Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 12

1. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten den Operator $L = -\Delta$ mit Definitionsbereich $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Man zeige: L hat Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n \ldots$ mit $\lambda_i \to \infty$ für $i \to \infty$. Die Eigenvektoren u_i spannen einen dichten Unterraum auf.

2. Es seien $L, \{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 1. Man zeige:
$$\exp(-tL)u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \exp(-\lambda_i t)u_i \text{ mit } \alpha_i = \langle u, u_i\rangle_{L^2(\Omega)}$$
ist für $t > 0$ definiert und löst die Gleichung $\dot{u} + Lu = 0$. Man zeige:
$$T(t) = \exp(-tL)$$
ist eine stark stetige Halbgruppe auf $L^2(\Omega)$. Ist $T(t)$ eine analytische Halbgruppe?

   Man überlege sich, daß die Argumentation aus dieser und der vorhergehenden Aufgabe für jeden stark elliptischen Operator in Divergenzform mit $c^i = -b^i$ anwendbar ist.

3. Es seien H, T, λ und H_T wie in Aufgabe 3, Blatt 11. Wir bezeichnen als schwache Lösung der Gleichung $Tu = f$ ein Element $u \in H_T$, so daß für alle $v \in H_T$ gilt
$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_\lambda = \langle f, v\rangle_H.$$
Man beweise die Existenz schwacher Lösungen.

4. In der vorstehenden Aufgabe sei T symmetrisch. Wir setzen $u = Gf$ und definieren dadurch einen Operator $G : H \to H_T$. Man zeige: G ist beschränkt, symmetrisch und injektiv. Setze $\tilde{T} = G^{-1}$. Man zeige:
   (a) $\tilde{T}$ ist eine Erweiterung von T.
   (b) $\tilde{T}$ ist selbstadjungiert.