Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 7

1. Man betrachte das Dirichletproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Man zeige: ist für jeden nichtregulären Randpunkt $x \in \partial\Omega$

$$\varphi(x) = \min_{y \in \partial\Omega} \varphi(y),$$

so löst die Perron'sche Lösung das Randwertproblem (1).

2. Es sei X ein Banachraum, $T : X \to X$ ein beschränkter linearer Operator (zur Erinnerung beschränkt = stetig). T heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet. Man zeige: ist $S : X \to X$ stetig und linear, so sind TS und ST kompakt.

3. (a) Wir erinnern an die Resolvente eines linearer Operators L, für $z \in P(L)$ ist $R(z, L) = (L - z\mathbb{1})^{-1}$. Man zeige für $z_1, z_2 \in R(L)$ die sogenannte Resolventengleichung:

$$R(z_1, L) - R(z_2, L) = (z_2 - z_1)R(L, z_1)R(L, z_2).$$

   (b) Man zeige Bemerkung 2.1.17 aus der Vorlesung: $R(z, L)$ ist entweder für alle oder kein $z \in P(L)$ kompakt.

4. Es sei Ω beschränkt und $K \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$. Dann ist der Operator

$$T : C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega}) : u \mapsto v, \; v(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)dy$$

kompakt.