Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 2

1. Man formuliere den Gaußschen Integralsatz.

   (a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet. Mit u_{x_i} bezeichnen wir $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Man zeige: sind $u, v \in C^1(\Omega)$ und verschwindet u auf $\partial\Omega$ so gilt

   $$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx.$$

   (b) Wie lautet eine entsprechende Formel für auf dem Rand nichtverschwindende Funktionen u, v.

   (c) (Green'sche Formel) Ist Ω wie zuvor und sind $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, so gelten

   $$\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dF$$

   $$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) dF.$$

   Dabei bedeutet $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung bezüglich des äußeren Normalenvektors, also

   $$\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u(x), n(x) \rangle.$$

   (d) Man zeige Formel (1.1.8) aus der Vorlesung. (Die Nummerierung bezieht sich auf das Skript.)

2. Man berechne das Volumen V_n und die Oberfläche ω_n der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Hinweis: man benutze Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ und die Γ-Funktion .

3. Man setze für $x, a \in \mathbb{R}^n$

   $$\Gamma_a(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\omega_n} \dfrac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & \text{für } n \neq 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x-a\| & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

   und zeige

   $$\Delta\Gamma_a(x) = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}.$$

4. Was ist $\nabla\Gamma_a$?