Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 5

1. Ein Gebiet Ω genügt einer äußeren Kegelbedingung, falls es einen Kegel

$$K(\rho, t_0) = \{tx \mid x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), \|x'\| \leq \rho, x_n = 1, t \leq t_0\}$$

im $\mathbb{R}^n$ und zu jedem Punkt $\xi \in \partial\Omega$ eine affine Transformation T_ξ gibt, so daß die Spitze von $T_\xi K$ in ξ ist und $T_\xi K \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$.

Man zeige: genügt Ω einer äußeren Kegelbedingung, so ist jeder Randpunkt regulär.

(Hinweis: Man betrachte eine Schranke der Form $w = r^\lambda f(\theta)$, wobei (r, θ) Polarkoordinaten sind.)

2. (Lösbarkeit des Poisson'schen Problems für $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, 2. Teil) Seien w und φ definiert wie in Aufgabe 3, Blatt 4,

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x - y) f(y) dy,$$

mit lokal Hölder-stetigem f. Dann ist $w \in C^2(\Omega)$ und $\Delta w = f$. (Hinweis: man wähle $\Omega_0 \supset \Omega$, so daß der Gauß'sche Integralsatz auf Ω_0 gilt und setze f durch 0 auf Ω_0 fort, man setze $v = D_i w$ und

$$v_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_i \Gamma(x - y) \varphi(\frac{\|x - y\|}{\varepsilon}) f(y) dy$$

und berechne $D_j v_\varepsilon$. Dabei schreibe man das Integral in geeigneter Weise als Summe zweier Integrale und bedenke, daß die Hölder-Stetigkeit es nahelegt, Ausdrücke der Form $f(y) - f(x)$ zu betrachten.)

3. Man zeige, daß für eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ jede schwache Ableitung $v = D^\beta u$ mit $|\beta| \leq m$ existiert und v gleich der gewöhnlichen Ableitung $D^\beta u$ ist.

4. (a) Man zeige, daß die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ schwach differenzierbar ist und berechne die schwache Ableitung von u.

   (b) Man zeige, hat eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine schwache Ableitung $D_i u$, so gilt dies auch für die Funktionen $\max\{u, 0\}, \min\{u, 0\}, |u|$. (Hinweis: man betrachte geeignete Approximationen zu u.)