Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 8

1. Man gebe ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in W^{1,3}(\Omega)$ an, so daß $u \notin C(\bar{\Omega})$ ist. (D.h. natürlich: u hat keinen Repräsentanten in $C(\bar{\Omega})$).

   (Hinweis: man überlege sich zunächst eine entsprechende Aussage für $\Omega = (-1,0) \cup (0,1) \subset \mathbb{R}$.)

2. Man gebe ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in W^{1,3}(\Omega)$ an, so daß u nicht im Abschluß von $W^{1,3}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ (bezüglich der Konvergenz in $W^{1,3}(\Omega)$) liegt.

   (Hinweis: Man benutze das Gebiet, das man für die vorige Aufgabe gefunden hat.)

3. (a) Man betrachte das Randwertproblem

   $$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 1 & \text{in} \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\} \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

   Man zeige, daß jede Lösung radialsymmetrisch ist, d.h. ist u Lösung, so gilt für $A \in \mathbf{SO}(2)$
   $$u(x) = u(Ax),$$
   oder in Polarkoordinaten $u(r,\varphi) = \tilde{u}(r)$.

   (b) Welcher Differentialgleichung genügt $\tilde{u}(r)$ auf $(0,1)$?

   (c) Man zeige, das Problem (1) hat keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

4. Für ein Dirichlet'sches Randwertproblem der Form

   $$(D) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

   setze man $w = \int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)u(y)dy$. Mit v bezeichne man die Perron'sche Lösung (vgl. Definition 1.10.9) von

   $$(D') \qquad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ v = \varphi - w & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

   Dann heißt $u = v + w$ die Perron'sche Lösung von (D). Was ist $u(0)$ für die Perron'sche Lösung von (1) aus der vorigen Aufgabe?