Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 10

1. Man zeige: der duale Operator $T^* : Y^* \to X^*$ eines kompakten Operators $T : X \to Y$ ist kompakt.

2. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Man zeige, hat die Integralgleichung

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \tag{1}$$

für $g = 0$, außer $u = 0$ keine Lösung $u \in L^2(\Omega)$, so ist (??) für jedes $g \in L^2(\Omega)$ lösbar.

(b) Sei Ω beschränkt und $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige, hat die Integralgleichung (??) für $g = 0$ außer $u = 0$ keine weitere stetige Lösung, so ist die Gleichung (??) für jedes stetige g lösbar.

(c) Es seien Ω, K wie in Teil (b). Es sei $u_1, \ldots, u_s$ eine Basis für den Lösungsraum von (??) ($g = 0$). Dann hat die Gleichung (??) genau dann eine Lösung, wenn

$$\int_\Omega g(x)u_i(x)dx = 0$$

ist.

3. Man beweise ausführlich Satz 3.2.18 aus der Vorlesung.

4. Man betrachte das Problem (vgl. Blatt 8, Aufgabe 3)

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 1 & \text{in} \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\} \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

und zeige, daß die Funktion $u(r,\varphi)$ für $0 < r_0 < 1$ definiert durch

$$u(r,\varphi) = \begin{cases} \frac{r^2}{4} & 0 < r < r_0 \\ \frac{r^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\log r_0}\log r & r_0 \le r < 1 \end{cases}$$

überall, außer auf dem Kreis $r = r_0$, die Gleichung $\Delta u = 1$ löst. Ferner zeige man: $u \in H_0^1(\Omega)$ und u ist keine schwache Lösung des Randwertproblem (1).