Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 6

1. Man betrachte das Poisson'sche Problem ($\Delta u = 0$ auf $B_1(0)$ und $u = \varphi$ auf $\partial B_1(0)$) auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und schreibe ein Programm (Matlab, Rlab, C, Maple) zur numerischen Lösung dieses Problems unter Ausnutzung des Poisson Kernes. Lösen Sie das Problem für die Randwerte $\varphi(x,y) = \sin(\psi), |\sin(\psi)|$ und
$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \cos(\psi) + 1 & y \geq 0 \\ -\cos(\psi) - 1 & y < 0 \end{cases},$$
wobei $\psi \in S^1$ den Winkel angibt. Erzeugen Sie ein Graphik der Lösung, speziell nahe der Unstetigkeitsstellen von φ, bzw. φ'.

2. (Lösbarkeit des Poisson'schen Problems für $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, 3. Teil) Es sei $B = B_1(0)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$, $f \in C^{\alpha}(\bar{B})$ Man zeige, daß das Dirichletproblem $\Delta u = f$ in B und $u = \varphi$ auf ∂B eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$ besitzt.

3. Man zeige, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. Man löse die folgenden Dirichlet Probleme (im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^n$)
   (a) $\Delta u = 1$ auf $B_1(0)$ und $u = 0$ auf $\partial B_1(0)$.
   (b) $\Delta u = 0$ auf $B_1(0)$ und $u = x_1$ auf $\partial B_1(0)$.
   (c) $\Delta u = 0$ auf $B_1(0)$ und $u = \sum \alpha_i x_i^2$ auf $\partial B_1(0)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.