Reiner Lauterbach WS 1998/99

# Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 11

1. Wir betrachten den Operator $Lu = u'' + u'$ auf $H^2((0,1)) \cap H_0^1((0,1))$. Was ist $L^f$? Man berechne das Spektrum der Operatoren $L, L^f$ und formuliere Lösbarkeitsbedingungen entsprechend dem Satz 3.2.18 und rechne diese explizit nach.

2. Es sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $L$ ein stark elliptischer Differentialoperator in Divergenzform mit $c^i = -b^i$, der den Voraussetzungen des Lemmas 3.2.6 genüge. Man zeige, daß der kleinste Eigenwert von $L$ auf $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ durch

$$\inf \left\{ \frac{\langle Lu, u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}} \;\middle|\; u \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

   gegeben ist.

3. Es seien $H$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $T : H \to H$ ein linearer abgeschlossener Operator mit Definitionbereich $D(T)$. $T$ heißt halbbeschränkt, falls für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt $\langle Tx, x \rangle \geq c\|x\|^2$. Für $\lambda \in R$ mit $c + \lambda > 0$, setze man

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle_\lambda = \langle Tx, y \rangle + \lambda \langle x, y \rangle.$$

   Außerdem definiere man auf $D(T)$ ein Norm $\|x\|_\lambda = \langle\langle x, x \rangle\rangle_\lambda$. Mit $H_\lambda$ werde die Vervollständigung von $D(T)$ bezüglich der Norm $\| \cdot \|_\lambda$ bezeichnet.

   Man zeige $H_\lambda = H_\mu$ für je zwei Elemente $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + c, \mu + c > 0$. Außerdem definieren $\| \cdot \|_\lambda$ und $\| \cdot \|_\mu$ äquivalente Normen. Wir definieren $H_T = H_\lambda$. Man zeige: die Fortsetzung von $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_\lambda$ auf $H_T$ macht diesen Raum zum Hilbertraum.

4. Man betrachte das Dirichlet Problem aus Aufgabe 3, Blatt 8. Man zeige, es existiert eine schwache Lösung. Wie sieht die Lösung aus?