Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 4

1. (a) Ein Gebiet Ω genügt einer äußeren Kugelbedingung, falls es zu jedem $\xi \in \partial\Omega$ eine Kugel $B_\rho(y)$ gibt, mit $\overline{B_\rho(y))} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$.
   Man zeige: genügt Ω einer äußeren Kugelbedingung, so ist jeder Randpunkt regulär.
   (b) Für beschränkte $C^2(\Omega)$-Gbiete ist jeder Randpunkt regulär.

2. Man zeige: ist Ω beschränkt, so sind für $1 \leq p < \infty$ die Räume $L^p(\Omega)$ separabel. Gilt dies auch für $L^\infty(\Omega)$?

3. Man zeige, es gibt Funktionen $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $\varphi = 0$ für $x < 1$ und $\varphi = 1$ für $x > 2$,
   (b) $\varphi(x) \in [0, 1]$ und $\varphi'(x) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   Für eine beschränkte, integrierbare Funktion f auf dem Gebiet Ω setze man

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)w(y)dy$$

   und

$$w_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\varphi(\frac{\|x-y\|}{\varepsilon})f(y)dy.$$

   Man zeige, $w_\varepsilon \in C^1(\Omega)$ und damit $w \in C^1(\Omega)$. Man berechne die partiellen Ableitungen $D_i w$.

4. Es sei $f \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Gibt es zu $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$ und gilt für ein $\alpha \in (0, 1]$

$$[f]_{\alpha,x_0} = \sup\{\frac{|f(x) - f(x_0)|}{\|x - x_0\|^\alpha} \mid x \in B_\rho(x_0)\} < \infty,$$

   so nennen wir f Hölder-stetig mit Exponent α bei x_0. Ist f an allen Stellen $x \in \Omega$ Hölder-stetig mit Exponent α, so heißt f lokal Hölder-stetig mit Exponent α. Gilt für beschränktes Ω sogar

$$[f]_{\alpha,x_0} = \sup\{\frac{|f(x) - f(x_0)|}{\|x - x_0\|^\alpha} \mid x \in \Omega\} < \infty,$$

   so wird f als gleichmäßig Hölder-stetig mit Exponenten α bezeichnet. Wir setzen

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid f \text{ ist gleichmäßig Hölder-stetig mit Exponenten } \alpha\}.$$

   Man zeige: $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist ein Banachraum.