Reiner Lauterbach WS 1998/99

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 1

1. Bei einer stationären Temperaturverteilung erwartet man, daß die Temperatur $u(x)$ an der Stelle x gleich dem Mittelwert der Temperaturen in einer umgebenden Kugel ist:
   Es sei Ω offen und $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, so daß die Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ ist, und u sei eine stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Ω.

   Man zeige:
   $$u(x_0) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(x_0))} \int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)dx.$$

   Dabei ist $\mu(B_\varepsilon(x_0))$ das Lebesgue-Maß der Kugel $B_\varepsilon(x_0))$.

2. Man löse die Wellengleichung
   $$u_{tt} = u_{xx}$$
   mit Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ und einer Anfangsauslenkung $u_0(x)$ der schwingende Saite durch Trennung der Veränderlichen (vgl. die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung in der Vorlesung). Ist die Lösung durch die Angaben eindeutig bestimmt? Falls nicht, überlege man sich weitere sinnvolle Forderungen, die die Lösung eindeutig machen.

3. Man zeige die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$.

4. Es seien $p > 1,\ q > 1,\ f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$ mit
   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

   Man zeige

   (a) $fg \in L^1(\Omega)$ und

   (b) die sogenenannte Höldersche Ungleichung
   $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$