

Lösungsskizzen zu den Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen Blatt 6

Aufgabe 21 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q(x, y)(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2$$

längs Lösungen mit Anfangswert $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ gegen 1 konvergiert. Veranschaulichen Sie sich das Lösungsverhalten anhand von numerischen Experimenten.

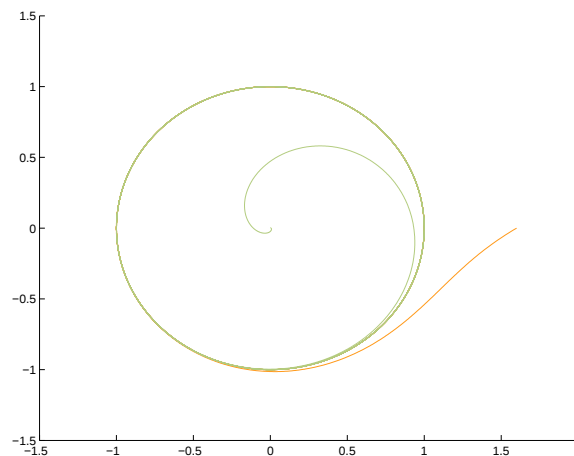
Lösung. Betrachte

$$\dot{q} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^2(1 - x^2 - y^2) + 2y^2(1 - x^2 - y^2) = 2q(1 - q).$$

Mit der Methode der Trennung der Variablen (und der Vereinbarung $Q_0 = \frac{1}{q_0}$) erhält man

$$q(t) = \frac{1}{1 + (Q_0 - 1)e^{-2(t-t_0)}}.$$

Dies konvergiert unabhängig von $q_0 > 0$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 1.



Aufgabe 22 Man führe in der Differentialgleichung aus Aufgabe 21 Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ein und leite eine Differentialgleichung für (r, φ) ab. Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung?

Lösung.

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 23 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.

(a) Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt genau eine beschränkte Lösung.

(b) Ist f periodisch mit Periode $T > 0$, so ist auch die in (a) gefundene Lösung T -periodisch.

Lösung. (a) Wir schreiben $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, wobei U, V A invariante Unterräume sind und $\sigma(A|_U) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ und $\sigma(A|_V) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Setze $A_U = A|_U$ und entsprechend A_V .

Dann gibt es ein $a > 0$, $M > 0$, so dass für $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\| \exp(A_U t) \| &\leq M e^{-at} \\ \| \exp(-A_V t) \| &\leq M e^{-at}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Beschränktheit von f gibt es ein $K > 0$ mit $\|f\|_{L^\infty} < K$.

Aufgrund der Formel der Variation der Konstanten hat die Lösung mit Anfangswert $u_0 \in U$ die Darstellung

$$u(t, u_0) = \exp(A_U t) u_0 + \int_0^t \exp((t-s)A_U) f(s) \, ds = \exp(tA_U) \left(u_0 + \int_0^t \exp(-sA_U) f(s) \, ds \right).$$

Beachte

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^t \exp(-sA_U) f(s) \, ds$$

existiert, denn für $t_2 < t_1 < 0$ ist

$$\int_{t_1}^{t_2} \exp(-sA_U) f(s) \, ds \leq KM \int_{t_1}^{t_2} e^{as} \, ds \leq \frac{KM}{a} e^{at_1} \rightarrow 0 \text{ für } t_1 \rightarrow -\infty.$$

Setze

$$u_0 = \int_{-\infty}^0 \exp(-sA_U) f(s) \, ds.$$

Damit schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}|u(t, u_0)| &= \left\| \exp(tA_U) \int_{-\infty}^t \exp(-sA_U) f(s) \, ds \right\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^t \exp((t-s)A_U) f(s) \, ds \right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K \int_{-\infty}^t \|\exp((t-s)A_U)\| ds \\
&\leq KM \int_{-\infty}^t e^{-a(t-s)} ds \\
&= KM \int_0^{\infty} -e^{\sigma} d\sigma \\
&= \frac{KM}{a}.
\end{aligned}$$

Damit ist $u(t, u_0)$ beschränkt.

Ganz entsprechend behandelt man $v(t, v_0)$ für $v_0 \in V$. Damit hat man einen Anfangswert $(u_0, v_0) \in U \oplus V$ gefunden. Für andere Anfangswerte ist die Lösung offenbar unbeschränkt. Formal nehmen wir an, wir hätten zwei beschränkte Lösungen u_1, u_2 und betrachten $w = u_1 - u_2$. Dann löst w die Gleichung

$$\dot{w} = Aw$$

und ist beschränkt. Dann ist aber $w = 0$.

(b) Ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung so löst $u(\cdot + T)$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}u(t+T) = Au(t+T) + f(t+T) = Au(t+T) + f(t)$$

die gleiche Differentialgleichung wie u . Die Eindeutigkeitsaussage aus (a) beweist dann die Behauptung.

Aufgabe 24 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \dots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.

(a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so dass die Vektoren $u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \dots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.

(b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A . Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \text{tr}(A)w$.

Lösung. (a) Offensichtlich gilt für jedes $i = 1, \dots, n$ und alle t, t' und er Übergangsmatrix Φ

$$u_i(t) = \Phi(t, t')u_i(t').$$

Sei $[u_1, \dots, u_n]$ die Determinante mit den n Spalten u_i . Dann ist

$$\begin{aligned}
[u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)] &= [\Phi(t, t')u_1(t'), \Phi(t, t')u_2(t'), \dots, \Phi(t, t')u_n(t')] \\
&= \det(\Phi(t, t'))[u_1(t'), \dots, u_n(t')].
\end{aligned}$$

Da $\Phi(t, t')$ invertierbar ist, ist die Determinante ungleich null und die erste Behauptung folgt.

(b) Aus dem bisherigen folgt

$$\frac{1}{h}(w(t+h) - w(t)) = \frac{1}{h}(\det(\Phi(h, 0)) - 1)w(t).$$

Damit reicht es die Ableitung von $\det(\Phi(t, 0))$ im Punkt $t = 0$ auszurechnen. Seien $\varphi_i(t)$ die Lösungen von

$$\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t), \varphi(0) = e_i$$

wobei e_i der i -te Einheitsvektor ist und damit die Spalten von $\Phi(t, 0)$. Dann ist

$$\frac{d}{dt} \det(\Phi(t, 0)) = \sum_{i=1}^n [\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \dot{\varphi}_i(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)].$$

Damit hat man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(\Phi(t, 0))|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n [e_1, \dots, e_{i-1}, \dot{\varphi}_i(0), e_{i+1}, \dots, e_n] \\ &= \sum_{i=1}^n [e_1, \dots, e_{i-1}, A(0)e_i, e_{i+1}, \dots, e_n] \\ &= \text{tr}(A(0)). \end{aligned}$$