Lösungsskizzen zu den Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 17 Wir bezeichnen mit A^T die Transponierte einer reellen Matrix A und mit $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A. Man zeige:
(a) $\det E(A,t) = e^{\mathrm{tr}(A)t}$
(b) $E(A^T,t) = (E(A,t))^T$
(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A + A^T = 0$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $E(A,t)$ ist orthogonal und $\det(E(A,t)) = 1$. (Eine Matrix B heißt orthogonal, wenn $B^T B = BB^T = \mathbb{1}$ ist.)

Lösung. (a) Sei J_A die Jordanform von A, $J_A = CAC^{-1}$. Dann ist $J_A = D + N$, wobei $D = \mathrm{diag}\ ((_1, \ldots, (_n)\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten von A ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\det(E(A,t)) &= \det(CE(A,t)C^{-1}) = \det(E(J_A,t)) = \det(E(D,t)) \\ &= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} = \exp(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j t) = \exp(\mathrm{tr}(A)t).\end{aligned}$$

(b) Die Aussage ist leicht einzusehen, für $n \in \mathbb{N}$ gilt $(A^n)^T = (A^T)^n$. Also ist

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{t^j}{j!} A^j\right)^T = \sum_{j=1}^{N} \frac{t^j}{j!} (A^T)^j.$$

Durch Grenzübergang folgt die Behauptung.
Aus $A + A^T = 0$ folgt $A^T = -A$ und damit $AA^T = A^T A$. Also folgt

$$E(A,t)E(A,t)^T = E(A,t)E(A^T,t) = E(A + A^T, t) = E(0,t) = \mathbb{1}.$$

Aus $A + A^T = 0$ folgt $2\,\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A + A^T) = \mathrm{tr}(A - A) = 0$. Mit (a) ergibt sich

$$\det(E(A,t)) = e^{\mathrm{tr}(A)t} = e^0 = 1.$$

Aufgabe 18 Man bringe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

auf Jordansche Normalform und bestimme so die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

Lösung. Man vertausche die dritte und vierte Spalte bzw. Zeile (Konjugation mit einer Permutationsmatrix) um die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

zu erhalten. Die 3×3Matrix B links oben hat als charakteristisches Polynom

$$\chi_B(\lambda) = (1-\lambda)^3.$$

Mit der Matrix

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wird dies auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert. Damit hat der EW 1 geometrische Vielfachheit 1 und algebraische Vielfachheit 3. Insgesamt ergibt sich

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19

Man finde $E(A,t)$ für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht $E(A,t)u_0$ für verschiedene $u_0 \neq 0$ aus.

Lösung. (a) Wir transformieren die Matrix A mittels

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Inverse:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

auf die Gestalt $\tilde{A} = C^{-1}AC$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Transformation der Form $C_1^{-1}A_1C_1$ mit

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

bringt dies in die Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$E(A_2, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2}t & \sin\sqrt{2}t \\ 0 & -\sin\sqrt{2}t & \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}.$$

Rücktransformation liefert

$$E(A, t) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

(b) Die Matrix A hat obere Dreiecksgestalt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für A^n $n \geq 3$ erhält man $A^n = 0$. Damit ergibt sich

$$E(A,t) = \mathbb{1} + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t+\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times R \to \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld. Ferner sei $\Psi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Wie lautet die Differentialgleichung für $v = \Psi(u)$, wenn $u(t)$ eine Lösung von $\dot{u} = f(u,t)$ ist?

Lösung. Es gilt

$$\dot{v} = \frac{d}{dt}\Psi(u(t)) = D\Psi(u(t))\dot{u} = D\Psi(u)f(u,t) = D\Psi(\Psi^{-1}(v))f(\Psi^{-1}(v),t).$$