Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 9

1. Man zeige: ist X reflexiv, so gilt dies auch für X^*.

2. Es sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von $\Delta u = 0$ und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ für ein hinreichend glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine hinreichend glatte Funktion $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$. Sei $V(\varphi) = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v_{|\partial\Omega} = \varphi\}$. Man zeige: u minimiert das Funktional
$$\Phi : V(\varphi) \to \mathbb{R} : v \mapsto \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 dx.$$

3. Es sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $u \in L^1(\Omega)$, so daß für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega u D_i \varphi = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Dann ist u fast überall konstant.

4. Man bestimme das Spektrum des Operators $T : L^2((a,b)) \to L^2((a,b)) : u \mapsto u''$ mit $D(T) = H^2((a,b)) \cap H_0^1((a,b))$. (Man bestimme Eigenwerte und Eigenfunktionen. Für den Beweis, daß man das Spektrum vollständig bestimmt hat, überlege man sich Glattheitseigenschaften der Eigenfunktionen. Außerdem ist es sinnvoll funktionalanalytische Eigenschaften des Operators zu betrachten.)

   Ein Problem zum Grübeln über die Feiertage: Hat der Operator $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ Punktspektrum? Welche Spektralanteile sind nicht leer?