etwas schwieriger nachzuweisen. Der Satz von K.O. Friedrichs[6] besagt, daß symmetrische Operatoren im wesentlichen selbstadjungiert sind. Wir zitieren diesen Satz ohne Beweis (vgl. Übungsblatt 12).*

[6] Kurt Otto Friedrichs (28.9.1901-31.12.1982) arbeitete über Analysis und mathematische Physik. In seiner Dissertation beschäftigte er sich mit Beulproblemen elastischer Platten, später untersuchte er neben hyperbolischen Gleichungen auch hydrodynamische Probleme und mathematische Fragen in der Quantenfeldtheorie.

Satz 3.6.3 (Friedrichs) *Zu einem symmetrischen Operator L gibt es eine Erweiterung $\tilde{L}$ mit $D_{\tilde{L}} \supset D_L$ und $\tilde{L}$ ist selbstadjungiert.*

Lemma 3.6.4 *Es sei L ein elliptischer Operator L in Divergenzform mit $D_L = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $a^{ij} = a^{ji}$ für alle i, j. L ist symmetrisch genau dann, wenn $c^i = -b^i$.*

Beweis: Es sei $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle &= \langle \sum_{ij} D_i(a^{ij} D_j u) + \sum_i D_i(b^i u) - \sum_i b^i D_i u + du, v\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle -a^{ij} D_j u, D_i v\rangle - \sum_i \langle b^i u, D_i v\rangle - \sum_i \langle u, D_i v\rangle + \langle u, dv\rangle \\
&= \langle u, Lv.\rangle
\end{aligned}$$

□

Satz 3.6.5 *Es sei L stark elliptisch auf einem beschränkten Gebiet Ω mit Dirichlet-Randbedingungen und symmetrisch. Dann ist $\Sigma(L)$ reell.*

Beweis: Klar ist, daß alle Eigenwerte reell sind. Da L kompakte Resolvente hat, besteht das Spektrum nur aus Eigenwerten. □

Bemerkung 3.6.6 *Selbstadjungierte Operatoren haben reelles Spektrum, unabhängig von der Kompaktheit der Resolvente.*

Satz 3.6.7 (Charakterisierung des kleinsten Eigenwertes) *Es sei L wie in* Lemma 3.6.4. *Dann ist der kleinste Eigenwert von L durch*

$$\min \frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle}, \; u \in H_0^1(\Omega),$$

charakterisiert.

Beweis: Der Beweis wird in den Übungen für $L = -\Delta$ erbracht. Die Rechnungen sind identisch mit den hier benötigten. □

Satz 3.6.8 (Charakterisierung der restlichen Eigenwerte) *Es sei L wie in* Satz 3.6.7. *Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die ersten n kleinsten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Dann ist*

$$\lambda_{n+1} = \min \{ \frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \mid u \in H_0^1(\Omega), \; \int_\Omega u\varphi_j dx = 0, \; j = 1, \ldots, n\}.$$

Beweis: Wie zuvor. □

Satz 3.6.9 (Alternative Charakterisierung der Eigenwerte) *Es sei L wie in* Satz 3.6.7. *Es seien λ_i, $i \in \mathbb{N}$ Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen φ_i. Dann ist*

$$\lambda_{n+1} = \max\min\{\frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle} | u \in H_0^1(\Omega), \int\limits_\Omega u\psi_j dx = 0,\ j = 1, \ldots, n-1\}, \psi_j \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis: Zu zeigen ist, das für eine beliebige Auswahl von n-Funktionen v_i das Infimum kleiner oder gleich λ_n ist. Sei

$$\lambda^* = \max\min\{\frac{\langle Lu, u\rangle}{\langle u, u\rangle} | u \in H_0^1(\Omega), \int\limits_\Omega u\psi_j dx = 0,\ j = 1, \ldots, n-1\}, \psi_j \in H_0^1(\Omega).$$

Wir zeigen $\lambda^* = \lambda_n$ indem wir einerseits beweisen, daß $\lambda_n \leq \lambda^*$ und andrerseits $\lambda^* \leq \lambda_n$ gilt. Sei W_n der lineare Spann der Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, H_n der Spann der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Dann ist $W_n^\perp \cap H_n \neq \emptyset$. Sei u aus diesem Schnitt von Länge 1, also $u = \sum c_i\varphi_i$ mit $\sum c_i^2 = 1$. Dann ist

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^n c_i^2\lambda_i.$$

Da alle c_i^2 zwischen 0 und 1 liegen und als Summe den Wert 1, ist dies eine konvexe Kombination der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und insbesondere $\lambda^* \leq \lambda_n$.

Mit der speziellen Wahl $v_i = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ bekommt man die umgekehrte Ungleichung und damit ist der Satz gezeigt. □

Die Charakterisierung durch Variationsprobleme erlaubt Vergleichssätze für Eigenwerte auf unterschiedlichen Gebieten.

Satz 3.6.10 *Ist $\Omega' \subset \Omega$, L ein gleichmäßig stark elliptischer Operator mit reellen und glatten Koeffizienten. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ die Eigenwerte von L in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und entsprechend $\sigma_1', \ldots, \sigma_n', \ldots$ die Eigenwerte von L in $H^2(\Omega') \cap H_0^1(\Omega')$. Dann gilt*

$$\sigma_j' \geq \sigma_j.$$

Beweis: Der Satz folgt aus der Charakterisierung durch Variationsprinzipien. Durch triviales Fortsetzen wird aus $u \in H_0^1(\Omega')$ eine Funktion in $H_0^1(\Omega)$. Der Fortsetzungsoperator $H_0^1(\Omega') \to H_0^1(\Omega)$ werde mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n' &= \max\left\{\min\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega'),\ u \perp v_1, \ldots, v_{n-1}\}, (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in H_0^1(\Omega')^{n-1}\right\} \\
&= \max\left\{\min\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega'),\ \mathfrak{F}u \perp \mathfrak{F}v_1, \ldots, \mathfrak{F}v_{n-1}\}, (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in H_0^1(\Omega')^{n-1}\right\} \\
&= \max\left\{\min\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega'),\ \mathfrak{F}u \perp v_1, \ldots, v_{n-1}\}, (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in H_0^1(\Omega)^{n-1}\right\} \\
&\geq \max\left\{\min\{\frac{B_L(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} \mid u \in H_0^1(\Omega),\ u \perp v_1, \ldots, v_{n-1}\}, (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in H_0^1(\Omega)^{n-1}\right\}
\end{aligned}$$

Dabei wird im letzten Schritt jedes der Infima vergrößert, da wir mehr Funktionen u zur Konkurrenz zugelassen habe. Für den vorletzten Schritt beachte man, daß bei der Berechnung des Skalarproduktes $\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)}$ nur auf Ω' integriert wird und daher die Werte der v_i auserhalb von Ω' keine Rolle spielen. Fur ein vollständiges Argument approximiere man noch u durch Funktionen ηu, $\eta \in C_0^1(\Omega)$. Dann ist $\langle \eta u, v\rangle = \langle u, \eta v\rangle$ und $\eta v \in H_0^1(\Omega')$. $\square$

Kapitel 4

Parabolische Gleichungen

4.1 Analytische Halbgruppen

Definition 4.1.1 *Eine Familie $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ beschränkter linearer Operatoren auf einem Banachraum X heißt stark stetige Halbgruppe, falls gilt*

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s > 0$,

(ii) $T(0) = \mathbb{1}$,

(iii) für jedes $x \in X$ ist $t \mapsto T(t)x$ stetig.

Definition 4.1.2 *(i) $D \subset X$ ist definiert durch*

$$D = \{x \in X \mid \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existiert } \}.$$

(ii) Definiere für $x \in D$

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

A heißt infinitesimaler Erzeuger der Halbgruppe $T(t)$.

(iii) Man sagt, $A : X \to X$ erzeugt eine stark stetige *Halbgruppe, falls A mit dem infinitesimalen Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe zusammenfällt.*

Lemma 4.1.3 *Sei $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A. Ist $x \in D(A)$, so gilt $T(t)x \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ und man hat $AT(t)x = T(t)Ax$.*

Beweis: Ist $x \in D(A)$, so gilt

$$\begin{array}{ccc} T(t)\dfrac{T(h)x - x}{h} & = & \dfrac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \\ \downarrow {\scriptstyle h \to 0} & & \downarrow {\scriptstyle h \to 0} \\ T(t)Ax & & AT(t)x. \end{array}$$

Damit ist $T(t)x \in D(A)$ und $T(t)Ax = AT(t)x$. $\square$

Satz 4.1.4 *Ist $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A, so gilt für jedes $x \in D(A)$*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Beweis: Nach Lemma 4.1.3 ist für $x \in D(A)$ auch $T(t)x \in D(A)$ und es gilt $AT(t)x = T(t)Ax$. Ist $t > 0, h > 0$ so folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0} T(t)\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax = AT(t)x$$

$\square$

Definition 4.1.5 *Eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ heißt analytische Halbgruppe, falls die Zuordnung $t \to T(t)x$ für alle $x \in X$ reell analytisch ist.*

Definition 4.1.6 *Ein linearer Operator $A : X \to X$ mit $D(A) \subset X$ wird als vom Typ (Φ, M), $\Phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M > 0$, bezeichnet, falls*

(i) A abgeschlossen und $D(A)$ dicht in X ist,

(ii) die Resolventenmenge von A

$$S_\Phi = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ \frac{1}{2}\pi - \Phi < \arg(z) < \frac{3}{2}\pi + \Phi\}$$

umfaßt und für alle $\lambda \in S_\Phi$ die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \tag{4.1.1}$$

gilt.

Der Operator A heißt sektoriell, falls es ein $\tau \in \mathbb{R}$ gibt, mit $A - \tau\mathbb{1}$ ist vom Typ (Φ, M).

Lemma 4.1.7 *Es sei A abgeschlossen, $u : [0,T) \to X$ stetig, so daß $u(s) \in D(A)$ $\forall s \in [0,T)$ und $s \to Au(s)$ auf $[0,T)$ stetig ist. Wir nehmen an, daß die uneigentlichen Integrale $\int\limits_0^T u(s)ds$, $\int\limits_0^T Au(s)ds$ existieren. Dann ist $\int\limits_0^T u(s)ds \in D(A)$ und*

$$A\int_0^T u(s)ds = \int_0^T Au(s)ds. \tag{4.1.2}$$

Beweis: Die Integrale von 0 bis $\overline{T}$ werden für $\overline{T} < T$ mittels Riemann Summen definiert. Aus der Abgeschlossenheit von A und der Tatsache, daß das Integral

$$\int_0^{\overline{T}} Au(s)ds \text{ (wegen der Stetigkeit von } Au(s))$$

existiert folgt, daß $\int_0^{\overline{T}} u(s)ds \in D(A)$ und die obige Gleichung 4.1.2 mit T durch $\overline{T}$ ersetzt gilt. Erneute Anwendung der Definition von Abgeschlossenheit liefert das Ergebnis. □

Satz 4.1.8 (Hille, Phillips, Yosida) *Es sei A dicht definierter und abgeschlossener linearer Operator. Dann gilt: A ist genau dann Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe, wenn es reelle Konstanten $M, \beta > 0$ gibt, so daß*

(i) $\{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi > \beta\} \subset R(A)$,

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|R(\xi, A)^n\| \leq M(\xi - \beta)^{-n}$.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Für $\xi > \beta$ sind die Operatoren $Q_\xi = -\xi(\mathbb{1} - \xi R(\xi, A))$ definiert und beschränkt. Einsetzen in die Exponentialreihe ergibt

$$\exp(tQ_\xi) = \exp(-\xi t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 t)^n}{n!} (R(\xi, A))^n.$$

Damit hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\exp(tQ_\xi)\| &\leq M \exp(-\xi t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 t)^n}{n!} (\xi - \beta)^{-n} \\ &= M \exp(-\xi t) \exp(\xi^2 t (\xi - \beta)^{-1}) \\ &= M \exp(\xi \beta t (\xi - \beta)^{-1}) \\ &\leq M \exp(t\omega) \end{aligned}$$

für $\omega > \beta$ und ξ genügend groß, da

$$\xi\beta(\xi - \beta)^{-1} = \beta(1 - (\beta/\xi)^{-1}) > \beta \to \beta \text{ für } \beta > 0 \text{ und } \xi \to \infty.$$

Für $x \in D(A)$ und $\xi \to \infty$ gilt $Q_\xi \to Ax$:
wir betrachten

$$-R(\xi, A)Ax = R(\xi, A)(\xi\mathbb{1} - A)x - \xi R(\xi, A)x = x - \xi R(\xi, A)x, \qquad (4.1.3)$$

also gilt für $x \in D(A)$

$$\|\xi R(\xi, A)x - x\| = \|R(\xi, A)Ax\| \leq M\|Ax\|(\xi - \beta)^{-1} \to 0 \text{ für } \xi \to \infty. \quad (4.1.4)$$

Da $\xi R(\xi, A)x$ wegen (ii) für $\xi > \xi_0 > \beta$ gleichmäßig in ξ beschränkt ist, folgt aus $D(A)$ dicht in X und $\xi R(\xi, A)x \to x$ für $\xi \to \infty$ und $x \in D(A)$, daß $\xi R(\xi, A)x \to x$ für $\xi \to \infty$ $\forall x \in X$. Multipliziert man (4.1.3) mit $-\xi$, so hat man für $x \in D(A)$

$$\xi R(\xi, A)Ax = Q_\xi x.$$

Also gilt (mit (4.1.4))

$$\lim_{\xi \to \infty} Q_\xi x = \lim_{\xi \to \infty} \xi R(\xi, A)Ax = Ax.$$

(hier ist es wichtig, daß (4.1.4) für alle $x \in X$ richtig ist, da i.a. $Ax \notin D(A)$). Wir definieren

$$S_\xi(t) = \exp(tQ_\xi).$$

Da die Resolventen an zwei verschiedenen Argumenten miteinander vertauschen, haben wir $Q_\xi Q_\zeta = Q_\zeta Q_\xi$ und damit auch $Q_\zeta S_\xi(t) = S_\xi(t) Q_\zeta$. Von dieser Gleichung ausgehend, können wir die Konvergenz der $S_\xi(t)$ untersuchen. Für $x \in D(A)$ gilt

$$S_\xi(t)x - S_\zeta(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds}(S_\zeta(t-s)S_\xi(s))x\,ds = \int_0^t (S_\zeta(t-s)S_\xi(s))(Q_\xi - Q_\zeta)x\,ds.$$

Sind nun ξ und ζ genügend groß, so können wir $\|S_\zeta(t-s)S_\xi(s)\| < M^2 \exp(\omega t)$ abschätzen und erhalten insgesamt:

$$\|S_\xi(t)x - S_\zeta(t)x\| < M^2 t \|(Q_\xi - Q_\zeta)x\| \exp(t\omega) \quad \forall x \in D(A). \tag{4.1.5}$$

Da $Q_\xi x \to Ax$ für $x \in D(A)$ und $\xi \to \infty$ konvergiert, wird die rechte Seite, für ξ, ζ genügend groß, beliebig klein. Wegen der Dichtheit von $D(A)$ und der Beschränktheit von $S_\xi(t) - S_\zeta(t)$ existiert der Grenzwert $\lim_{\xi,\zeta \to \infty} \|S_\xi(t)x - S_\zeta(t)x\| = 0$ für alle $x \in X$.
Deshalb existiert der Grenzwert $\lim_{\xi \to \infty} S_\xi(t) = S(t)$.
Offensichtlich hat man die Abschätzung $\|S(t)\| \le M \exp(\omega t)$. Wegen (4.1.5) hat man für $x \in D(A)$ eine gleichmäßige Konvergenz der $S_\xi(.)x$ gegen $S(.)x$ auf beschränkten Intervallen. Gleichmäßige Beschränktheit der S_ξ auf beschränkten Intervallen und Dichtheit von $D(A)$ ermöglicht es, diese Gleichmäßigkeit für alle $x \in X$ zu zeigen:
seien $x \in X$, $I \subset \mathbb{R}_+$ eine beschränkte Teilmenge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir finden $y \in D(A)$ mit $\|x - y\| < \delta = \frac{1}{4}\varepsilon M \exp(-\omega T)$, $T = \sup I$. Sei $t \in I$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - S_\xi(t)x\| &\le \|S(t)x - S(t)y\| + \|S(t)y - S_\xi(t)y\| + \|S_\xi(t)y - S_\xi(t)x\| \\
&\le \delta M \exp(\omega T) + \delta + \delta M \exp(\omega T) \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}$$

solange nur $\xi > \xi(\delta, y)$, das so gewählt wird, daß der mittlere Ausdruck $< \delta$ wird.

Die Halbgruppeneigenschaft von $S(t)$ folgt sofort aus der für $S_\xi(t)$. Es folgt daher, daß $S(t)$ eine stark stetige Halbgruppe ist. Zu zeigen bleibt, daß ihr Erzeuger $\overline{A}$ mit A zusammenfällt.

1. Schritt: $\overline{A} \supset A$.

Sei $x \in X$ und $t > 0$. Dann gilt $S_\xi(t)x - x = \int\limits_0^t \frac{d}{ds} S_\xi(s)x ds = \int\limits_0^t S_\xi(s) Q_\xi x ds$. Für $x \in D(A)$ und $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\begin{aligned} \|S_\xi(s)Q_\xi x - S(s)Ax\| &\leq \|S_\xi(s)Q_\xi x - S_\xi(s)Ax\| + \|S_\xi(s)Ax - S(s)Ax\| \\ &\leq \|S_\xi(s)\| \|Q_\xi x - Ax\| + \|(S_\xi(s) - S(s))Ax\| \\ &\leq M \exp(\omega t) \|Q_\xi x - Ax\| + \|(S_\xi(s) - S(s))\| \|Ax\|. \end{aligned}$$

Deshalb konvergiert der Integrand für $x \in D(A)$ gleichmäßig gegen $S(t)A$. Also hat man

$$S(t)x - x = \int\limits_0^t S(s)Axds \text{ solange nur } x \in D(A)\ .$$

Es folgt (Division durch $t,\ t \to 0$) $\overline{A} \supset A$.

2. Schritt: $\overline{A} = A$.

Ist $R(\overline{A}) \cap R(A) \neq \emptyset$, so hat man für ein $z \in R(\overline{A}) \cap R(A)$, daß

$$(z\mathbb{1} - \overline{A})D(A) = (z\mathbb{1} - A)D(A) = X \text{ und } (z\mathbb{1} - \overline{A})D(\overline{A}) = X.$$

Wegen der Injektivität von $(z\mathbb{1} - \overline{A})$ und der schon gezeigten Beziehung

$$D(\overline{A}) \supset D(A)$$

folgt die Gleichheit beider Mengen. Um ein gemeinsames Element beider Resolventenmengen zu finden, zeigen wir, daß genügend große reelle Zahlen in $R(\overline{A})$ liegen.
Sei $\lambda > \omega$ und

$$R(\lambda)x = \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t)xdt,\ x \in X. \tag{4.1.6}$$

Wegen des Wachstums von $\|S(t)\|$ ist dieses Integral konvergent und definiert einen beschränkten linearen Operator. Man betrachte für

$$A_\xi x = \frac{S(\xi)x - x}{\xi}$$

den Ausdruck

$$A_\xi R(\lambda)x \quad = \quad \frac{S(\xi)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{\xi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi^{-1}\int_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t+\xi)x dt - \xi^{-1}\int_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t)\,x\,dt \\
&= \left[\frac{\exp(\lambda\xi)-1}{\xi}\right]\int_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t)x dt - \left[\frac{\exp(\lambda\xi)}{\xi}\right]\int_0^\xi \exp(-\lambda t)S(t)\,x\,dt.
\end{aligned}
$$

Mit $\xi \to 0$ konvergiert die linke Seite gegen $\overline{A}R(\lambda)x$, die rechte gegen $\lambda R(\lambda)x - x$. Also ist

$$R(\lambda)x \in D(\overline{A}) \text{ und } (\lambda 1\!\!1 - \overline{A})R(\lambda)x = x \;\forall x \in X.$$

Es gilt dann

$$\overline{A}R(\lambda)x = \overline{A}\int_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t)x dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t)\overline{A}x dt = R(\lambda)\overline{A}x.$$

Für $x \in D(\overline{A})$ gilt dann $R(\lambda)(\lambda 1\!\!1 - \overline{A})x = x$. Daher ist $R(\lambda)$ die Inverse von $(\lambda 1\!\!1 - \overline{A})$. Wir haben also gezeigt, daß die Bedingung aus dem Satz hinreichend ist.

„$\Rightarrow$“ Sei $T(t)$ eine entsprechende Halbgruppe. Wegen der Halbgruppeneigenschaft ist die Funktion

$$g(t) = \log(\|T(t)\|)$$

subadditiv. Sei $t_0 \in (0, \infty)$ fest. Dann kann jedes $t \in \mathbb{R}_+$ in der Form $t = nt_0 + s$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s < t_0$ geschrieben werden. Damit gilt

$$\frac{g(t)}{t} \leq \frac{ng(t_0)}{t} + \frac{g(s)}{t} \to \frac{g(t_0)}{t_0} \text{ für } t \to \infty.$$

Daher existierten $M, \gamma > 0$ mit

$$\|T(t)\| < M\exp(\gamma t).$$

Die obige Rechnung zeigt, daß

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)T(t)x dt.$$

Die Resolventengleichung lautet: $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$. Deshalb kann man $R(\lambda, A)$ nach λ differenzieren und erhält

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2.$$

Induktion ergibt

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}.$$

Nun kann man die Ableitung von $R(\lambda, A)$ mittels der Definition (4.1.6) ausrechnen und in die eben erhaltene Gleichung einsetzen. Man hat dann

$$R(\lambda, A)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \exp(-\lambda t) t^{n-1} T(t) dt.$$

Übergang zur Norm liefert:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \le \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \exp(-(\lambda - \gamma)t) dt = \frac{M}{(\lambda - \gamma)^n}.$$

Damit ist die Bedingung aus dem Satz nachgewiesen. □

Ein entsprechender Satz gilt auch für analytische Halbgruppen.

Satz 4.1.9 *Ist A sektoriell, so erzeugt $(-A)$ eine analytische Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ und es gilt:*

(i) $AT(t), \frac{d}{dt}T(t)$ sind für $t > 0$ beschränkte lineare Operatoren mit

$$\frac{d}{dt}T(t)x = -AT(t)x \quad \forall x \in X,\ t > 0.$$

(ii) T läßt sich zu einer analytischen Funktion fortsetzen, die auf einem Sektor $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \varphi_1\}$ definiert ist, und der die positive reelle Halbachse umfaßt. Dort gilt die Halbgruppeneigenschaft.

(iii) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in S$ gilt $\|T(t)\| \le C \exp(-a\, t)$ und $\|AT(t)\| \le \frac{C}{|t|} \exp(-a\, t)$.

Bemerkung 4.1.10 *Die Umkehrung ist auch richtig, d.h. ist A Erzeuger einer analytischen Halbgruppe, so ist $-A$ sektoriell.*

Beweis: O.B.d.A. sei $\tau = 0$. Andernfalls betrachten wir $A_0 = A - \tau \mathbb{1}$. Dann genügt A_0 den Voraussetzungen und erzeugt eine Halbgruppe $T_0(t)$, wie gleich gezeigt werden wird. Dann hat die Halbgruppe $T(t) = \exp(-\tau t) S_0(t)$ die behaupteten Eigenschaften.

Sei also A vom Typ (M, Φ). In der Resolventenmenge von $-A$ definieren wir folgendermaßen eine Kurve Γ:

$$\left.\begin{array}{r} \text{die beiden Strahlen } \{r \exp(\pm i\phi_0) \mid 1 \le r < \infty\} \\ \text{den Kreisbogen } \{\exp(i\phi) \mid -\phi_0 \le \phi \le \phi_0\} \end{array}\right\} \frac{\pi}{2} < \phi_0 < \frac{\pi}{2} + \Phi,$$

wobei Φ der Winkel aus der Definition des Operators vom Typ (Φ, M) ist.

Wir wollen annehmen, daß für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ sogar gilt, daß $\phi_0 > \frac{\pi}{2} + \Phi - \varepsilon$. Die Größe dieser Zahl ist nur für die Größe des Sektors wichtig auf dem die Holomorphie von $T(t)$ gezeigt werden kann.

Wir definieren für t mit $|\arg t| < \Phi - \varepsilon$,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, -A)\exp(\lambda t)x\,d\lambda.$$

Wir werden alternativ für $T(t)$ auch e^{-At} oder $\exp(-At)$ schreiben. Die Rechtfertigung dieser Notation ergibt sich aus den Eigenschaften der Halbgruppe.

Als erstes gilt es, die Existenz dieses Integrals zu zeigen. Dabei sei die Orientierung von Γ so festgelegt, daß $\sigma(-A)$ zur Linken liegt. Der Integrand ist eine stetige Funktion $\mathbb{C} \to \mathcal{B}(X)$, wobei $\mathcal{B}(X)$ die Banach-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf X ist. Deshalb existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral über $\Gamma_n = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq n\}$. Wegen der Abschätzung für die Resolvente existiert das Integral über Γ und stellt einen beschränkten linearen Operator dar. Nun sei Γ_0 eine Kurve, die aus Γ durch Translation nach rechts um ein $\varepsilon_0 > 0$ entsteht, so daß das obige uneigentliche Integral längs Γ_0 existiert. Um einen Schnitt der beiden Kurven zu verhindern, kann man den Radius des Kreisbogens um die Null etwas vergrößern. Sei $f \in X^*$ ein stetiges lineares Funktional, dann ist

$$f(R(\lambda, -A)\exp(\lambda t)x)$$

holomorph in λ. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(R(\lambda, -A)\exp(\lambda t)x)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} f(R(\lambda', -A)\exp(\lambda' t)x)d\lambda'.$$

Dies gilt für jedes $f \in X^*$ und jedes $x \in X$. Daher sind die mittels Γ bzw. Γ_0 definierten Operatoren gleich. Deshalb kann man zum Nachweis der Halbgruppeneigenschaft folgendermaßen vorgehen:

$$\exp(-tA)\exp(-sA) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_0} R(\lambda, -A)R(\lambda', -A)\exp(\lambda t + \lambda' s)d\lambda' d\lambda.$$

Mit der Resolventengleichung (s. S. Beweis des Hille-Phillips-Yosida Satzes) erhält man (man beachte, daß für $\lambda \in \Gamma$ und $\lambda' \in \Gamma_0$ immer $\lambda \neq \lambda'$ gilt)

$$T(t)T(s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_0} (R(\lambda, -A) - R(\lambda', -A))(\lambda' - \lambda)^{-1}\exp(\lambda t + \lambda' s)d\lambda' d\lambda.$$

Nun wendet man den Cauchyschen Integralsatz erneut an und erhält, daß

$$\int_{\Gamma_0} \exp(\lambda t)(\lambda' - \lambda)^{-1} d\lambda = 0 \text{ für } \lambda' \in \Gamma_0.$$

Mit dem Residuensatz (oder durch explizites Ausrechnen) findet man

$$\int_{\Gamma_0} \exp(\lambda' s)(\lambda' - \lambda)^{-1} d\lambda' = 2\pi i \exp(\lambda s) \text{ für } \lambda \in \Gamma.$$

Zusammen genommen ergibt dies

$$\exp(-tA)\exp(-sA) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \exp(\lambda(t+s))R(\lambda,-A)d\lambda = \exp(-(t+s)A).$$

Aufgrund der Abschätzung für die Resolvente eines sektoriellen Operators erhält man

$$\|R(\frac{\lambda}{|t|},-A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}|t| \text{ falls } t \neq 0 \text{ und } \lambda \in \Gamma.$$

Wir modifizieren die Kurve Γ durch $\Gamma' = \{|t|\lambda \mid \lambda \in \Gamma\}$. Wegen des Cauchyschen Integralsatzes stimmen die obigen Integrale über Γ und Γ' überein. Also gilt $(\lambda' = |t|\lambda,\ t = |t|\exp(i\phi),\ \gamma = \exp(i\phi))$

$$\exp(-tA) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \exp(\lambda\gamma|t|)(R(\lambda,-A)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \exp(\lambda'\gamma)R(\frac{\lambda'}{|t|},-A)\frac{d\lambda'}{|t|}.$$

Wir setzen die zuvor hergeleitete Abschätzung für $R(\frac{\lambda}{|t|},-A)$ hier ein:

$$\|\exp(-tA)\| \leq M\int\limits_{\Gamma} |\exp(\lambda'\gamma)|\frac{d\lambda'}{|\lambda'|} \leq C_0(\gamma).$$

Betrachtet man $A+\varepsilon\mathbb{1}$ für kleines ε erhält man das exponentielle Verhalten. Da A abgeschlossen ist, kann man A in das Integral über Γ hineinziehen (ein ähnliches Argument hatten wir schon mehrfach). Daher haben wir einen Ausdruck für $A\exp(-At)$ durch

$$A\exp(-At) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \exp(\lambda'\gamma)AR(\frac{\lambda'}{|t|},-A)\frac{d\lambda'}{|t|}.$$

Um die Konvergenz dieses Integrals zu zeigen, schreibt man

$$A = (A + \frac{\lambda'}{|t|}\mathbb{1}) - \frac{\lambda'}{|t|}\mathbb{1}.$$

Einsetzen ergibt für die Norm

$$\|A\exp(-At)\| \leq \frac{C}{|t|}.$$

nämlich:

$$A\exp(-At) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \exp(\lambda'\gamma)(\mathbb{1} - \frac{\lambda'}{|t|}R(\frac{\lambda'}{|t|},-A))\frac{d\lambda'}{|t|},$$

und der Übergang zur Norm ergibt

$$\|A\exp(-At)\| \leq \int\limits_{\Gamma} |\exp(\lambda'\gamma)|(1+M)\frac{d\lambda'}{|t|}.$$

Aus der Integraldarstellung für die Halbgruppe $\exp(-tA)$ folgt unmittelbar die komplexe Differenzierbarkeit, da die Exponentialfunktion komplex differenzierbar ist und der abgeleitete Integrand gleichmäßig konvergiert. Es ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d}{dt}\exp(-tA) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda R(\lambda, -A)\exp(\lambda t)d\lambda.$$

Nun ist $\lambda R(\lambda,-A) = (A+\lambda-A)R(\lambda,-A) = \mathbb{1}-AR(\lambda,A)$ und $\int_\Gamma \exp(\lambda t)d\lambda = 0$. Also hat man

$$\frac{d}{dt}\exp(-tA) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma AR(\lambda,-A)\exp(\lambda t)d\lambda.$$

Die Abgeschlossenheit von A erlaubt uns A herauszuziehen und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\exp(-tA) = -A\exp(-tA).$$

Für $x \in D(A)$ erhält man in gleicher Weise:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\exp(-tA)x &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma AR(\lambda,-A)\exp(\lambda t)x d\lambda \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda,-A)\exp(\lambda t)(-A)\,x\,d\lambda \\
&= \exp(-tA)(-A)x.
\end{aligned}$$

Um $\lim_{t\to 0}\exp(-tA)x = x$ für alle $x \in X$ nachzuweisen, nutzen wir wieder den Cauchyschen Integralsatz (Γ umschließt 0):

$$\exp(-tA)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp(\lambda t)(R(\lambda,-A)x - \frac{1}{\lambda}x)d\lambda.$$

Wegen der obigen Gleichung $\lambda R(\lambda,-A) = (A + \lambda\mathbb{1} - A)R(\lambda,-A) = \mathbb{1} - AR(\lambda,-A)$ ergibt sich für $x \in D(A)$

$$\exp(-tA)x - x = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp(\lambda t)R(\lambda,-A)Ax\frac{1}{\lambda}d\lambda.$$

Damit bekommen für $x \in D(A)$

$$\|\exp(-tA)x - x\| \le \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \exp(\lambda t)M\frac{1}{|\lambda|^2}d\lambda\|Ax\|.$$

Mit der Substitution $\lambda t = \lambda'$ wird dies zu

$$\|\exp(-tA)x - x\| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'} \exp(\lambda')M\frac{1}{|\lambda'|^2}t\,d\lambda'\|Ax\| \to 0 \text{ für } t \to 0.$$

Da $D(A) \subset X$ dicht liegt, folgt die Behauptung für jedes $x \in X$ durch Approximation und aus der Tatsache, daß $\exp(-tA)$ beschränkt ist. Als letzten Schritt müssen wir zeigen, daß $-A$ der infinitesimale Erzeuger von $\exp(-tA)$ ist. Dieser Beweis wird wieder in zwei Schritten erbracht. Der zweite ist dabei identisch mit dem zweiten Schritt im entsprechenden Teil des Beweises des Hille-Phillips-Yosida Theorems. Der erste ist etwas einfacher:

$$\frac{\exp(-tA)x - x}{t} = -\frac{1}{t}\int_0^t \exp(-\tau A)d\tau Ax \to -Ax \text{ für } t \searrow 0.$$

□

4.2 Räume gebrochener Exponenten

Es sei $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z > 0\}$,und für eine reelle Zahl δ sei $H_\delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \delta \in H\}$. Wir erinnern an die Integraldarstellung der Γ-Funktion für alle $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt. \tag{4.2.7}$$

Definition 4.2.1 *Es sei A ein sektorieller Operator auf X und $\sigma(A) \subset H$. Setze für $\alpha > 0$*

$$A^{-\alpha}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-At)dt.$$

Beispiel 4.2.2 *(i) Für $x > 0$, $\alpha > 0$ ist*

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-xt)dt.$$

Zur Begründung führen wir in (4.2.7) die Substitution $t \mapsto tx$ durch.

(ii) $A^{-1} = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^\infty \exp(-At)dt = \int_0^\infty \exp(-At)dt$. Unter Ausnutzung von $\sigma(A) \subset H$ wende man A auf die rechte Seite an und zeige, daß dies $\mathbb{1}$ ergibt.

Satz 4.2.3 *Ist A sektoriell, $\sigma(A) \subset H$ und $\alpha > 0$, so ist $A^{-\alpha} \in B(X)$, $A^{-\alpha}$ ist injektiv und es gilt*

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Ferner hat für $\alpha \in [0, 1)$ der Operator $A^{-\alpha}$ die Darstellung

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}R(\lambda, -A)d\lambda.$$

Beweis: Nachdem das Spektrum $\sigma(A)$ abgeschlossen ist und in $\mathbb{C} \setminus S(\Phi, M)$ liegt, existiert ein $a > 0$ mit $\sigma(A) \subset H_a$. Damit folgt aus Satz 4.1.9, daß $\|\exp(-At)\| < C\exp(-a\,t)$, $t > 0$. Somit kann man $\|A^{-\alpha}x\|$ abschätzen:

$$\|A^{-\alpha}x\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty Ct^{\alpha-1}\exp(-a\,t)dt\|x\|.$$

Hiermit folgt sofort die Beschränktheit von $A^{-\alpha}$ für $\alpha > 0$. Die Produktformel ist eine einfache Manipulation:

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\beta-1}t^{\alpha-1}\exp(-(t+s)A)dsdt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_t^\infty t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}\exp(-rA)drdt \quad (r = t+s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \exp(-rA) \int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}dtdr \text{ (Satz von Fubini) .}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}dt &= r^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \\
&= r^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

erhält man

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Um die Injektivität von $A^{-\alpha}$ nachzuweisen, nehmen wir an, daß $A^{-\alpha}x = 0$. Dann ist für ein $n > \alpha$

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = 0.$$

Wegen der Injektivität von A folgt $x = 0$. (Wir haben ausgenutzt, daß die übliche Definition von A^{-1} mit der neuen Definition zusammenfällt. Warum ist das so?) Es bleibt die angegebene Darstellungsformel. Wir wissen bereits, daß

$$R(\lambda, -A) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\exp(-At)dt \text{ für } \lambda > 0.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}R(\lambda, -A)d\lambda = \int_0^\infty \exp(-At)\int_0^\infty \exp(-\lambda t)\lambda^{-\alpha}d\lambda dt.$$

Das zweite Integral ist gerade $t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$ (beachte $0 \leq \alpha < 1$) und damit wird:

$$\int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda, -A) d\lambda = \int_0^\infty \exp(-At) t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) dt = \frac{\alpha}{\sin \pi\alpha} A^{-\alpha}.$$

Man benutzt hier die Formel $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\alpha}{\sin \pi\alpha}$. Diese wiederum gewinnt man aus der Produktdarstellung des Sinus:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right), \ z \in \mathbb{C}$$

und der Entwicklung der Γ-Funktion aus

$$H(z) = z \prod_{\nu \geq 1} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

Offenkundig ist

$$-H(z)H(-z) = z^2 \prod_{z \geq 1} (1 - z^2/\nu^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

und mit $H(1) = e^{-\gamma}$ wird $\Delta(z) = e^{\gamma z} H(z)$ gesetzt. Es folgt aus

$$\Delta(z) = \lim \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n! n^z},$$

daß

$$\Delta(z) = z\Delta(z+1)$$

und

$$\begin{aligned} \pi\Delta(z)\Delta(1-z) &= \pi z \Delta(z)\Delta(-z) \\ &= \pi z H(z) H(-z) \\ &= \sin \pi z. \end{aligned}$$

Setze $\Gamma = 1/\Delta$. □

Definition 4.2.4 *Es sei $\alpha > 0$. Dann gilt:*

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}, \ D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha}).$$

Bemerkung 4.2.5

$$A^0 = \mathbb{1}, \ A^1 = A.$$

Lemma 4.2.6 *Für $\alpha > 0$ ist A^α ein abgeschlossener, dicht definierter linearer Operator.*

Beweis: Da $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$ und $A^{-\alpha}$ beschränkt ist, folgt sofort die Abgeschlossenheit von A^α, denn $(x,y) \in G(A^\alpha) \Leftrightarrow y = A^\alpha x \Leftrightarrow x = A^{-\alpha}y \Leftrightarrow (x,y) \in G(A^{-\alpha})$. Letzterer ist abgeschlossen, da $A^{-\alpha}$ beschränkt ist. Offenkundig gilt: ist $B : X \to X$ ein beschränkter, injektiver, linearer Operator mit dichtem Bild Bild(B) und ist $Z \subset X$ dicht, so ist Bild(Z) dicht. Um zu zeigen, daß A^α dicht definiert ist, muß man zeigen, daß das Bild von $A^{-\alpha}$ dicht in X liegt. Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ gilt daher: Bild$(A^{-n}) = A^{-1}$Bild(A^{-n+1}) ist genau dann dicht, wenn Bild(A^{-n+1}) dicht ist. Dies ist aufgrund der Vorbemerkung gewährleistet. Wegen $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$ folgt aus $\beta \leq \alpha$, daß Bild$(A^{-\beta}) \supset$ Bild$(A^{-\alpha})$. Insbesondere hat man für $\alpha < n$ die Beziehung $D(A^\alpha) \supset D(A^n)$. Damit ist auch $D(A^\alpha)$ dicht in X. □

Definition 4.2.7 *Ist X ein Banachraum und A ein sektorieller Operator auf X mit $\sigma(A) \subset H_\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so ist für $\alpha > 0$*

$$X^\alpha = D(A^\alpha), \ \|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|_X,$$

wobei $A_1 = A - \gamma \mathbb{1}$ ist.

Satz 4.2.8 *Es sei A sektoriell, $\sigma(A) \subset H$ und A habe eine kompakte Resolvente, so gilt*

(i) $\exp(-At)$ *ist für alle $t > 0$ kompakt;*

(ii) $A^{-\alpha}$ *ist für $\alpha > 0$ kompakt;*

(iii) für $\alpha > \beta \geq 0$ ist $X^\alpha \subset X^\beta$ kompakt eingebettet.

Beweis:

(i) Die Halbgruppe ist definiert durch

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, -A) \exp(\lambda t) d\lambda.$$

Das Integral ist der Grenzwert der Integrale über $\Gamma_n = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n\}$. Definiert jedes dieser Integrale einen kompakten Operator, so ist der Grenzwert kompakt, da die Menge der kompakten Operatoren abgeschlossen ist. Die Integrale über Γ_n werden als Riemann Summen berechnet und jede dieser Summen definiert einen kompakten Operator. Wiederum bleibt diese Eigenschaft beim Übergang zur Grenze erhalten.

(ii) Das eben gegebene Argument, auf $T(t)$ angewendet, ergibt die Kompaktheit von $A^{-\alpha}$.

(iii) Die Kompaktheit in (ii) ergibt unmittelbar die Behauptung, denn sei $B \subset X^\alpha$ beschränkt, so ist zu zeigen, daß B als Teilmenge von X^β eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Voraussetzung $B \subset X^\alpha$ beschränkt, bedeutet, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß $\|A^\alpha x\| < C$, für alle $x \in B$, ist. Dann ist für $x \in B$

$$A^\beta x = A^{-(\alpha-\beta)} A^\alpha x.$$

Wegen der Kompaktheit von $A^{-(\alpha-\beta)}$ hat dies eine konvergente Teilfolge. □

4.3 Das Cauchy–Problem

Für zwei Klassen von abgeschlossenen, linearen Operatoren auf einem Banachraum X hatten wir die Lösbarkeit der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -Ax, \; x(0) = x_0$$

untersucht. Nun wollen wir die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = -Ax + f(t), \; x(0) = x_0 \tag{4.3.8}$$

für eine geeignete Funkton $f : \mathbb{R}_+ \to X$ betrachten. Dies ist natürlich ein erster Schritt zur Untersuchung des Anfangswertproblemes für nichtlineare Gleichungen. Eine wesentliche Rolle spielt dabei die Formel der Variation der Konstanten. Dazu sei $T(t)$ eine Halbgruppe linearer Operatoren mit infinitesimalem Erzeuger $-A$. Wir wollen der Frage nachgehen, ob die durch die nachstehende Gleichung definierte Abbildung $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to X$ eine Lösung von (4.3.8) darstellt:

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{4.3.9}$$

Geht man von einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ aus, und nimmt man an, daß $x(\cdot)$ die Gleichung (4.3.8) löst, so ergibt sich für die Ableitung von $T(t-s)x(s)$ nach s:

$$\frac{d}{ds}T(t-s)x(s) = AT(t-s)x(s) - AT(t-s)x(s) + T(t-s)f(s). \tag{4.3.10}$$

Integration dieser Gleichung zwischen 0 und t ergibt Gleichung (4.3.9). Damit ist (4.3.9) notwendig für eine Lösung von (4.3.8). Wir wollen noch zeigen, daß (4.3.9) auch eine solche Lösung definiert. Dazu ein Lemma.

Lemma 4.3.1 *Sei $T(t)$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger $(-A)$ und entweder $x \in D(A)$ oder A sektoriell. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i)

$$A\int_r^t T(s)x\,ds = (T(r)-T(t))x \text{ für } 0 \le r \le t\ ,$$

(ii)

$$A\int_r^t T(t-s)x\,ds = (\mathbb{1}-T(t-r))x \text{ für } 0 \le r \le t.$$

Insbesondere sind die Integrale in $D(A)$.

Beweis: Die Tatsache, daß die Integrale in $D(A)$ sind folgt aus der Abgeschlossenheit von A durch den schon öfters gezeigten Standardschluß. Dann zieht man den Operator unter das jeweilige Integral und die Aussage folgt sofort. □

Satz 4.3.2 *(i) Sei $(-A)$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ und sei $f : \mathbb{R}_+ \to X$ stetig differenzierbar. Dann ist für jedes $x_0 \in D(A)$ die durch* (4.3.9) *gegebene Abbildung $x : \mathbb{R}_+ \to X$ stetig differenzierbar und löst* (4.3.8)*.*

(ii) Ist A sektoriell und $f : \mathbb{R}_+ \to X$ Hölder-stetig mit Exponenten $\kappa \le 1$, so löst die für $x_0 \in X$ durch (4.3.9) *gegebene Abbildung die Gleichung* (4.3.8)*. Die Abbildung $x(\cdot)$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+$ und stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.*

Bemerkung 4.3.3 *Der Existenzsatz von Peano, welcher für gewöhnliche Differentialgleichungen die Lösbarkeit bei stetigen rechten Seiten garantiert, ist in Banachräumen, selbst bei stetigem A nicht gültig.*

Beweis: (i) Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.3.9) erfüllt die homogene Differentialgleichung und nimmt für $x_0 \in D(A)$ den Anfangswert an. Daher reicht es, zu zeigen, daß der zweite Term

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

für $t \to 0$ verschwindet und bei t die Ableitung $(-A)v(t) + f(t)$ besitzt. Es gilt

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \\ &= \int_0^t T(t-s)\left(f(0) + \int_0^s f'(r)\,dr\right) ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^t T(t-s)ds\right) f(0) + \int_0^t T(t-s) \int_0^s f'(r)dr\, ds \\
&= \left(\int_0^t T(t-s)ds\right) f(0) + \int_0^t \left(\int_r^t T(t-s)ds\right) f'(r)dr.
\end{aligned}
$$

Damit folgt aus Lemma 4.3.1, daß $v(t) \in D(A)$ und

$$
\begin{aligned}
Av(t) &= (\mathbb{1} - T(t))f(0) + \int_0^t (\mathbb{1} - T(t-r))\, f'(r)dr \\
&= f(t) - T(t)f(0) - \int_0^t T(t-r)f'(r)dr.
\end{aligned}
$$

Durch Substitution ergibt sich $v(t) = \int_0^t T(s)f(t-s)ds$ und somit

$$
v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds.
$$

Vergleicht man die beiden letzten Resultate, so erhält man $v'(t) = (-A)v(t) + f(t)$. Da f' stetig ist, folgt sofort, daß v stetig differenzierbar ist. Aus dem Beweis vom Satz von Hille Phillips Yosida ergibt sich eine exponentielle Schranke für das Wachstum der Halbgruppe: $T(t) \leq M \exp(\omega t)$. Daher konvergiert für $t \to 0$ auch $v(t) \to 0$, denn

$$
\|v(t)\| \leq 2Mt \sup\{\|f(t)\| \mid 0 \leq t \leq t_0\} \to 0
$$

für $t \to 0$ und ein t_0 genügend klein.
(ii) Der Beweis dieses Teils ist nahezu identisch mit dem ersten Teil, insbesondere definieren wir die Funktion v wie gehabt. Wie eben reicht es zu zeigen, daß $v(0) = 0$ ist und v die Differentialgleichung erfüllt. Durch Einschieben eines Terms ergibt sich aus

$$
v(t) = \int_0^t T(t-r)f(r)dr
$$

die Gleichung

$$
v(t) = \int_0^t T(t-r)(f(r) - f(t))dr + \int_0^t T(t-r)dr\, f(t).
$$

Eine erneute Anwendung von Lemma 4.3.1 ergibt $v \in D(A)$ und

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-r)(f(r)-f(t))dr + (\mathbb{1} - T(t))f(t). \tag{4.3.11}$$

Für den Integranden ergibt sich aus der Hölder-Stetigkeit von f die Abschätzung

$$\|AT(t-r)(f(r)-f(t))\| \leq C(t-r)^{-1}C_1(t-r)^{\kappa}.$$

Damit existiert dieses Integral und $Av(t)$ besitzt die Darstellung (4.3.11). Wir benötigen diese, um zu beweisen, daß $Av(t)$ stetig ist, was wir jetzt tun wollen.

Stetigkeit von $Av(t)$:
Der zweite Term in Gleichung (4.3.11) ist offenkundig stetig. Der erste Term werde mit $w(t)$ bezeichnet, also

$$w(t) = A\int_0^t T(t-r)(f(r)-f(t))dr.$$

Wir schreiben $w(t+h) - w(t) = w_1 + w_2 + w_3$ mit

$$\begin{aligned}
w_1 &= A\int_0^t (T(t+h-r) - T(t-r))\,(f(r)-f(t))\,dr \\
w_2 &= A\int_0^t (T(t+h-r))\,(f(t)-f(t+h))\,dr \\
w_3 &= A\int_t^{t+h} (T(t+h-r))\,(f(r)-f(t+h))\,dr.
\end{aligned}$$

Alle drei Ausdrücke werden unter Ausnutzung der Hölder-Stetigkeit leicht abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
\|w_1\| &\leq \int_0^t \|A\,(T(t+h-r) - T(t-r))\|\,\|f(r)-f(t)\|dr \\
&= \int_0^t \left\| A\int_s^{s+h} T'(\eta)d\eta \right\| \|f(t-s)-f(t)\|ds \\
&\leq \int_0^t A^2 \left\| \int_s^{s+h} T(\eta)\,d\eta \right\| s^\kappa ds \\
&\leq \int_0^t \left(\int_s^{s+h} \frac{C}{\eta^2} d\eta \right) s^\kappa\,ds \\
&\leq C\,h\int_0^t (s+h)^{-1} s^{-1+\kappa} ds \\
&\leq Ch^{\tilde{\kappa}}\ (0 < \tilde{\kappa} < \kappa \leq 1).
\end{aligned}$$

Für w_2 erhält man

$$\|w_2\| \leq C\,h^\kappa.$$

Ähnlich geht es mit w_3:

$$\begin{aligned}
\|w_3\| &\leq \int_t^{t+h} \|AT(t+h-r)\|\|f(r)-f(t+h)\|dr \\
&\leq C\int_t^{t+h} (t+h-r)^{-1+\kappa dr} \\
&\leq C\,h^\kappa.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies die Stetigkeit von $w(t)$.

Zurück zum eigentlichen Beweisgang: wir berechnen die rechtsseitige Ableitung $D^+v(t)$ als Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(v(t+h)-v(t)) = -Av(t)+f(t)$ (??!). Dies ist stetig, man überlegt sich leicht, daß daher v' existiert und gleich D^+v ist. Daher ist der Satz gezeigt. □

Wir benötigen noch eine weitere Abschwächung der Voraussetzung. Wir wollen die Hölder-Stetigkeit von f nur im Bereich positiver t verlangen, die Regularität bei 0 wird durch die Existenz eines uneigentlichen Integrals ersetzt.

Satz 4.3.4 *Ist $f : (0,T) \to X$ Hölder-stetig und existiert für ein $r > 0$ das uneigentliche Integral*

$$\int\limits_0^r \|f(s)\| ds,$$

so hat das Problem (4.3.8) *eine eindeutige Lösung, die durch* (4.3.9) *gegeben ist.*

Beweis: Wir definieren $v(t)$ wie zuvor. Dies hat dann die folgenden Eigenschaften:

(i) v ist stetig auf $[0,T)$,

(ii) v ist stetig differenzierbar auf $(0,T)$,

(iii) $\frac{dv}{dt} + Av = f$,

(iv) $v(t) \to 0$ für $t \to 0$.

Zum Beweis dieser Eigenschaften definieren wir für ein $\rho \in (0,r)$ die Funktion $v_\rho(t)$ durch

$$\begin{aligned} v_\rho(t) &= \int\limits_0^{t-\rho} \exp(-A(t-s))f(s)ds \text{ für } \rho \le t \le T \\ v_\rho(t) &= 0 \text{ für } 0 \le t < \rho. \end{aligned}$$

Wir setzen, um notationstechnische Probleme zu vermeiden, $f(s) = 0$ für $s < 0$. Offensichtlich konvergiert für $\rho \to 0$ v_ρ gleichmäßig auf Kompakta $[0,t_0] \subset [0,T)$ gegen v:

$$\|v_\rho(t) - v(t)\| \le \int\limits_{t-\rho}^{t} \|\exp(-(t-s)A)\| \, \|f(s)\| ds \to 0 \text{ gleichmäßig auf } [0,t_0].$$

Gleichermaßen ist die Stetigkeit von v_ρ klar: für die Differenz $v_\rho(t+h) - v(t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} v_\rho(t+h) - v_\rho(t) &= \int\limits_0^{t+h-\rho} e^{-(t+h-s)A} f(s)ds - \int\limits_0^{t-\rho} e^{-(t-s)A} f(s)ds \\ &= (e^{-hA} - \mathbb{1}) \int\limits_0^{t-\rho} e^{-(t-s)A} f(s)ds + \int\limits_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-(t+h-s)A} f(s)ds. \end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergieren beide Ausdrücke gegen 0. Daher ist $v(t)$ auf $[0, T)$ stetig und $\|v(t)\| \leq \int\limits_0^t \|e^{-(t-s)A}\| \, \|f(s)\| ds \to 0$ mit $t \to 0$. Damit sind die Punkte (i), (iv) gezeigt. Als nächstes wollen wir zeigen, daß $v(t) \in D(A)$ ist. Wir beginnen wieder mit $v_\rho(t)$. Für jedes $s \in (0, t)$ ist $e^{-(t-s)A} f(s) \in D(A)$. Dieser Ausdruck ist auf dem angegebenen Intervall stetig in s. Wir wenden A darauf an und fragen wieder nach Stetigkeit. Wir erhalten

$$Ae^{-(t-s+h)A} f(s+h) - Ae^{-(t-s)A} f(s) = (e^{-hA} - 1\!\!1) Ae^{-(t-s)A} f(s+h) + Ae^{-(t-s)A}(f(s+h) - f(s)).$$

Unter Ausnutzung der Hölder-Stetigkeit auf $(0, T)$ wird die Norm dieses Ausdrucks klein. Damit folgt aus Lemma 4.1.7, daß $v_\rho(t) \in D(A)$ ist und $Av_\rho(t)$ durch

$$Av_\rho(t) = \int\limits_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A} f(s) ds$$

gegeben ist. Dies wird zu

$$\begin{aligned} Av_\rho(t) &= \int\limits_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t) + f(t)) ds \\ &= \int\limits_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t)) ds + \int\limits_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A} f(t) ds \\ &= \int\limits_0^{t-\rho} Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t)) ds + \left(e^{-A\rho} - e^{-At}\right) f(t). \end{aligned}$$

Damit kann der Grenzübergang $\rho \to 0$ durchgeführt werden und man erhält

$$\lim_{\rho \to 0} Av_\rho(t) = \int\limits_0^t Ae^{-(t-s)A} \left(f(s) - f(t)\right) ds + (1\!\!1 - e^{-At}) f(t).$$

Wegen der Abgeschlossenheit von A ist $v(t) \in D(A)$ und $Av(t)$ durch den angegebenen Ausdruck gegeben. Eine einfache Rechnung ergibt, daß Av_ρ auf Kompakta gleichmäßig konvergiert.

Für $t > \rho$ ist $v_\rho(t)$ differenzierbar und für die zeitliche Ableitung ergibt sich

$$-Av_\rho + e^{-A\rho} f(t - \rho).$$

Für $\rho \to 0$ ergibt sich die angegebene Behautung. □

4.4 Nichtlineare Gleichungen

Betrachte das nichtlineare Cauchy-Problem

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} + Ax & = & f(t,x),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right\} \text{ gilt auf } (t_0, t_0+T). \tag{4.4.12}$$

Satz 4.4.1 *Es sei A sektoriell, $Re(\sigma(A)) > \delta > 0$. Dann existiert zu $\alpha > 0$ eine Konstante C_α mit*

$$\|A^\alpha \exp(-At)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},\ t > 0,$$

und für $\alpha \in (0,1],\ x \in X^\alpha$ gilt

$$\|(\exp(-At) - \mathbb{1})x\| \leq C_{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha} \|A^\alpha x\|.$$

Ferner ist C_α auf kompakten Intervallen in $(0,\infty)$ beschränkt.

Beweis: Wir wissen bereits, daß

$$\|\exp(-At)\| \leq Ce^{-\delta t},\ \|A\exp(-At)\| \leq Ct^{-1}e^{-\delta t}, t > 0,$$

und somit

$$\|A^m \exp(-At)\| = \|(A\exp(-A\frac{t}{m}))^m\| \leq (Cm)^m t^{-m} e^{-\delta t}.$$

Für $0 < \alpha < 1,\ t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|A^\alpha \exp(-At)\| &= \|A\exp(-At)A^{-(1-\alpha)}\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \|A\exp(-A(t+s))\| ds \\ &\leq Ct^{-\alpha} e^{-\delta t} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \|A^{\alpha+\beta} e^{-At}\| &\leq \|A^\alpha e^{-A\frac{t}{2}}\| \|A^\beta e^{-A\frac{t}{2}}\| \\ &\leq C_\alpha C_\beta 2^{\alpha+\beta} t^{-(\alpha+\beta)} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann das Resultat. Die letzte Behauptung erhält man aus

$$\begin{aligned} \|\exp(-At)x - x\| &= \|\int_0^t A\exp(-sA)x\, ds\| \\ &= \|\int_0^t A^{1-\alpha} \exp(-As) A^\alpha x ds\| \\ &\leq \int_0^t C_{1-\alpha} s^{\alpha-1} \exp(-\delta s) ds \|x\|_\alpha \\ &\leq \frac{C_{1-\alpha}}{\alpha} t^\alpha \|x\|_\alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 4.4.2 *Ist $x(t)$ eine Lösung des nichtlinearen Cauchy-Problems, so gilt*

$$x(t) = \exp(-A(t-t_0))x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-A(t-s))f(s,x(s))ds. \tag{4.4.13}$$

Andrerseits ist die Lösung x von (4.4.13) *mit $x \in C((t_0, t_0+T), X^\alpha)$ und*

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s,x(s))\|ds < \infty \text{ für ein } \rho > 0$$

auch Lösung von (4.4.12).

Beweis: Die Hinrichtung ist bereits geschehen. Sei also $x(t)$ eine Lösung von (4.4.13). Wir zeigen zunächst:
x ist Hölder-stetig bezüglich $\|.\|_\alpha$:

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= (\exp(-Ah) - \mathbb{1}) \exp(-A(t-t_0))x_0 \ + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} (\exp(-Ah) - \mathbb{1}) \exp(-A(t-s) f(s,x(s))ds \\ &\quad + \int_{t}^{t+h} \exp(-A(t+h-s) f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Wir schätzen die drei Ausdrücke nacheinander in der $\|.\|_\alpha$-Norm ab: (beachte das Bild von e^{At} ist in X^α für jedes $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} \|A^\alpha(e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-t_0}x_0\| &= \|(e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-t_0)}A^\alpha x_0\| \\ &\le C_{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{\alpha}\|A^\alpha \exp(-A(t-t_0)A^\alpha x_0\| \\ &\le C_{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{\alpha}C_\alpha(t-t_0)^{-\alpha}\|x\|_\alpha. \end{aligned}$$

Dies ist von der Form $K\,h^\alpha$. Den zweiten Term behandelt man ganz ähnlich, nur splittet man das Integral in zwei Teilintegrale

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} (e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds &= \int_{t_0}^{t_0+\rho} (e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0+\rho}^{t} (e^{-Ah} - \mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Übergang zur $\|.\|_\alpha$-Norm führt auf Integrale

$$\begin{aligned}
\|\int_{t_0}^{t}(e^{-Ah}-\mathbb{1})e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds\| &\leq \int_{t_0}^{t_0+\rho}\|(e^{-Ah}-\mathbb{1})e^{-A(t-s)}A^\alpha f(s,x(s))\|ds \\
&\quad + \int_{t_0+\rho}^{t}\|(e^{-Ah}-\mathbb{1})A^\alpha e^{-A(t-s)}f(s,x(s))\|ds \\
&\leq C_{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{\alpha}\int_{t_0}^{t_0+\rho}\frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha}\|f(s,x(s))\|ds \\
+ &\quad \int_{t_0+\rho}^{t}\|(e^{-Ah}-\mathbb{1})A^\alpha e^{-A(t-s)}\|\|f(s,x(s))\|ds \\
&\quad C_{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{\alpha}\int_{t_0}^{t_0+\rho}\frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha}\|f(s,x(s))\|ds \\
+ &\quad \int_{t_0+\rho}^{t}KC_{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{\alpha}\frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha}ds.
\end{aligned}$$

Wegen der Integrierbarkeitsvoraussetzung an f und der Integrierbarkeit der Singularität $(t-s)^{-alpha}$ sind die beiden Terme von der Form Ch^α. Dies impliziert

$$\|x(t+h)-x(t)\|-\alpha \leq C\left(h^\delta+\int_{t}^{t+h}(t+h-s)^\alpha ds\right)\leq Ch^\delta.$$

Somit ist auch $t\to f(t,x(t))$ Hölder-stetig und $x(t)$ Lösung von (4.4.12). □

Satz 4.4.3 *Es sei A sektoriell, $0\leq\alpha<1$, $f:U\subset\mathbb{R}\times X^\alpha\to X$ eine Abbildung mit f ist lokal Hölder-stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in x. Dann gibt es zu jedem Paar $(t_0,x_0)\in U$ ein $T(t_0,x_0)>0$, so daß (4.4.12) eine eindeutige Lösung $x(t)$ auf $[t_0,t_0+T)$ mit $x(t_0)=x_0$ besitzt.*

Beweis: Wir lösen nur die Integralgleichung (4.4.13). Dazu benutzen wir ein Fixpunktargument. Seien $T,\delta>0$. Für eine stetige Funktion $y:[t_0,t_0+T]\to X^\alpha$ mit $\|y(t)-x_0\|_\alpha<\delta$ setzen wir

$$G(y)(t)=e^{-A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(t-s)}f(s,y(s))ds.$$

Wir zeigen:

(i) G bildet für geeignete $T, \delta > 0$ die Menge

$$S = \{y \in C([t_0, t_0 + T], X^\alpha) \mid \|y(t) - x_0\|_\alpha < \delta\}$$

in sich ab.

(ii) Setzt man $\|y\|^T = \sup\{\|y(t)\|_\alpha \,|\, t_0 \le t \le t_0 + T\}$, so ist G bezüglich dieser Norm eine strikte Kontraktion.

Zu (i)

$$\|G(y)(t) - x_0\|_\alpha \le \|(e^{-A(t-t_0)} - \mathbb{1})x_0\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, y(s))\| ds.$$

Seien $\tau, \delta > 0$ so gewählt, daß mit $x_0 \in S$ die Menge

$$V = \{(t, x) \mid t \in [t_0, t_0 + \tau], \|x - x_0\| \le \delta\} \subset U$$

in U liegt und

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|_\alpha \text{ für } (t, x) \in V.$$

Sei $B = \sup\{\|f(t, x_0)\| \mid t \in [t_0, t_0 + \tau]\}$. Dann ist

$$\|f(s, y(s))\| \le B + L\delta \text{ für alle } y \in S.$$

Damit schließt man, daß, für $T < \tau$ genügend klein, gilt

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - x_0\|_\alpha &\le \frac{\delta}{2} + M(B + L\delta) \int_{t_0}^{t_0+T} (t - s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \\ &\le \delta. \end{aligned}$$

Da $G(y)$ auch stetig ist, folgt $G : S \to S$.

Zu (ii): Es seien $y, z \in S$ und $t_0 \le t \le t_0 + T$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - G(z)(t)\|_\alpha &\le \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\ &\le ML \int_{t_0}^{t} (t - s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \|y - z\|^T \\ &\le \frac{1}{2}\|y - z\|^T. \end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung muß $T < \tau$ genügend klein gewählt werden. Damit ist der zweite Punkt gezeigt.

Der Fixpunkt $x(\cdot)$ löst die Integralgleichung (4.4.13), $f(t, x(t))$ ist beschränkt für $t \searrow t_0$. Damit ist $x \in X^\alpha$ die eindeutige Lösung des nichtlinearen Cauchy Problems. □

Wie schon in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen stellt sich auch hier die Frage nach der Fortsetzbarkeit der Lösungen für $t \to \infty$. Wir wollen im folgenden Satz, den wir ohne Beweis angeben, diese Frage klären.

Satz 4.4.4 *Es seien A, f wie oben und zusätzlich gelte, daß für jede abgeschlossene und beschränkte Menge $B \subset U$ das Bild $f(B)$ in X beschränkt ist. Sei (t_0, t_1) das maximale Existenzintervall für das Anfangswertproblem $\dot{x} + Ax = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0 \in X^\alpha$. Dann ist entweder*

(i) $t_1 = \infty$
oder

(ii) es existiert eine Folge $t_n \nearrow t_1$ mit $(t_n, x(t_n)) \to \partial U$.

Satz 4.4.5 *Seien A, f wie oben und für alle abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen $B \subset X^\alpha$ mit $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ sei $f(\mathbb{R}^+ \times B)$ beschränkt in X. Ferner habe A eine kompakte Resolvente. Dann gilt: ist $x(t, t_0, x_0)$ eine in X^α beschränkte Lösung auf $[t_0, \infty)$, so ist $\{x(t, t_0, x_0) \mid t > t_0\}$ relativ kompakt in X^α.*

Beweis: Sei $\alpha < \beta < 1$. Dann ist $X^\beta \subset X^\alpha$ kompakt eingebettet. Wir zeigen daher nur, daß $\|x(t, t_0, x_0)\|_\beta$ auf $[t_0 + 1, \infty)$ beschränkt ist. Sei o.B.d.A. $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > \delta > 0$ und $\|f(t, x(t, t_0, x_0))\| \leq C$ für alle $t \geq t_0$. Dann ist

$$\|x(t, t_0, x_0)\|_\beta \leq M(t - t_0)^{-(\beta-\alpha)} e^{-\delta(t-t_0)} \|x_0\| + MC \int_{t_0}^{t} (t - s)^{-\beta} e^{-\delta(t-s)} ds.$$

und somit für $t > t_0 + 1$ beschränkt. □

Bemerkung 4.4.6 *Die Lösung der Gleichung*

$$\begin{aligned} \dot{x} + \mu A x &= f(t, x, \lambda), \ t > t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

hängt glatt von den Parametern λ, t_0, x_0, μ ab. Genauer gilt: ist $(x, \lambda, t) \mapsto f(t, x, \lambda)$ in C^r, $1 \leq r < \infty$, glatt, so ist die Abbildung

$$(t_0, x_0, \lambda, \mu) \to x(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) \text{ auch } C^r.$$

Satz 4.4.7 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes* 4.4.3 *und zusätzlich sei f in beiden Variablen Lipschitz-stetig. Die Lösung des nichtlinearen Cauchy Problems ist dann sogar in $C^{1,\delta}((t_0, t_0+T), X^\gamma)$ für alle $\gamma < 1$ und ein geeignetes $\delta < 1 - \gamma$.*

Hilfssatz 4.4.8 *(i) Es sei A sektoriell, $g : (0,T) \to X$ genüge der Bedingung*

$$\|g(t)-g(s)\| \le K(s)(t-s)^\gamma \text{ für } 0 < s < t < T < \infty,\ 0 < \gamma < 1, \tag{4.4.14}$$

wobei $K : (0,T) \to \mathbb{R}_+$ stetig sei und das uneigentliche Integral

$$\int_0^T K(s)ds < \infty$$

existiere. Dann gilt

(a)

$$G(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} g(s)ds$$

ist für $0 \le \beta < \gamma$ eine stetig differenzierbare Abbildung $G : (0,T) \to X^\beta$.

(b) Es gilt eine Abschätzung der Form

$$\left\|\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_\beta \le M\, t^{-\beta}\|g(t)\| + M \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma-\beta} K(s)ds$$

für $0 < t < T$ und eine Konstante M unabhängig von β, γ und g.

(ii) Ist

$$\int_0^h K(s)ds = O(h^\delta),\ h \searrow 0,\ \text{für ein } \delta > 0,$$

so ist die Abbildung $t \to \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(t)$ Hölder-stetig mit Exponent δ.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(t) &= g(t) - \int_0^t Ae^{-A(t-s)} g(s)ds \\
&= g(t) - \int_0^t T'(t-s)(g(t)-g(s))ds + \int_0^t T'(t-s)g(t)\,dt \\
&= \underbrace{\int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t)-g(s))ds}_{H(t)} + e^{-At}g(t),
\end{aligned}$$

denn $\int_0^t -Ae^{-A(t-s)}g(t)ds = e^{-At}g(t) - g(t)$. Der zweite Term der rechten Seite in obiger Gleichung ist offensichtlich in X^β und $t \mapsto e^{-At}g(t)$ ist lokal Hölder-stetig.

Wir betrachten den ersten Term und untersuchen ihn auf Zugehörigkeit zu X^β, also:

$$\|\int_0^t A^{1+\beta}e^{-A(t-s)}(g(t)-g(s))ds\| \leq M\int_0^t \frac{(t-s)^\gamma}{(t-s)^{1+\beta}}K(s)ds.$$

Damit ist die in (i), Unterpunkt (b), behauptete Abschätzung gezeigt und $G(t) \in X^\beta$, also gilt auch (b) und somit (i).

(ii) Wir untersuchen die Differenz $H(t+h) - H(t)$.

$$\begin{aligned}
H(t+h) - H(t) &= \int_0^{t+h} Ae^{-A(t+h-s)}((t+h) - g(s))ds - \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t)-g(s))ds \\
&= \int_0^h Ae^{-A(t+h-s)}(g(t+h)-g(s))ds + \int_0^t Ae^{-A(t-\tau)}(g(t+h)-g(\tau+h))d\tau \\
&\qquad - \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t)-g(s))ds \\
&= \int_0^h Ae^{-A(t+h-s)}(g(t+h)-g(s))ds \\
&\qquad + \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(g(t+h)-g(s+h)-g(t)+g(s))ds
\end{aligned}$$

Wir schätzen die Normen der beiden Ausdrücke getrennt ab:

$$\begin{aligned}
\int_0^h \|Ae^{-A(t+h-s)}\|\|g(t+h)-g(s)\|ds &\leq M\int_0^h (t+h-s)^{-1+\gamma}K(s)ds \\
&\leq \frac{C}{t^{1-\gamma}}\int_0^h K(s)ds.
\end{aligned}$$

Es bleibt der zweite Ausdruck. Wir bemerken zunächst, daß wir

$$\|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\|$$

auf zwei Weisen abschätzen können. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\| &\leq \|g(t+h) - g(s+h)\| + \|g(t) - g(s)\| \\
&\leq K(s+h)(t-s)^\gamma + K(s)(t-s)^\gamma,
\end{aligned}$$

aber auch

$$\begin{aligned}
\|g(t+h) - g(t) - g(s+h) + g(s)\| &\leq \|g(t+h) - g(t)\| + \|g(s+h) - g(s)\| \\
&\leq K(t)h^\gamma + K(s)h^\gamma,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\|g(t+h)-g(t)-g(s+h)+g(s)\| &\leq C\min\{h^\gamma,(t-s)^\gamma)\} \\
&\leq C\,h^{\tilde\delta}\min\{h^{\gamma-\tilde\delta},(t-s)^{\gamma-\tilde\delta}\}.
\end{aligned}$$

Also folgt mit $g^h(t)=g(t+h)-g(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|Ae^{-A(t-s)}\|\|g^h(t)-g^h(s)\|ds &\leq \int_0^t \frac{MC}{t-s}h^{\tilde\delta}\min\{h^{\gamma-\tilde\delta},(t-s)^{\gamma-\tilde\delta}\}ds \\
&\leq CMh^{\tilde\delta}\int_0^t (t-s)^{-1+(\gamma-\tilde\delta)}ds \\
&\leq CMKh^{\tilde\delta}.
\end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes 4.4.7: Wir wollen zeigen, daß $\frac{dx}{dt}\in X^\gamma$ und $t\mapsto\frac{dx}{dt}$ als Abbildung $(t_0,t_1)\to X^\gamma$ lokal Hölder-stetig ist. Die Lösung $x(t)$ hat die Gestalt

$$x(t)=e^{-A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s,g(s)ds.$$

Offensichtlich hat der erste Term die gewünschten Eigenschaften. Wir wollen also den zweiten Term betrachten. Setze $g(s)=f(s,x(s))$ und prüfe die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4.4.8. Zunächst betrachte man

$$\|g(t)-g(s)\|\leq L((t-s)+\|x(t)-x(s)\|_\alpha.$$

Sei $t_0<\tau<s<t_1$. Setze $x_\tau=x(\tau)$ und betrachte dies als Anfangswert. Dann ist für $0<\alpha<\beta<1$ $\|x_\tau\|_\beta<C_1(\tau-t_0)^{\alpha-\beta}$. Für die Differenz $x(t)-x(s)$ erhält man

$$\begin{aligned}
x(t)-x(s) &= \left(e^{-Ah}-\mathbb{1}\right)e^{-A(s-\tau)}x(\tau) \\
&+\int_\tau^s e^{-A(s-r)}\left(f(r+t-s,x(r+t-s))-f(r,x(r))\right)ds \\
&+\int_\tau^{\tau+t-s} e^{-A(t-r)}f(r,x(r))ds.
\end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}
\|g(t)-g(s)\| &\leq C\,(t-s)\left((s-\tau)^{-1+\beta-\alpha}\|x_\tau\|_\beta+(s-\tau)^{-\alpha}\right) \\
&+\int_\tau^s LM(s-r)^{-\alpha}\|x(r+t-s)-x(r)\|_\alpha ds
\end{aligned}$$

Für $s-\tau$ genügend klein, kann der letzte Term durch den ersten Term abgeschätzt werden und man erhält

$$\|g(t)-g(s)\| \leq C\,(t-s)\left((s-\tau)^{-1+\beta+\alpha}\|x_\tau\|_\beta + (s-\tau)^{-\alpha}\right).$$

Damit kann der Hilfssatz 4.4.8 angewendet werden. Dies ergibt $t \mapsto x(t)$ ist eine Hölder-stetige Abbildung von $[t_0,t_1) \to X^\gamma$. Die X^γ-Norm von $\frac{dx}{dt}$ läßt sich abschätzen zu

$$\begin{aligned}\|\frac{dx}{dt}\|_\gamma &\leq C[(t-\tau)^{\beta-\gamma-1}\|x\|_\beta + (t-\tau)^{-\gamma}] \\ &\leq C[(t-\tau)^{\beta-\gamma-1}(\tau-t_0)^{\alpha-\beta} + (t-\tau)^{-\gamma}]\end{aligned}$$

Mit der Wahl $t-\tau = \tau - t_0 = \frac{1}{2}(t-t_0)$ wird dies zu

$$\|\frac{dx}{dt}\|_\gamma = C(t-t_0)^{\alpha-\gamma-1}.$$

□

Satz 4.4.9 *Es sei A sektoriell auf $X = L^2(\Omega)$ und $D(A) = X^1 = W^{m,p}(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand ist und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für $0 \leq \alpha \leq 1$:*

$$\begin{aligned} X^\alpha &\hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \text{ falls } m\alpha - n/p > k - n/q,\ q \geq p, \\ X^\alpha &\hookrightarrow C^{\ell,\nu}(\Omega), \text{ falls } m\alpha - n/p > \ell + \nu \geq 0. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe z.B. Henry: Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer Lecture Notes in Mathematics 840. □

Satz 4.4.10 (Nemitski[1]-Operatoren) *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-stetigem Rand. Es sei A ein sektorieller Operator auf $X = L^p(\Omega)$, $D(A) = W^{2,p}(\Omega)$. Ferner sei $f \in C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$, und genüge der Wachstumsbedingung*

$$|f^i(u)| \leq C(1+|u|^{\gamma-i}),\ \text{für } 0 \leq i \leq k,$$

mit

$$0 \leq k \leq \gamma < \frac{n}{n-2\alpha p}.$$

Dann ist der Einsetzungsoperator

$$T(u)(.) = f(u(.)) : X^\alpha \to X$$

$k-$mal stetig differenzierbar und Bilder beschränkter Mengen sind beschränkt.

Beweis: Der Beweis wird durch eine Reihe von Lemmata erbracht. □

[1] Nemitski

Lemma 4.4.11 (Krasnoselski[2]) *Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und genügt g der Wachstumsbedingung*

$$|g(u)| \leq C(g)(1+|u|)^{\gamma},\ \gamma \geq 1,$$

dann ist für $1 \leq r < \infty$ der Einsetzungsoperator

$$G : L^{\gamma r}(\Omega) \to L^{r}(\Omega),\ u(\cdot) \mapsto g(u(\cdot))$$

für $1 \leq r \leq \infty$ stetig und Bilder beschränkter Mengen sind beschränkt.

Beweis: Zunächst ist zu prüfen, daß die Abbildung wohldefiniert ist. Dies ist jedoch offenkundig.

Wir kommen zur Stetigkeit. Es sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^{\gamma r}(\Omega)$, welche gegen u konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, setze

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\ 3^{\gamma r} C(g) \|1+|u|\|^{\gamma r}_{L^{\gamma r}(\Omega)}}.$$

Nach dem Satz von Egorov, existiert eine kompakte Menge $A \subset \Omega$ mit $|\Omega \setminus A| < \delta$, so daß die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen u konvergiert. Dann ist

$$\int_{\Omega} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx = \int_{\Omega\setminus A} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx + \int_{A} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx.$$

Der erste Summand ist beschränkt durch

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus A} |g(u_k(x)) - g(u(x))|^r dx &\leq C(g) \int_{\Omega\setminus A} (2+|u|+|u_k|)^{\gamma r} dx \\
&\leq C(g) 2^{\gamma r} \int_{\Omega\setminus A} (1+|u|)^{\gamma r} + (1+|u_k|)^{\gamma r} dx \\
&\leq 3C(g) 2^{\gamma r} \int_{\Omega\setminus A} (1+|u|)^{\gamma r} dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Im zweiten Integral konvergiert der Integrand gleichmäßig gegen Null und damit das Integral gegen 0. □

Lemma 4.4.12 *Die Abbildung T aus Satz* 4.4.10 *ist stetig.*

[2]Krasnoselski ist ein zeitgenössischer russischer Mathematiker mit einer Vielzahl von Arbeiten zu verschiedenen Gebieten der Analysis bzw. Differentialgleichungen. U.a. gehen globale Verzweigungssätze auf ihn zurück. Er wuchs nach der russischen Revolution in einem ländlichen Gebiet auf und war weitgehend Autodidakt.

Beweis: Seien n, p, k, γ wie im Satz 4.4.10. Nach Satz 4.4.9 ist $X^\alpha \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $q < \frac{np}{n-2p\alpha}$. Damit ist dann

$$|f(u)|^p \leq C(1 + |u|^{\gamma p})$$

in $L^1(\Omega)$, falls $\gamma p < q$ oder auch $\gamma < \frac{n}{n-2p\alpha}$ ist. Die Stetigkeit folgt aus dem Lemma 4.4.11. □

Lemma 4.4.13 *Die Abbildung T aus dem Satz* 4.4.10 *ist C^1. Die Ableitung ist durch den Ausdruck*

$$DT(u)[v](\cdot) = f'(u(\cdot))v(\cdot)$$

gegeben.

Beweis: Wir untersuchen zunächst die Abbildung

$$G(u) = f'(u) : X^\alpha \to L^{p'}(\Omega).$$

Gemäß dem vorigen Lemma ist G stetig, falls

$$(\gamma - 1)p' < \frac{np}{n - 2\alpha p}.$$

Weiterhin ist $v \in X^\alpha$ auch in $L^{q'}(\Omega)$, falls

$$q' < \frac{np}{n - 2p\alpha}.$$

Mit der Hölder-Ungleichung erhält man $f'(u)v \in L^p(\Omega)$, falls

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{p'} \leq 1.$$

Dies kann laut Voraussetzung erfüllt werden. Es bleibt zu zeigen, daß $f'(u)v$ wirklich die Ableitung von T ist, also:

$$\begin{aligned}
&\|T(u+h) - T(u) - DT(u)[h]\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \leq \left(\int_\Omega |f(u(x) + h(x) - f(u(x)) - f'(u(x))h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq \left(\int_\Omega |\int_0^1 (f'(u(x) + sh(x)) - f'(u(x)))h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq C \left(\int_\Omega \int_0^1 |f'(u(x) + sh(x)) - f'(u(x))|^p |h(x)|^p ds dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq \int_0^1 \|f'(u(x) + sh(x)) - f'(u(x))\|_{L^{pr}(\Omega)} ds \|h\|_{L^{pr'}(\Omega)} \|
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Da f' stetig von X^α nach $L^{p'}(\Omega)$ ist, folgt, daß $T \in C^1$ ist, falls eine geeignete Wahl von r möglich ist.

r muß aufgrund der Einbettungen die Bedingungen

$$\begin{aligned} r(\gamma - 1) &< \frac{n}{n - 2\alpha p} \\ r' &< \frac{n}{n - 2\alpha p} \\ \gamma &< \frac{n}{n - 2\alpha p} \end{aligned}$$

erfüllen. Setze $\rho = \frac{n}{n-2\alpha p}$. Dann folgt aus $r' < \rho$, $r > \frac{\rho}{\rho - 1}$. Die erste Ungleichung ergibt $r < \frac{\rho}{\gamma - 1}$. Beide sind wegen $\gamma < \rho$ zu erfüllen.

Schließlich muß noch der gleiche Schritt mit C^k durchgeführt werden. Der geht aber genauso. □

4.5 Klassische Lösbarkeit einer nichtlinearer parabolischen Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die bisher entwickelte Theorie anwenden, um die klassische Lösbarkeit einer gewissen nichtlinearen parabolischen Gleichung nachzuweisen. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, Δ der Laplace–Operator und $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, deren genaue Eigenschaften weiter unten angegeben werden. Wir wollen das Dirichlet–Problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \Delta u + f(t, x, u, \nabla u) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

untersuchen.

Für unsere Betrachtungen benötigen wir Verschärfungen früher angegebener Sätze. Wir wollen diese ohne Beweis angeben.

Satz 4.5.1 *Der Raum $W^{1,p}(\Omega)$ ist kompakt eingebettet in*

(i) $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ *für* $p < n$

(ii) $C^\delta(\Omega)$ *für* $0 < \delta p < p - n$, *d.h. für* $p > n$ *sind die Funktionen in* $W^{1,p}(\Omega)$ *Hölder-stetig.*

Darüberhinaus brauchen wir noch eine Verallgemeinerung der elliptischen Theorie.

Satz 4.5.2 *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 3.4.1 *hat die Gleichung*

$$\begin{aligned} Lu &= f \\ u &= 0 \quad \textit{auf} \ \partial\Omega \end{aligned}$$

für $f \in L^q(\Omega)$ *eine Lösung* $u \in W^{2,q}(\Omega)$. *Ist* $f \in C^\delta(\Omega)$, $0 < \delta < 1$, *so ist* $u \in C^{2,\delta}(\Omega)$

Bemerkung: Die zuletzt gemachte Aussage wird im Rahmen der Schauderschen[3] Theorie elliptischer Gleichungen hergeleitet.

Betrachte zunächst das lineare elliptische Problem: sei $X = L^2(\Omega)$ und A definiert durch

$$Au = g \Leftrightarrow \int_\Omega gvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \ g \in X, \ u \in H_0^1(\Omega), \text{ für alle } v \in H_0^1(\omega).$$

Dann ist $A = -\Delta$ auf $C^2(\Omega)$ und $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nach Satz 4.4.9 $(n = 3)$ ist $X^\alpha \subset W^{1,q}$ für $\alpha > \frac{1}{2}$ und $2 \leq q < \frac{6}{5-4\alpha}$, d.h. $\alpha > \frac{5q-6}{4q}$. Ferner ist für $\alpha > \frac{3}{4}$ $X^\alpha \subset L^\infty(\Omega)$. Setze $q = 2\tilde{q}$. Dann folgt aus dem eben gesagten, daß für

$$1 > \alpha > \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{5\tilde{q}-3}{4\tilde{q}}\right\}$$

folgt

$$X^\alpha \subset W^{1,2\tilde{q}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Lemma 4.5.3 *Wir setzen voraus, daß die Abbildung* $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *in allen Variablen lokal Lipschitz-stetig ist und eine stetige, im zweiten Argument monoton steigende Funktion* $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *und eine Zahl* $1 \leq \tilde{q} < 3$ *existieren, so daß*

$$\begin{aligned} |f(t,x,u,\xi)| &\leq B(t,|u|)(1 + |\xi|^{\tilde{q}}) \\ |f(t,x,u,\xi) - f(t,x,u,\eta)| &\leq B(t,|u|)(1 + |\xi|^{\tilde{q}-1} + |\eta|^{\tilde{q}-1})|\xi - \eta| \\ |f(t,x,u,\xi) - f(t,x,v,\xi)| &\leq B(t,|u|+|v|)(1 + |\xi|^{\tilde{q}})|u - v|. \end{aligned}$$

Dann hat für

$$\alpha > \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{5\tilde{q}-3}{4\tilde{q}}\right\}$$

die Abbildung

$$F(t,u) = f(t,x,u(x),\nabla u(x))$$

die folgenden Eigenschaften:

---

[3] Juliusz Pawel Schauder 1899-1943, bedeutender polnischer Mathematiker, Arbeiten in der nichtlinearen Funktionalanalysis mit tiefliegenden Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Er wurde 1943 zusammen mit seiner Familie von den Faschisten ermordet.

(i)

$$\|F(t,u)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2B(t, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \left(\sqrt{|\Omega|} + (\|u\|^{\Omega}_{1,2\tilde{q}})^{\tilde{q}}\right)$$

(ii) F ist auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ definiert und bezüglich t lokal Hölder-stetig und in $u \in X^\alpha$ lokal Lipschitz-stetig.

Beweis: Sei $X = L^2(\Omega)$. Für den ersten Schritt betrachten wir

$$\begin{aligned} \|F(t,u)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\int\limits_\Omega |f(t,x,u(x),\nabla u(x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int\limits_\Omega (B(t,|u(x)|)(1+|\nabla u(x)|^{\tilde{q}}))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2B(t,\|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \left(\sqrt{|\Omega|} + (\|u\|^{\Omega}_{1,2\tilde{q}})^{\tilde{q}}\right) \end{aligned}$$

Die lokale Hölder Stetigkeit bezüglich t folgt direkt aus der lokalen Hölder Stetigkeit von f. Die lokale Lipschitz-Stetigkeit bezüglich $x \in X^\alpha$ zeigt man wie zuvor den ersten Schritt. □

Damit haben wir die Voraussetzungen der abstrakten Existenzsätze nachgeprüft und erhalten für $u_0 \in X^\alpha$ eine eindeutige Lösung $u(t,x;t_0,u_0)$ auf einem maximalen Existenzintervall $[t_0,t_1)$.

Satz 4.5.4 *Die Lösung des Anfangsrandwertproblems $u(t,x;t_0,u_0)$ ist in $t > t_0$ stetig differenzierbar und $u(t,.;t_0,u_0) \in C^2(\Omega)$. Damit ist $u(t,x;t_0,u_0)$ eine klassische Lösung des Problems.*

Beweis: Wir beginnen mit der Lösung des abstrakten Problems $u(t,.;t_0,u_0) \in D(A)$. Man zeigt, daß $t \mapsto \frac{du}{dt}$ lokal Hölder-stetig als Abbildung $t \to X^\alpha$ ist. Also ist

$$(t,x) \mapsto \left(u(t,x;t_0,u_0), \frac{du(t,x;t_0,u_0)}{dt}\right)$$

stetig in t,x. Da $u \in D(A)$, folgt $\nabla u \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, aufgrund der obigen Verschärfung des entsprechenden Einbettungssatzes. Also ist $Au = F(t,u) - \frac{du}{dt} \in L^{6/k}(\Omega)$ (beachte die Abschätzung für F). Damit ist $u \in W^{2,6/k}(\Omega)$. Ist $\tilde{q} < 2$, so ist $6/\tilde{q} > 3$ und wiederum die obige Verschärfung der Einbettung liefert, daß $W^{1,6/\tilde{q}}(\Omega)$ kompakt in den Raum $C^\delta(\Omega)$ einbettet. Damit ist $\nabla u(t,.;t_0,u_0)$ Hölder-stetig und $F(t,u(t,.;t_0,u_0)) \in C^\delta(\Omega)$. Der Schaudersche Existenzsatz liefert $u \in C^{2,\delta}(\Omega)$.

Der verbleibende Fall ist $\tilde{q} \geq 2$. Wir konstruieren eine Folge $p_{n+1} > p_n$, so daß $u \in W^{2,p_n}(\Omega)$ impliziert, daß $u \in W^{2,p_{n+1}}(\Omega)$ ist. Ferner kann die Folge so gewählt werden, daß ein n existiert mit $p_n > 3$. Sei $p_n > 2$. Dann ist

$\nabla u \in W^{1,p_n}(\Omega)$. Dieser Raum bettet nach $L^r(\Omega)$ ein, für jedes r mit $r < \frac{3p_n}{3-p_n}$. Wiederum ist $Au \in L^{q/\tilde{q}}(\Omega)$ und damit $u \in W^{2,q/\tilde{q}}(\Omega)$. Obige Abschätzungen für q ergeben $\frac{q}{\tilde{q}} < \frac{3}{\tilde{q}} \frac{p_n}{3-p_n}$. Also ist $p_{n+1} < \frac{3}{\tilde{q}} \frac{p_n}{3-p_n}$. Diese Folge überschreitet nach endlich vielen Schritten den Wert 3. $\square$

4.6 Lineare parabolische Gleichungen

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir formal allgemeine lineare parabolische Gleichungen zweiter Ordnung definieren und sehen, wie die abstrakte Lösung des Cauchy–Problems zum Nachweis von Existenz und Glattheit der Lösungen linearer parabolischer Glei chungen herangezogen werden kann.

Definition 4.6.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $T > 0$. Der* parabolische Zylinder über Ω der Höhe T *ist gegeben durch $Q_T = \Omega \times (0, T)$.*

Definition 4.6.2 *Es sei $L(x, t)$ ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf einem Gebiet Ω. Der Differentialoperator*

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} + Lu$$

auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ heißt parabolisch, *falls für jedes $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ der Operator $L(x, t)$ elliptisch ist, wobei die Elliptizitätskonstanten von t, x abhängen dürfen. Entsprechend nennt man P stark parabolisch, bzw. gleichmäßig parabolisch, falls L die entsprechenden Eigenschaften besitzt.*

Definition 4.6.3 *Ein lineares parabolischen Anfangsrandwertproblem besteht aus einer Differentialgleichung*

$$Pu = f \text{ in } Q_T, \tag{4.6.15}$$

einer Randbedingung

$$Bu = \phi \text{ auf } S_T = \partial Q_T \cap \{T > t > 0\}, \tag{4.6.16}$$

wobei ϕ eine gegebene Funktion und B i.a. ein Differentialoperator ist, und schließlich aus einem Anfangswert

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ in } \Omega. \tag{4.6.17}$$

Definition 4.6.4 *Eine stetige Funktion $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ heißt klassische Lösung der Anfangsrandwertaufgabe* (4.6.15), (4.6.16), (4.6.17), *falls die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $D_{ij}u$ existieren und auf $Q_T \cup \Omega$ stetig sind und die Gleichungen* (4.6.15),(4.6.16), (4.6.17) *erfüllt sind.*

Im folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, daß L nicht von t abhängt. Ist A der L zugeordnete Operator $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, so ist dieser sektoriell, falls Ω beschränkt ist, L stark elliptisch ist mit Koeffizienten a^{ij} welche auf $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbar sind, und die Koeffizienten b^i auf $\overline{\Omega}$ stetig sind. Mit $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ wird $(-A)$ zum Erzeuger einer analytischen Halbgruppe. Da die Lösung für $t > 0$ in $D(A^m)$ für alle m ist, folgt die klassische Lösbarkeit. Wir haben also gezeigt:

Satz 4.6.5 *Es sei P ein parabolischer Differentialoperator, der nicht von t abhängt, mit glatten Koeffizienten a^{ij}, b^i, dessen elliptischer Anteil stark elliptisch sei. Dann hat das Anfangsrandwertproblem eine eindeutige klassische Lösung.*

4.7 Navier–Stokessche Gleichungen

Wie bereits in der Einführung erwähnt, modellieren die nach Navier und Stokes benannten Gleichungen die Strömung von Flüssigkeiten und Gasen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die zu bestimmenden Größen sind die Strömung und der Druck an jeder Stelle. Die Strömung wird durch einen Vektor in $U : \Omega \to \mathbb{R}^3$ wiedergegeben. Der Druck ist eine skalare Größe $p : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir schreiben $U = (u_1, u_2, u_3)$ und $P = \operatorname{grad} p$. Dann hat die Aufgabenstellung für $t > t_0$ und $x \in \Omega$ die Gestalt

(i)
$$\frac{\partial U}{\partial t} - \rho \Delta U = -P - W - F,$$

wobei
$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$$

ist und $W = (w_1, w_2, w_3)$ durch
$$w_j = \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

gegeben ist, und $F = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$ ist,

(ii)
$$\operatorname{div} U = 0$$

(iii) und Randwerte z.B. $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [t_0, \infty)$ vorgeschrieben werden

(iv) und ein Anfangswert $U(x, t_0) = U_0(x)$ gegeben ist.

Auf den ersten Blick ist unsere Theorie nicht anwendbar, da z.B. p keine Zeitableitung hat, und die Gleichung $\operatorname{div} U = 0$ auch nicht die erforderliche Gestalt hat.

Sei U_N die Komponente von U normal zum Rand. Wir betrachten die Menge der Abbildungen

$$U : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

welche stetig differenzierbar sind, und den Bedingungen $\operatorname{div} U = 0$ und $U_N = 0$ genügen. Dann folgt für jede Funktion $\Phi \in C^1(\Omega)$

$$\int_\Omega U \nabla \Phi dx = 0. \tag{4.7.18}$$

Es gilt auch die Umkehrung, d.h. jedes Vektorfeld U, welches der Gleichung (4.7.18) für jedes $\Phi \in C^1(\Omega)$ genügt, ist divergenzfrei. Sei H_π der Abschluß in $(L^2(\Omega))^3$ der Gradientenfelder und H_σ das orthogonale Komplement. H_σ ist der Abschluß der divergenzfreien, glatten Vektorfelder mit verschwindender Normalenkomponente. (Warum ist dies so??) Projektion der Gleichung in H_σ ergibt eine Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \rho A V = N(V) + F_\sigma(t).$$

A wird zum selbstadjungierten, dicht definierten Operator auf H_σ. Für die gebrochenen Exponenten erhält man:

Satz 4.7.1 *(i) Für $\alpha \in (1/2, 1)$ gilt $H_\sigma^\alpha \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ für $q < 6/(5 - 4\alpha)$.*

(ii) Für $\alpha \in (3/4, 1)$ ist $H_\sigma^\alpha \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Damit kann nun die Nichtlinearität untersucht werden. Für $\alpha > 3/4$ erhält man

$$\|N(v)\| \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le C \|v\|_{X^\alpha}^2.$$

Damit ist N ein beschränktes Polynom $H_\sigma^\alpha \to H_\sigma$. Für $V_{t_0} \in H_\sigma$ und Hölderstetigem f existiert damit eine Lösung auf einem maximalen Existenzintervall $[t_0, t_1)$. Ein ähnliches Verfahren wie im Abschnitt 4.5 ergibt klassische Lösbarkeit.

Anhang A

Hilfsmittel aus der Analysis

A.1 L^p-Räume

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Teilgebiet des $\mathbb{R}^n$. Wir wollen an dieser Stelle offen lassen, ob Ω beschränkt oder

unbeschränkt sei. Wir setzen den Begriff des Lebesgue-Maßes und auch den entsprechenden Integralbegriff als bekannt voraus. Mit μ werde das Lebesgue-Maß bezeichnet. Wir schreiben für $p \geq 1$

$$\tilde{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist meßbar und } |f|^p \text{ ist summierbar}\}.$$

Es ist einfach nachzuprüfen, daß $\tilde{L}^p(\Omega)$ ein reeller Vektorraum ist. Wir setzen für $f \in \tilde{L}^p(\Omega$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ definiert keine Norm auf $\tilde{L}^p(\Omega)$, denn $\|f\|_p = 0$ impliziert nur $f = 0$ μ-fast überall. Daher schreiben wir

$$N = \{f \in \tilde{L}^p(\Omega) \mid \|f\|_p = 0\}$$

und setzen

$$L^p(\Omega) = \tilde{L}^p(\Omega)/N.$$

Es gilt $L^p(\Omega)$ ist mit $\|f\| = \|f\|_p$ ein reeller normierter Vektorraum.

Aufgabe A.1.1 *Man zeige die Dreiecksungleichung für* $\|\cdot\|_p$.

Aufgabe A.1.2 *Es seien* $p > 1,\ q > 1,\ f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Man zeige

(i) $fg \in L^1(\Omega)$ *und*

(ii) die sogenannte Hölder'sche Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Der Raum $L^\infty(\Omega)$ wird auf ähnliche Weise konstruiert. Wie zuvor betrachten wir den Raum $\tilde{L}^\infty(\Omega)$ als den Raum der Funktionen

$$\tilde{L}`\infty(\Omega) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist meßbar und } \mu\text{-fast überall beschränkt.}\}$$

Wie zuvor betrachten wir den Raum N der μ fast überall verschwindenden Funktionen. Dann ist

$$L^\infty(\Omega) = \tilde{L}^\infty(\Omega)/N.$$

Wir führen die Norm einer Klasse $[f]$ ein als

$$\|[f]\|_\infty = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \mu \text{ fast überall gilt } |f| < c\}.$$

Wir schreiben im Regelfall für $f \in [f]$ $\|f\|_\infty$ statt $\|[f]\|_\infty$.

Der Satz von Riesz-Fischer besagt, daß jeder der Räume $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$ vollständig ist und damit zum Banachraum wird. Speziell ist der Raum $L^2(\Omega)$ sogar ein Hilbertraum, wenn man als inneres Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

zugrunde legt. Man prüfe nach, daß $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist!

Aufgabe A.1.3 *Für welche Werte p, q gilt $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$?*

Lemma A.1.4 *Ist Ω beschränkt und ist $1 \leq q < p$, so gilt $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ und man hat für $u \in L^q(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Beweis: Sei $r = \frac{p}{q}$, so ist $|f|^q \in L^r(\Omega)$ und mit der Hölder'schen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|f\|^{\frac{1}{q}}_{L^r(\Omega)} \|1\|^{\frac{1}{q}}_{L^{r'}(\Omega)} \\ &= \|f\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

A.2 Fourierreihen

Der berühmte Approximationsatz von Weierstraß besagt, daß stetige Funktionen durch Polynome approximiert werden können. Es stellt sich die Frage, ob dies auch mit sogenannten trigonometrischen Polynomen, bei hinreichend glatten 2π/periodischen Funktionen, möglich ist. Dabei hat ein *trigonometrisches Polynom* $T_n(x)$ die Form

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) .$$

Neben der Frage der Approximierbarkeit stellt sich die Frage der Bestimmung der Koeffizienten a_k, b_k aus den Daten.

Satz A.2.1 *Es sei $f \in L^2(\Omega)$, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ eine Orthonormalbasis und $c_1, \ldots, c_n$ seien komplexe Zahlen. Dann gilt*

$$\|f - \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, e_j\rangle e_j\|_2 \leq \|f - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j\|_2.$$

Beweis: Nachprüfen! □

Wir betrachten zunächst den Raum der 2π-periodischen L^2-Funktionen. Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ bilden ein Orthonormalsystem. Um zu zeigen, daß sie den ganzen Raum aufspannen betrachten wir Funktionen auf dem Einheitskreis S^1, den man erhalten kann indem man $-\pi$ und π identifiziert. Wir betrachten komplexwertige Funktionen (es ist eine leichte Übung die Resultate am Ende wieder für reelle Funktionen zu interpretieren). Periodische Funktionen können durch Identifikation von Anfangs-und Endpunkt eines reellen Intervalles mit periodischen Funkteionen (der Periode der Intervalllänge) identifiziert werden. In diesem Sinne betrachten wir nun Funktionen auf S^1, der Einheitskreislinie in $\mathbb{C}$.

Wir beweisen den Satz, daß ausreichend glatte Funktionen durch Fourierreihen approximierbar sind.

Satz A.2.2 *Ist $f \in C^1(S^1)$, dann konvergieren die Partialsummen*

$$T_n^f(x) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k) e_k$$

gleichmäßig gegen f. Tatsächlich gilt eine Abschätzung der Form $\|T_n^f - f\|_\infty \leq Cn^{-1/2}$.

Bemerkung A.2.3 *Die Konvergenzordnung hängt von der Glattheit von f ab, diese Beobachtung ist die wesentliche Grundlage eines sogenannten "Lokal-Global Prinzips" in der Fourieranalysis.*

Beweis: Wir wollen die Differenz $\|T_n^f - f\|_\infty$ abschätzen. Um dies tun zu können, betrachten wir $T_n^f(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
T_n^f(x) &= \sum_{|k|\leq n} \hat{f} e_k(x) \\
&= \sum_{|k|\leq n} e_k(x) \int_0^1 f(y) e_k^*(y) dy \\
&= \int_0^1 \sum\nolimits_{|k|\leq n} e_k(x-y) f(y) dy
\end{aligned}$$

Dies legt nahe die Summen der e_k vorab zu untersuchen. Die Funktion

$$D_n(x) = \sum_{|k|\leq n} e_k(x)$$

wird als Dirichlet-Kern bezeichnet. Dafür ergibt sich folgender einfacher Ausdruck

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{|k|\leq n} e_k(x) \\
&= \sum_{|k|\leq n} e^{2\pi ikx} \\
&= e^{-2\pi inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{2\pi ikx} \\
&= e^{-2\pi inx} \frac{e^{2\pi i(2n+1)x} - 1}{e^{2\pi ix} - 1} \\
&= \frac{e^{\pi i(2n+1)x} - e^{-\pi i(2n+1)x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \\
&= \frac{\sin \pi(2n+1)x}{\sin \pi x}.
\end{aligned}$$

Offenkundig folgt aus der Definition von D, daß $D_n(0) = 2n+1$ ist, und darüberhinaus erhalten wir das Integral

$$\int_0^1 D_n(x) dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi(2n+1)x}{\sin \pi x} dx = 1.$$

Damit folgt für die Darstellung von T_n^f

$$T_n^f(x) = \int_0^1 D_n(x-y) f(y) dy.$$

Da D_n eine gerade Funktion ist (folgt z.B. aus der Euler'schen Identität) kann man nun mit der Substitution $y - x \to y$ schließen

$$\int_0^1 D_n(x-y)f(y)dy = \int_{-x}^{1-x} D_n(-y)f(x+y)dy = \int_{-x}^{1-x} D_n(y)f(x+y)dy$$

und dies, ist wegen der Periodizität des Integranden gleich dem Integral über ein beliebiges Intervall der Periodenlänge, d.h. es gilt

$$T_n^f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+y)D_n(y)dy.$$

Beginnen wir nun mit einer C^1-Funktion und entwickeln und schreiben die Fourierkoeffizienten für die (stetige) Ableitung auf, so bekommen wir unter Ausnutzung partieller Integration

$$\widehat{(f')}(n) = \int_0^1 f'(y)e_n^*(y)dy = \int_0^1 f(y)e_n'^*(y)dy = 2\pi n i\hat{f}(n).$$

Jetzt können wir die Differenz der Normen von T_n^f und T_m^f abschätzen, wir erhalten

$$\begin{aligned} \|T_n^f - T_m^f\|_\infty &\leq \sum_{|k|>n} |\hat{f}(k)| \\ &= \sum_{|k|>n} |\widehat{(f')}(k)||2\pi k|^{-1} \\ &\leq \left(\sum_{|k|>n} |\widehat{(f')}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|k|>n} (2\pi k)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\|f\|_2 n^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit hat man die gleichmäßige Konvergenz gezeigt, zu prüfen bleibt noch der Grenzwert. Da

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_n(x)dx = 1,$$

kann man die Differenz zwischen T_n^f und f in der Form

$$\begin{aligned} T_n^f - f &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x+y) - f(x))D_n(y)dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(f(x+y) - f(x))}{\sin \pi y} \sin \pi(2n+1)y dy, \end{aligned}$$

wobei für $y = 0$ der erste Quotient als $f'(x)/\pi$ zu verstehen ist. Wir halten einen Wert von $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ fest und betrachten den Quotienten Q im obigen Integral als Funktion von y. Diese liegt in $L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Für die zu betrachtende Differenz ergibt sich

$$T_n^f(x) - f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Q(x,y) \frac{e^{2\pi i n y} e^{\pi i y} - e^{-2\pi i n y} e^{/\pi i y}}{2i} = (2i)^{-1} \widehat{Q^+}(n) - (2i)^{-1} \widehat{Q^-}(n).$$

Wie zuvor schätzt man ab

$$\sum |\widehat{Q^\pm}(n)|^2 \leq \|Q\|_2^2 < \infty.$$

Damit folgt die behauptete Konvergenz □

Aufgabe A.2.4 *Man zeige, daß die Konvergenz sich für $f \in C^k$ verbessert, wie ist dann die Rate?*

Aufgabe A.2.5 *Man zeige, daß $C^1([-\pi, \pi])$ dicht in $L^2([-\pi, \pi])$ liegt und folgere daraus, daß die Funktionen $\sin nx, \cos nx$ eine Hilbert Basis bilden.*

Satz A.2.6 *Für $1 < p < \infty$ gilt*

$$\left(L^p(\Omega)\right)^* = L^q(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Insbesondere ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.

Beweis: s. z.B. Hirzbruch/Scharlau: Funktionalanalysis □

A.3 Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Wir gehen vom Begriff der Mannigfaltigkeit aus und nehmen an, daß dieser Begriff bekannt ist. Geometrisch darf man sich eine Fläche im $\mathbb{R}^n$ vorstellen. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an einer Stelle, bezeichnet mit T_xM, besteht aus der Gesamtheit der Tangentialvektoren an dieser Stelle, die man z.B. als Äquivalenzklassen von sich berührenden Kurven verstehen kann.

Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume ist das Tangentialbündel TM und man kann zeigen, daß dies ein topologischer Raum und insbesondere auch eine Mannigfaltigkeit ist. Damit kann man differenzierbare Abbildungen $M \to TM$ definieren.

Definition A.3.1 *Eine C^k-Abbildung $v : M \to TM$ mit der Eigenschaft $v(x) \in T_xM$ heißt C^k-Vektorfeld auf M $(k \geq 0)$.*

Es gilt der folgende Satz.

Satz A.3.2 *Ist v ein C^1-Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M, so hat die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\dot{x} = v(x)$$

für jedes $x_0 \in M$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t, x_0)$ mit $x(0) = x_0$ und $x(t, x_0)$ ist an jeder Stelle tangential an $v(x(t, x_0(($.

Mit diesem Satz kann man den zugehörigen Fluß definieren.

Setze $\Phi(t, x_0) = x(t, x_0)$. Dann heißt Φ der v zugeordnete Fluß. Dieser hat folgende Eigenschaften:

(i) $\Phi(t, \cdot)$ ist ein Diffeomorphismus von M mit $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}$.

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, x_0)) = \Phi(t + s, x_0)$.