

Kapitel 2

Allgemeine Existenzsätze

Im weiteren Verlauf der Vorlesung beschränken wir uns weitgehend auf Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Zunächst zeigen wir die Existenz von sogenannten Integralkurven. Dabei betrachten wir nicht den allgemeinsten Fall. Danach zeigen wir, dass, unter gewissen Annahmen, Integralkurven eindeutig sind. Daran anschließend werden stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit von den Parametern des Problems untersucht.

2.1 Nichtautonome Differentialgleichungen

2.1.1 Die Existenz von Integralkurven

Wir beginnen mit der Gleichung

$$(2.1.1) \quad \dot{u} = v(u, t),$$

wobei $V : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ ein zeitabhängiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M ist. Gesucht werden Kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, für die zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ gilt $T\gamma(t) = v(\gamma(t), t)$. Die Abbildung 2.1 zeigt links schematisch ein Vektorfeld und rechts wird versucht darzustellen, wie die Tangentialvektoren an die Lösungskurve das vorgegebene *Richtungsfeld* wiedergeben. Üblicherweise schreibt man $u(t)$ für $\gamma(t)$ und $\dot{u}$ für $T\gamma(t)$. Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, dass alle beteiligten Funktionen an der Stelle t ausgewertet werden. Nur wenn von dieser Konvention abgewichen wird, wird das Argument explizit angegeben. Einen wichtigen Spezialfall stellt die Gleichung

$$(2.1.2) \quad \dot{u} = f(u, t),$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dar. Man nennt die Differentialgleichung (2.1.2) **nichtautonom**, weil die Variable t explizit in der Gleichung auftritt. Natürlich können wir in den folgenden Ausführungen auch zulassen, dass das Vektorfeld nicht von t abhängt.

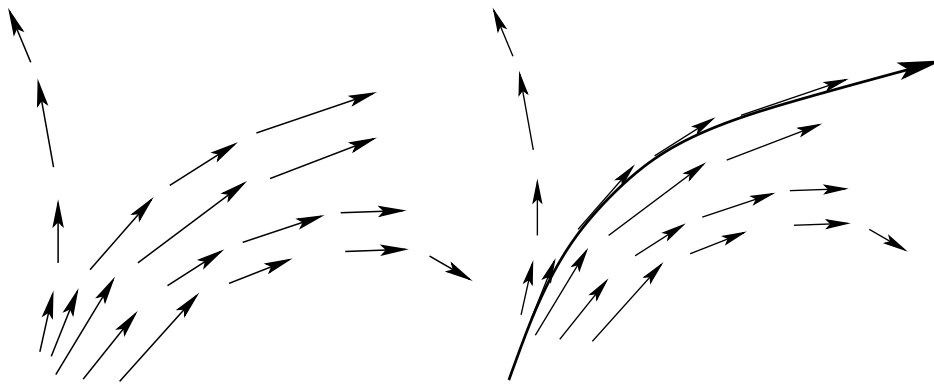


Abbildung 2.1: Links das vorgegebene Vektorfeld oder Richtungsfeld, rechts eine Kurve, deren Tangentialvektoren gerade mit dem Richtungsfeld übereinstimmen

Sei $(u_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$. Wir suchen ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Kurve $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften $t_0 \in I$,

$$(2.1.3) \quad u(t_0) = u_0$$

und für jedes $t \in I$ gilt $\dot{u}(t) = v(u(t), t)$, d.h. u erfüllt (2.1.1).

Definition 2.1.4 Wir nennen M den Phasenraum, $M \times \mathbb{R}$ den erweiterten Phasenraum und den Graphen der Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R} : t \mapsto (u(t), t)$$

bezeichnen wir als Integralkurve.

Man beachte den Unterschied zwischen dieser Definition und der der Lösungskurve. **Man beachte den Sonderfall** $M = \mathbb{R}^n$. Bezüglich der Existenz von Integralkurven hat man den folgenden Satz, hier betrachten wir zunächst die Situation im $\mathbb{R}^n$. Zur Diskussion des Verhaltens benötigen wir noch einen Begriff.

Definition 2.1.5 Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Man nennt f bezüglich der ersten Variablen u lokal Lipschitz stetig¹. wenn zu jedem Punkt $(u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und eine Konstante M_W existiert, so dass für je zwei Punkte $(u_1, t), (u_2, t) \in W$, mit gleicher zweiten Komponente, gilt

$$(2.1.6) \quad |f(u_1, t) - f(u_2, t)| \leq M_W (|u_1 - u_2|).$$

Satz 2.1.7 (Lokaler Existenzsatz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und in der ersten Variablen lokal Lipschitz stetig. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in U$, $t_0 \in I$ eine Zahl $\delta > 0$ und eine auf dem Intervall $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $u : I_\delta \rightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften:

¹Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (14.5.1832-7.10.1903) studierte bei Neumann und Dirichlet. Er forschte sowohl in der Zahlentheorie, Differentialgeometrie, über Besselfunktionen, Fourier-Reihen wie auch über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und deren Umfeld.

- u ist auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ stetig differenzierbar;
- u genügt der Bedingung (2.1.3);
- u löst die Differentialgleichung (2.1.2).

Gibt es ein Intervall I , welches t_0 enthält und eine Funktion $\tilde{u} : I \rightarrow U$ mit den Eigenschaften, $\tilde{u}(t_0) = u_0$ und $\tilde{u}$ löst die Differentialgleichung (2.1.2), so gilt $u = \tilde{u}$ auf $I_\delta \cap I$.

Beweis. Sei $W = U' \times (t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta})$ eine Umgebung von (u_0, t_0) in $U \times \mathbb{R}$, so dass auf W die Funktion f die Lipschitz Konstante M_W bezüglich der ersten Koordinate hat, mit der die Ungleichung (2.1.6) erfüllt ist, und $|f(u, t)| \leq N_W \forall (u, t) \in W$. Sei $\Delta = \inf\{|(x, t) - (u_0, t_0)| \mid (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus W\}$. Ist $\mathbb{R}^{n+1} \setminus W$ leer, so sei Δ eine beliebige positive Zahl. Wähle $\lambda \in (0, 1)$. Setze $M = \max\{1, M_W\}$, $N = \max\{1, N_W\}$ und

$$\delta = \frac{1}{3} \min\left\{\frac{\Delta}{N}, \frac{3\lambda}{M}, \bar{\delta}\right\}.$$

Mit $C(I_\delta, U')$ bezeichnen wir die Menge der auf I_δ definierten stetigen Funktionen mit Werten in U' . Mit der Metrik $d(u, v) = \max\{|u(t) - v(t)| \mid t \in I_\delta\}$ wird $C(I_\delta, U')$ zum vollständigen metrischen Raum. Wir prüfen die Eigenschaften nach:

1. (M1) ist offenkundig erfüllt.
2. Ist $u = v$, so ist natürlich $d(u, v) = 0$, für die Umkehrung überlegt man sich, dass $d(u, v) = 0$ impliziert, dass $\max\{|u(t) - v(t)| \mid t \in I_\delta\} = 0$ ist. Damit ist $u(t) - v(t) = 0$ für alle solchen t und $u = v$ auf I_δ und es folgt (M2).
3. Die Symmetrieaussage aus (M3) ist klar.
4. Die Dreiecksungleichung (M4) ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq |u(t) - z(t)| + |z(t) - v(t)| \quad \forall t \in I_\delta \\ &\leq \max\{|u(s) - z(s)| \mid s \in I_\delta\} + \max\{|z(s) - v(s)| \mid s \in I_\delta\} \\ &= d(u, z) + d(z, v). \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $t \in I_\delta$ gilt, gilt sie auch für das Supremum und damit

$$d(u, v) \leq d(u, z) + d(v, z).$$

5. Es bleibt die Vollständigkeit: ist $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C(I_\delta, U')$, so ist jede Komponente eine Cauchyfolge in $C(I_\delta, \mathbb{R})$ und damit konvergent mit stetiger Grenzfunktion (Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig). Natürlich konvergiert die Folge gegen den komponentenweise erhaltenen Limes.

Für $u \in C(I_\delta, U')$ definieren wir eine neue Funktion $Tu \in C(I_\delta, U')$ durch

$$(2.1.8) \quad (Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(s), s) ds.$$

Wir zeigen

1. T ist eine starke Kontraktion auf $C(I_\delta, U')$.
2. Der Fixpunkt u ist eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften, d.h.
 - (a) $u(t_0) = u_0$.
 - (b) u ist stetig differenzierbar
 - (c) u löst die Differentialgleichung.

Zu 1.) Zunächst prüfen wir, ob für $v \in C(I_\delta, U')$ auch Tv wieder in diesem Raum liegt. Die Stetigkeit von Tv ist nahezu offensichtlich. Um einzusehen, dass $Tv(t) \in U$ liegt, zeigen wir, dass sogar $(Tv(t), t) \in W$ gilt. Offensichtlich ist $(Tv(t_0), t_0) = (u_0, t_0) \in W$. Wegen der Stetigkeit von Tv folgt, dass die Menge $I_W = \{t \in I_\delta \mid (v(t), t) \in W\}$ offen in I_δ ist. Damit gibt es ein Intervall $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ mit $\delta_1 \leq \delta$, so dass für $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ gilt $(Tv(t), t) \in W$. Dann ist aber auch $(Tv(t), t) \in W$ für $|t - t_0| = \delta_1$. Dazu schätzen wir die Differenz $|Tv(t) - u_0|$ ab:

$$|(Tv(t), t) - (u_0, t_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t f(v(s), s) ds \right| + \delta_1 \leq \int_{t_0}^t |f(v(s), s)| ds + \delta_1 \leq \delta_1 N_U + \delta_1 \leq \delta(1+N) < \Delta$$

Damit ist $(Tv(t), t) \in W$. Die Menge I_W ist damit offen und abgeschlossen in I_δ . Da $t_0 \in I_W$ liegt, gilt $I_W = I_\delta$.

Wir kommen zur Kontraktionseigenschaft. Seien $v, w \in C(I_\delta, U')$. Dann ist

$$(2.1.9) \quad \begin{aligned} d(Tv, Tw) &= \max\{|Tv(t) - Tw(t)| \mid t \in I_\delta\} \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(v(s), s) - f(w(s), s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(v(s), s) - f(w(s), s)| ds \\ &\leq \delta M_U d(v, w) \\ &< \lambda d(v, w). \end{aligned}$$

Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz 1.4.10 folgt nun die Existenz von genau einem Fixpunkt von T .

Zu 2.) Ist $Tu = u$ so gilt für $t \in I_\delta$

$$(2.1.10) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(s), s) ds.$$

Damit ist klar, dass u im Inneren des Intervalls stetig differenzierbar ist. Die Ableitung $\dot{u}(t)$ ist nach dem HDI gleich $f(u(t), t)$. Wie schon vorher bemerkt, gilt auch (2.1.3). $\square$

Korollar 2.1.11 Seien U , f wie im Satz 2.1.7. Die Konstanten Δ , M , N seien wie im Beweis angegeben. Dann existiert auf jedem Intervall I_δ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) mit $\delta < \min\{\frac{\Delta}{2N}, \frac{1}{M}\}$.

Beweis. Bitte selbst einfügen!

□

Der eben bewiesene Satz wird oft nach den Mathematikern *Picard*² und *Lindelöf*³ benannt. Ohne Beweis möchte ich den Satz von Peano⁴ angeben, der eine Verallgemeinerung der Existenzaussage darstellt.

Satz 2.1.12 (Peano) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(u_0, t_0) \in U \times \mathbb{R}$, so besitzt das Anfangswertproblem (2.1.2), (2.1.3) eine Lösung (lokal in der Zeit, d.h. es existiert ein Intervall I_δ und eine Funktion $u : I_\delta \rightarrow U$ welche (2.1.2) und (2.1.3) erfüllt).

Bemerkung 2.1.13 Man beachte, dass in diesem Satz die Eindeutigkeitsaussage des vorherigen Satzes nicht gemacht wird. Sie wäre auch falsch, wie das Beispiel $\dot{x} = \sqrt{x}$ lehrt. Eine genauere Diskussion dieses Beispiels folgt in den Übungen.

Nun wollen wir die dem obigen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz entsprechende Aussage für Anfangswertaufgaben auf Mannigfaltigkeiten beweisen.

²Charles Emile Picard (24.7.1856-11.12.1941) lehrte an der Sorbonne in Paris. Bekannt sind neben dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz in der Theorie der Differentialgleichungen die Sätze zur Werteverteilung holomorpher Funktionen, die den Satz von Casorati-Weierstraß verschärfen. Picard wirkte auch in anderen Bereichen der Mathematik.

³Ernst Leonard Lindelöf (7.3.1870-4.6.1946) ist finnischer Mathematiker und Begründer der finnischen Funktionentheorieschule. Seine Hauptarbeitsgebiete sind die Analysis und die Funktionentheorie.

⁴Guiseppe Peano (27.8.1858-20.4.1939) bewies im Jahre 1887, dass die Stetigkeit der rechten Seite hinreichend für die Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist. Seine Axiome, die die natürlichen Zahlen charakterisieren, stammen aus dem Jahr 1889. Kurz danach fand er die nach ihm benannte den Raum füllende Kurve. Er beeinflusste die Mengenlehre, reformierte den Mathematikunterricht an italienischen Schulen und war einer der Initiatoren des ersten internationalen Mathematikerkongresses in Zürich im Jahre 1897.

Satz 2.1.14 Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $v : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ ein C^1 -glattes Vektorfeld, $x_0 \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ und eine Umgebung U von x_0 in M , so dass eine eindeutig bestimmte Lösung $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow U$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = v(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ existiert.

Beweis. Zunächst wollen wir nochmals klären, was es genau bedeutet, dass $v : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ C^1 -glatt ist. Dazu benötigen wir Karten und Koordinatenumgebungen (τ_x, U_x) , bzw. $(\tau_{x,v}, TM \cap p^{-1}(U_x))$, wobei $p : TM \rightarrow M$ für $v \in T_x M$ durch $p(v) = x$ definiert ist. Zu überprüfen ist nun die Glattheit der Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$\tau_x(U) \rightarrow \tau_x(U) \times \mathbb{R}^n : (y, v_y) \mapsto (y, (\tau_x \circ \gamma_{v_y})'(0)v_y).$$

Dann ist die Abbildung $f(y, t) = (\tau_x \circ \gamma_{v_y})'(0)v_y$ Lipschitz stetig und es existiert lokal in der Zeit eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(t_0) = \tau_{x_0}(x_0).$$

Durch $\tau_{x_0}^{-1}(y(t))$ wird eine Kurve auf M mit den gewünschten Eigenschaften definiert. Zu zeigen ist noch, dass die angegebene Konstruktion unabhängig von der Wahl der Karten ist. $\square$

2.1.2 Fortsetzbarkeit

Schon bei der Diskussion der logistischen Gleichung trat das Phänomen auf, dass Lösungen nicht für alle Zeiten existieren müssen. Wir wollen dies nun vertiefen.

Definition 2.1.15 (a) Wir betrachten das Anfangswertproblem (2.1.2), (2.1.3). Sei $u : I \rightarrow W$ eine Lösung. Man nennt eine Lösung u_1 , welche auf einem Intervall I_1 definiert ist, eine Fortsetzung von u , wenn $I \subset I_1$ gilt und zusätzlich auf I die Funktionen u und u_1 übereinstimmen.

(b) Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt maximales Existenzintervall, wenn es eine Funktion $u : I \rightarrow W$ gibt, welche (2.1.2), (2.1.3) löst, so dass aus

$$u_1 : I_1 \rightarrow W \text{ ist Fortsetzung von } u$$

folgt, $I = I_1$.

Lemma 2.1.16 (Maximale Existenzintervalle) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige, in der ersten Variablen Lipschitz stetige Abbildung. Dann gilt für Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3):

1. Jede Lösung besitzt eine Fortsetzung auf ein maximales Existenzintervall.
2. Maximale Existenzintervalle sind offen.

3. Für das Verhalten von u am Rand des maximalen Existenzintervall (t_1, t_2) des genannten Anfangswertproblems erhält man die folgende Alternative (sei T einer der Randpunkte, d.h. $T \in \{t_1, t_2\}$):

- $T = \infty$ oder $T = -\infty$,

$$\lim_{t \rightarrow T, t \in (t_1, t_2)} u(t)$$

existiert oder auch nicht.

- $|T| < \infty$, dann gilt: Zu jedem Kompaktum $K \subset U$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|t - T| < \delta, t \in (t_1, t_2) \Rightarrow u(t) \notin K.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus den beiden Beobachtungen:

- Sind I_1, I_2 offene Intervalle $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u_0 \in I_1 \cap I_2$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3), so gibt es eine Lösung dieses Problems, welche auf $I_1 \cup I_2$ definiert ist. Denn aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Satzes 2.1.7 stimmen u_1 und u_2 auf $I_1 \cap I_2$ überein. Außerhalb des Durchschnitts setzt man $u(t) = u_1(t)$, falls $t \in I_1$ und $u(t) = u_2(t)$ andernfalls.
- Die Vereinigung von allen Intervallen auf denen Lösungen des Anfangswertproblems existieren, ist wieder ein Intervall. An jedem Punkt in diesem Intervall stimmen alle dort definierten Lösungen überein.

Die zweite Behauptung ist offensichtlich. Warum?

Zum Beweis der dritten Aussage unterscheiden wir die beiden Fälle

1. $|T| = \infty$
2. $|T| < \infty$.

Im ersten Fall ist nichts zu zeigen. Der zweite Fall bedarf einer Überlegung. Angenommen, es gäbe ein Kompaktum $K \subset W$ und eine Folge $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $t_i \in (t_1, t_2) \forall i$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = T$ mit $w_i = u(t_i) \in K \forall i \in \mathbb{N}$. Dann hat die Folge $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $w_0 \in K \subset W$. Aufgrund des Existenzsatzes 2.1.7 gibt es eine Lösung $w_i : J_i \rightarrow W$, wobei $J_i \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $w(t_i) = w_i$. Nun sei U eine Umgebung von (w_0, T) mit einer Lipschitzkonstante $M = M_U$. Wir setzen

$$\Delta = \frac{1}{2} \inf\{|(w_0, T) - (w, t)| \mid (w, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus U\}.$$

Sei $\delta < \frac{1}{M} \min\{\Delta, 1\}$. Dann existiert nach Korollar 2.1.11 jede Lösung mit Anfangswert

$$|(w_a, t_a) - (w_0, T)| < \Delta$$

zumindest auf dem Intervall $(t_a - \delta, t_a + \delta)$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass aus $i > N$ folgt $|(w_i, t_i) - (w_0, T)| < \Delta$ und $|t_i - T| < \delta$. Dann existiert aber die Lösung durch (w_i, t_i) auf dem Intervall $(t_i - \delta, t_i + \delta)$. Dies enthält aber T als inneren Punkt, im Widerspruch zur Annahme, dass T Endpunkt des maximalen Existenzintervalls ist. $\square$

Bemerkung 2.1.17 Die Aussage in Teil (c) kann man folgendermaßen interpretieren. Entweder die Lösung des Anfangswertproblems existiert für alle Zeiten, oder wenn dies nicht der Fall ist, so konvergiert sie bei Annäherung an einen Endpunkt des maximalen Existenzintervalls gegen den Rand ∂W von W oder gegen Unendlich. Es stellt sich die Frage, ob man einfache Bedingungen für *globale Existenz* angeben kann. Darunter verstehen wir die Frage, wann die Lösung des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Eine einfache hinreichende Bedingung wird im nächsten Satz angegeben.

Satz 2.1.18 (Globale Existenz) Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit einer globalen Lipschitzkonstante M . Dann existieren für alle Anfangswerte u_0 die Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Dies folgt, wenn wir zeigen können, dass für jeden Anfangswert $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die zugehörige Lösung $u(t)$ auf einem Intervall I_δ existiert mit einem δ , welches nicht von (u_0, t_0) abhängt. (Wie?) Dies ist eine direkte Konsequenz des Korollars 2.1.11, denn Δ ist beliebig, M ist unabhängig vom Paar (u_0, t_0) und N läßt sich durch Δ und M nach oben abschätzen. $\square$

Wir können nun den globalen Existenzsatz für kompakte Mannigfaltigkeiten beweisen.

Satz 2.1.19 Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $v : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ ein C^1 -glattes Vektorfeld. Dann gibt es zu jedem Paar $x_0 \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = v(x, t)$, $x(t_0) = x_0$. Diese Lösung bezeichnen wir mit $x(t, t_0, x_0)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 2.1.16. $\square$

2.2 Stetige Abhängigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert und von Parametern untersuchen. Was wollen wir darunter verstehen? Wir gehen zurück zu einem unserer Beispiele vom Anfang, z.B. zur Pendelgleichung und betrachten eine Lösung dieser Gleichung zu einem bestimmten Anfangswert. Nun können wir uns die Frage stellen, was passiert, wenn wir den Anfangswert leicht verändern, oder wenn wir z.B. ℓ die charakteristische Größe des Pendels ein wenig variieren oder aber unser Pendel an einem anderen Ort aufstellen und die Schwerkraft ein wenig anders: werden wir ein Lösungsverhalten beobachten, das der ersten Lösung ähnlich sieht, oder erwarten wir ein ganz anderes Verhalten? Ohne der präzisen Formulierung des Satzes vorgreifen zu wollen, werden wir zeigen, dass zu einem gegebenen Zeithorizont $T > 0$ Umgebungen des Anfangswertes, der Länge ℓ und der Schwerkraft g existieren, so dass im Intervall ${}_T, T$ die Lösung zu jedem Anfangswert, zu jeder Fadenlänge und

zu jedem Schwerkraftwert aus diesen Umgebungen in der Nähe der zunächst betrachteten Lösung liegen. Wichtig ist dabei natürlich, die Tatsache, dass wir eine feste Zeit $T > 0$ fixieren, auf beliebig großen Intervallen, ist eine vergleichbare Aussage nicht zu erwarten, wir werden am Ende des Semesters darauf zurückkommen.

Wir führen zunächst die folgenden Schreibweisen ein, die sich als geeignet erweisen, der gestellten Frage einen vernünftigen Rahmen zu geben.

Definition 2.2.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige, bezüglich der ersten Variablen lokal Lipschitz stetige Abbildung. Eine Lösung $u : I \rightarrow U$ des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) wollen wir mit $u(t, t_0, u_0)$ bezeichnen, d.h.

$$\frac{du}{dt}(t, t_0, u_0) = f(u(t, t_0, u_0), t)$$

für alle $t \in I$ und

$$u(t_0, t_0, u_0) = u_0.$$

Soll die Abhängigkeit von der rechten Seite f ausgedrückt werden, so schreiben wir $u(t, t_0, u_0, f)$. Hängt f von Parametern $\lambda \in \mathbf{Y}$ ab, wobei $\mathbf{Y}$ ein metrischer Raum ist, so bezeichnen wir die Abhängigkeit der Lösung von dem Parameter durch $u(t, t_0, u_0, \lambda)$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir bezeichnen mit $\text{Lip}(U \times I, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller Lipschitz stetigen Funktionen auf $U \times I$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$. Wir wollen einen Abstandsbegriff auf diesem Funktionenraum einführen. Dazu wählen wir eine abzählbare Familie von offenen Mengen

$$(2.2.2) \quad \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Abschluß von W_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt.
2. $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = U \times I$

Damit kann man Pseudo-Metriken (der Begriff wird weiter unten erläutert) auf $\text{Lip}(U \times I, \mathbb{R}^n)$ durch

$$(2.2.3) \quad d_n(f, g) = \max_{(u,t) \in W_n} |f(u, t) - g(u, t)|$$

definieren. Diese wiederum geben uns die Möglichkeit eine Metrik auf $\text{Lip}(U \times I, \mathbb{R}^n)$ zu konstruieren. Wir setzen einfach

$$(2.2.4) \quad d_L(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$$

und fassen die notwendigen Beweisschritte im nächsten Lemma zusammen.

Lemma 2.2.5 1. Es gibt Familien von offenen Mengen $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit den eben angegebenen Eigenschaften.

2. d_n ist eine Pseudo-Metrik, d.h. es sind alle Axiome einer Metrik außer dem Axiom M.2) erfüllt, stattdessen gilt nur noch die Implikation $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$.

3. d_L ist eine Metrik.

4. Eine Folge $f_n \in \text{Lip}(U \times I, \mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann bezüglich der Metrik d_L , wenn sie auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert.

5. Die Konvergenz von Funktionen ist unabhängig von der gewählten Familie $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Mengen.

Beweis. Die erste Aussage beweisen wir durch Angabe einer Familie mit den genannten Eigenschaften. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$W_n = \{(u, t) \mid |(u, t)| < n \text{ und } \text{dist}((u, t), \partial U \times \mathbb{R}) > \frac{1}{n}\}.$$

Man prüft leicht nach, dass diese Wahl zum gewünschten Ergebnis führt.

Die zweite Aussage ist klar. Natürlich ist d_n keine Metrik, stimmen nämlich f, g auf W_n überein und sind auf $U \times R$ verschieden, so ist $d_n(f, g) = 0$, obwohl $f \neq g$ gilt.

Bei der dritten Behauptung sind alle Aussagen bis auf M.2) und die Dreiecksungleichung trivial. Zum Beweis von M.2) überlegt man sich, dass $d_L(f, g) = 0$ impliziert, dass $d_n(f, g) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $f = g$. Andernfalls gäbe es einen Punkt $(u, t) \in U \times \mathbb{R}$ mit $f(u, t) \neq g(u, t)$. Dann gibt es aber auch eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $(u, t) \in W_n$ und $d_n(f, g) \neq 0$.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung betrachten wir zunächst einen der Summanden, schreiben statt d_n einfach d und schätzen die Differenz

$$(2.2.6) \quad \frac{d(f, h)}{1 + d(f, h)} + \frac{d(h, g)}{1 + d(h, g)} - \frac{d(f, g)}{1 + d(f, g)}$$

ab. Nach Multiplikation mit den drei Nennern ergibt sich aus (2.2.6)

$$\begin{aligned} & d(f, h) + d(f, h)(d(h, g) + d(f, g)) + d(f, h)d(h, g)d(g, f) \\ & + d(g, h) + d(g, h)(d(h, f) + d(f, g)) + d(f, h)d(h, g)d(g, f) \\ & - (d(f, g) + d(f, g)(d(h, g) + d(f, h)) + d(f, h)d(h, g)d(g, f)) \\ & = d(f, h) + d(g, h) - d(f, g) + 2d(f, h)d(h, g) + d(f, h)d(f, g)d(g, h) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Die vierte Aussage wollen wir in den Übungen beweisen, vgl. Aufgabe 2.5.2. Multiplizieren und Aufsummieren ändern natürlich nichts an der Eigenschaft einer Metrik.

Die letzte Behauptung folgt aus der vorherigen Aussage. $\square$

Wir kommen nun zur wesentlichen Aussage dieses Abschnitts.

Satz 2.2.7 (Stetige Abhängigkeit) Die Lösung $u(t, t_0, u_0, f)$ des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) ist in allen Variablen stetig.

Bemerkung 2.2.8 In Wirklichkeit beweisen wir etwas mehr. Wenn wir die Existenzaussage des Satzes von Peano zugrunde legen würden, würden wir sogar die stetige Abhängigkeit von $f \in C(U \times I, \mathbb{R}^n)$ erhalten. Es wäre natürlich, die Stetigkeit auf den parameterabhängigen Fixpunktsatz 1.4.12 von Banach zurückzuführen. Doch dabei treten Probleme auf. Deshalb geben wir hier einen direkten Beweis, ohne auf diese Version des Fixpunktsatzes zurückzugreifen.

Beweis. Setze $Y = U \times \mathbb{R} \times \text{Lip}(U \times I, \mathbb{R}^n)$. Als Metrik d' auf Y setzen wir

$$d'(y_1, y_2) = |u_1 - u_2| + |t_1 - t_2| + d_L(f_1, f_2),$$

wobei $y_k = (u_k, t_k, f_k)$ für $k = 1, 2$ bezeichnet. Ist $u(t)$ Lösung von (2.1.2), (2.1.3), so hat u die Form

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(s), s) ds.$$

Ist v die Lösung von

$$(2.2.9) \quad \dot{v} = g(v, t) \text{ und } v(\tau_0) = v_0,$$

so hat man natürlich die entsprechende Formel

$$v(t) = v_0 + \int_{\tau_0}^t g(v(s), s) ds.$$

Wir werden zeigen, dass zu jedem $t \in (t_1, t_2)$, dem maximalen Existenzintervall der Lösung u des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3), und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$ existiert, so dass

$$(2.2.10) \quad d'((u_0, t_0, f), (v_0, \tau_0, g)) < \delta'$$

impliziert, dass $[t_0, t]$ (oder $[t, t_0]$) im maximalen Existenzintervall der Lösung v von (2.2.9) liegt und für alle $s \in [t_0, t]$ (oder für alle $s \in [t, t_0]$) gilt

$$|u(s) - v(s)| < \varepsilon.$$

Wir wollen beides in einem Schritt zeigen. Seien also $t \in (t_1, t_2)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $t > t_0$ ist. W sei eine Umgebung von $G = \{(u(s), s) \mid s \in [t_0, t]\}$ in $U \times I$, deren Abschluß kompakt ist und so dass f auf W eine Lipschitz Konstante M_W besitzt. Wir definieren $N = \sup\{|f(u, s)| \mid (u, s) \in W\} + 1$, $M = \max\{1, M_W\}$, $\Delta = \text{dist}(G, \partial W)$ und $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon e^{-M(t-t_0)}$. Ersetzen wir ε durch $\min\{\varepsilon, \Delta\}$ und zeigen wir, dass für ein $\delta' > 0$ aus (2.2.10) folgt, dass

$$|u(s) - v(s)| < \varepsilon, \quad \forall s \in [t_0, t],$$

so folgt natürlich insbesondere auch die Aussage über das maximale Existenzintervall. Es gibt ein $\varepsilon' > 0$, so dass aus $d_L(f, g) < \varepsilon'$ folgt, dass $|g(u, s)| < N$ für alle $(u, s) \in$

U ist. Wegen der Kompaktheit des Abschlusses von W gibt es ein n_0 , so dass $W \subset W_{n_0}$ ist. Da $\overline{W}$ kompakt und $\cup_{n=0}^{\infty} W_n$ eine Überdeckung von $\overline{W}$ ist, kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Da die Folge der $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend ist (siehe Punkt 2 der Konstruktion der Familie $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$), genügt dann eine einzelne Menge zum Überdecken. Wir setzen $\delta = \frac{\Delta}{3N}$. Dann gilt die Teilbehauptung: Ist $d_L(f, g) < \varepsilon'$ und $\text{dist}((v_0, \tau_0), G) < \delta$, so existiert die Lösung v des Anfangswertproblems (2.2.9) zumindest auf dem Intervall $[\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$. Diese Behauptung folgt aus dem Lemma 2.1.18, wenn wir zeigen, dass für $\tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$, die Integralkurve $(v(\tau), \tau)$ in U verläuft. Dazu berechnen wir den Abstand von $(v(\tau), \tau)$ von G

$$\begin{aligned} \text{dist}(G, (v(\tau), \tau)) &\leq \text{dist}(G, (v_0, \tau_0)) + |(v_0, \tau_0) - (v(\tau), \tau)| < \delta + \int_{\tau_0}^{\tau} |g(v(s), s)| ds + |\tau - \tau_0| \\ &\leq \delta + \delta N + \delta \leq 3N\delta \leq \Delta. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\delta' = \min\{2^{-n_0-1}, 2^{-n_0-2} \frac{\tilde{\varepsilon}}{|t - t_0|}, \frac{\tilde{\varepsilon}}{4N}, \varepsilon', \delta\}$$

und zeigen, ist $d'((u_0, t_0, f), (v_0, \tau_0, g)) < \delta'$, so existiert die Lösung $v(s)$ für $s \in [t_0, t]$ und es gilt $|u(s) - v(s)| < \varepsilon$.

Zunächst folgern wir aus der Zwischenbehauptung, dass die Lösung v bei t_0 definiert ist, da $d_L(f, g) < \varepsilon'$ und $|t_0 - \tau_0| < \delta$ ist. Für die Differenz $|u_0 - v(t_0)|$ ergibt sich:

$$(2.2.11) \quad |u_0 - v(t_0)| \leq |u_0 - v_0| + \int_{\tau_0}^{t_0} |g(v(s), s)| ds < \delta' + N\delta' \leq 2N\delta' \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

Da sowohl u , wie auch v in t stetig sind, ist das maximale Intervall $I_{\max} \subset [t_0, t]$ mit den Eigenschaften

- $t_0 \in I_{\max}$
- $|u(t) - v(t)| < \varepsilon$

offen in $[t_0, t]$. Im nächsten Schritt beweisen wir, dass die Implikation

$$[t_0, \tau) \subset I_{\max} \Rightarrow [t_0, \tau] \subset I_{\max}$$

wahr ist. Ist nämlich $[t_0, \tau) \subset I_{\max}$ so dürfen wir schreiben

$$u(\tau) - v(\tau) = u_0 - v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} f(u(s), s) ds - \int_{t_0}^{\tau} g(v(s), s) ds.$$

Für die Beträge ergibt sich

$$|u(\tau) - v(\tau)| \leq |u_0 - v(t_0)| + \left| \int_{t_0}^{\tau} f(u(s), s) ds - \int_{t_0}^{\tau} g(v(s), s) ds \right|.$$

Wir benutzen die Abschätzung bei t_0 und erhalten

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \left| \int_{t_0}^{\tau} (f(u(s), s) - g(v(s), s)) ds \right|.$$

Einfügen eines weiteren Termes und eine Anwendung der Dreiecksungleichung liefern:

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} |f(u(s), s) - f(v(s), s)| ds + \int_{t_0}^{\tau} |f(v(s), s) - g(v(s), s)| ds.$$

Wir formen um (da $(v(s), s) \in U \forall s \in [t_0, \tau]$ ist dies möglich)

$$\begin{aligned} |u(\tau) - v(\tau)| &< \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)| ds + \int_{t_0}^{\tau} d_{n_0}(f, g) ds \\ (2.2.12) \quad &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)| ds + (t - t_0) d_{n_0}(f, g). \end{aligned}$$

Zunächst schätzen wir $d_{n_0}(f, g)$ ab. Da $d_L(f, g) < \delta'$ ist, hat man insbesondere $d_L(f, g) < 2^{-n_0-1}$. Da

$$2^{-n_0} \frac{d_{n_0}(f, g)}{1 + d_{n_0}(f, g)} \leq d_L(f, g)$$

ist, gilt

$$\frac{d_{n_0}(f, g)}{1 + d_{n_0}(f, g)} \leq 2^{n_0} d_L(f, g)$$

und daraus folgt

$$d_{n_0}(f, g)(1 - 2^{n_0} d_L(f, g)) \leq 2^{n_0} d_L(f, g).$$

Wegen der erwähnten Abschätzung für $d_L(f, g)$ ist der Faktor auf der linken Seite immer größer als $1/2$ und man erhält $d_{n_0}(f, g) < 2^{n_0+1} d_L(f, g)$. Also hat man die Abschätzung $d_{n_0}(f, g) \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2|t-t_0|}$. Eingesetzt in (2.2.12) ergibt dies

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \tilde{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)| ds.$$

Wir benutzen nun eine Ungleichung, die auf den schwedisch-amerikanischen Mathematiker Gronwall⁵ zurückgeht, die im nachfolgenden Lemma bewiesen werden wird und erhalten

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \tilde{\varepsilon} e^{M(\tau-t_0)} \leq \varepsilon.$$

□

⁵Thomas Hakon Gronwall (16.1.1877-9.5.1932), gebürtiger Schwede, studierte in Uppsala und Stockholm Mathematik und Ingenieurwesen. Ab 1902 war er für zwei Jahre an der TU Berlin-Charlottenburg. Danach war er in den USA tätig.

Lemma 2.2.13 (Gronwall) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion, welche für zwei positive Konstanten α, β , für ein $t_0 \in I$ und alle $t \in I$ der Abschätzung

$$(2.2.14) \quad u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t u(s) ds$$

genügt. Dann gilt für alle $t \in I$

$$(2.2.15) \quad u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}.$$

Setzt man in (2.2.14) die strikte Ungleichung voraus, so gilt auch in (2.2.15) eine echte Ungleichheit.

Beweis. Sei

$$v(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds.$$

Damit schreibt sich (2.2.14) um zu

$$\dot{v} \leq \alpha + \beta v.$$

Setze $w(t) = v(t)e^{-\beta t}$. Differenzieren von w ergibt

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{v}(t)e^{-\beta t} - \beta v(t)e^{-\beta t} \\ &\leq (\alpha + \beta v(t))e^{-\beta t} - \beta e^{-\beta t} v(t) \\ &= \alpha e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Integration dieser Ungleichung (auf beiden Seiten stehen ausschließlich nichtnegative Funktionen) zwischen t_0 und t führt zu (man beachte $w(t_0) = 0$)

$$w(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} |e^{-\beta t} - e^{-\beta t_0}|.$$

Damit ergibt sich für v ,

$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} |1 - e^{\beta(t-t_0)}|,$$

oder

$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta|t-t_0|} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Für $u(t)$ erhält man aus Gleichung 2.2.14 und der Definition von v

$$u(t) \leq \alpha + \beta v(t) = \alpha + \alpha e^{\beta|t-t_0|} - \alpha.$$

Man beachte, dass eine strikte Ungleichung in (2.2.14) zu einer echten Ungleichheit in jeder dieser Abschätzungen führt. $\square$

Bemerkung 2.2.16 Es gibt allgemeinere Versionen dieses Lemmas, von denen wir später noch einige kennenlernen werden.

Bemerkung 2.2.17 Wir kommen zurück zu einer Fragestellung, die bereits ganz am Anfang aufgetaucht ist: Wir haben bei der Behandlung des mathematischen Pendels die rechte Seite durch die Linearisierung ersetzt. An dieser Stelle haben wir bemerkt, dass der Zusammenhang zwischen den Lösungen beider Gleichungen nicht sofort erkennbar ist. Stetige Abhängigkeit hilft hier weiter: wählen wir ein Gebiet, das eine hinreichend kleine Umgebung von (u_0, t_0) ist, so kann man den Unterschied zwischen u und $\sin(u)$ klein machen. Dann ist auf jedem kompakten Zeitintervall die Lösung in allen Variablen stetig, insbesondere wird der Unterschied zwischen der ursprünglichen Gleichung und der linearisierten Gleichung klein. Führen das Argument aus!

Der nächste Schritt besteht darin, eine differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswert, Anfangszeit und Parametern zu beweisen. Dazu zunächst eine einfache Konsequenz des gerade bewiesenen Satzes.

Korollar 2.2.18 (Stetige Abhängigkeit von Parametern) Sei (Λ, d_Λ) ein metrischer Raum, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times \mathbb{R} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und für festes $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda$ bezüglich u lokal Lipschitz stetig. Dann ist $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ in allen Variablen stetig.

Beweis. Wir setzen $f^\lambda(u, t) = f(u, t, \lambda)$ und müssen zeigen, dass die Abbildung $\lambda \mapsto f^\lambda$ stetig (bezüglich der Metrik d_L) ist. Seien $\varepsilon > 0$ und $\lambda_0 \in \Lambda$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(2.2.19) \quad \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Sei U_{n_0} das entsprechende Element aus der Familie von Mengen, welche zur Konstruktion von d_L herangezogen wurde. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$d_\Lambda(\lambda_0, \lambda) < \delta \Rightarrow d_{n_0}(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wenn dies gezeigt ist, ist der Rest klar. Denn dann ist für $n \leq n_0$ auch $d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \varepsilon/2$ und daher ist

$$(2.2.20) \quad \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \frac{d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0})}{1 + d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und aus (2.2.19), (2.2.20) folgt, dass $d_L(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \varepsilon$. Bleibt noch die Existenz von δ zu beweisen. Zu jedem $(u_0, t_0) \in U_{n_0+1}$ gibt es eine Umgebung $Z(u_0, t_0, \lambda_0) \subset U \times I \times \Lambda$, so dass $|f(u, t, \lambda) - f(u_0, t_0, \lambda_0)| < \varepsilon/2$ ist. Dies liegt an der Stetigkeit von f in allen Variablen. Natürlich enthält $Z(u_0, t_0, \lambda_0)$ eine Menge der Form $U'(u_0, t_0) \times Y_{\delta(u_0, t_0)}$, wobei $U'(u_0, t_0) \subset U_{n_0+1}$ eine Umgebung von (u_0, t_0) ist und

$$Y_{\delta(u, t)} = \{\lambda \in \Lambda \mid d_\Lambda(\lambda, \lambda_0) < \delta(u, t)\}$$

ist. Da $\overline{W}_{n_0}$ kompakt ist, überdecken endlich viele Mengen der Form $W'(u_k, t_k)$, $k = 1, \dots, K$ die Menge U_{n_0} . Sei $\delta = \min\{\delta(u_k, t_k) \mid 1 \leq k \leq K\}$. Dieses δ hat offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Als Folgerung hieraus betrachten wir nun differenzierbare Abhängigkeiten. Dazu schränken wir uns auf den Fall ein, dass Λ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. d_Λ ist dann natürlich die übliche Metrik. Zur Motivation betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 2.2.21 Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(u, \lambda) = \lambda u$. Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = \lambda u$, $u(0) = 1$ gegeben durch $u(t, 0, 1, \lambda) = e^{\lambda t}$. Diese Lösung ist nach λ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial u(t, 0, 1, \lambda)}{\partial \lambda} = t e^{\lambda t}.$$

Sei u_λ diese Funktion, dann erfüllt u_λ die Anfangsbedingung $u_\lambda(0) = 0$ und genügt der Differentialgleichung (hier ist $f_\lambda = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$)

$$\dot{u}_\lambda = u + \lambda u_\lambda (= f_\lambda + f_u u_\lambda).$$

Die auf diese Weise vermutete Formel kann man auch noch durch eine formale Betrachtung von Differentialquotienten motivieren. Dazu sei $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung, wobei $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge ist. Sei λ_i eine der Variablen in $\mathbb{R}^m$. Die Abbildung f hat in Koordinaten die Form $f = (f^1, \dots, f^n)$. Mit $f_{\lambda_i}^j$ bezeichnen wir die partielle Ableitung, also

$$f_{\lambda_i}^j = \frac{\partial f^j}{\partial \lambda_i}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Wir schreiben f_{λ_i} für die Abbildung

$$f_{\lambda_i} = (f_{\lambda_i}^1, \dots, f_{\lambda_i}^n).$$

Für die Vorbetrachtung reicht es, sich auf den Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ zu beschränken. Wir wollen uns damit die nachfolgenden Ergebnisse plausibel machen. Nun seien $u(t, t_0, u_0, \lambda_1)$ bzw. $u(t, t_0, u_0, \lambda_2)$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) für zwei verschiedene Werte des Parameters $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Weiter schreiben wir $u_\lambda(t, t_0, u_0, \lambda_i)$ für die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach λ im Punkt $\lambda = \lambda_i$. Für die Differenz der beiden Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{u}(t, t_0, u_0, \lambda_1) - \dot{u}(t, t_0, u_0, \lambda_2) &= f(u(t, t_0, u_0, \lambda_1), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_2) \\ &= f(u(t, t_0, u_0, \lambda_1), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_1) \\ &\quad + f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_2). \end{aligned}$$

Wir schreiben nun $u(1)$ für $u(t, t_0, u_0, \lambda_1)$ und entsprechend auch $u(2)$ für $u(t, t_0, u_0, \lambda_2)$. Dividiert man durch $(\lambda_1 - \lambda_2)$, so ergibt sich aus dem obigen

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\dot{u}(1) - \dot{u}(2)}{\lambda_1 - \lambda_2} & = & \frac{f(u(1), t, \lambda_1) - f(u(2), t, \lambda_1)}{u(1) - u(2)} \frac{u(1) - u(2)}{\lambda_1 - \lambda_2} & + & \frac{f(u(2), t, \lambda_1) - f(u(2), t, \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \lambda_2 \rightarrow \lambda_1. \\ \dot{u}_\lambda(1) & & f_u(u(1), t, \lambda_1) u_\lambda(1) & + & f_\lambda(u(1), t, \lambda_1) & & \end{array}$$

Man sieht, dass es einiger Überlegungen bedarf um die Vertauschung der entsprechenden Grenzprozesse zu rechtfertigen. Ähnliche Überlegungen kann man für die Ableitungen nach Anfangswert und Anfangszeit anstellen.

Statt den Grenzübergang für Differentialquotienten zu rechtfertigen, werden wir Differentialgleichungen herleiten, die von den Ableitungen nach der verschiedenen Variablen erfüllt werden. Existenz- und Eindeutigkeitssätze erlauben uns dann zu schließen, dass die Ableitungen existieren. Zur Herleitung dieser Differentialgleichungen dient ein Hilfssatz. Wir wollen noch folgende Bezeichnung vereinbaren. Seien V_1, V_2 endlichdimensionale Vektorräume. Dann bezeichne $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ die Menge aller linearen Abbildungen von V_1 nach V_2 . Ist $V_1 = V_2$ so sei $\mathbb{1}$ die Identität.

Hilfssatz 2.2.22 Sei $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung eines reellen Intervalls I in den Raum der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich. Dann hat das Anfangswertproblem, wobei eine Funktion $C : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gesucht wird,

$$(2.2.23) \quad \dot{C} = AC, \quad C(t_0) = \mathbb{1}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Hängt A stetig von Parametern λ in einem metrischen Raum Λ ab, so ist $C(t, \lambda)$ in beiden Variablen stetig.

Beweis. Wir betrachten die folgenden n Anfangswertprobleme für Funktionen $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$ gegeben durch

$$\dot{c}_i = Ac_i, \quad c_i(t_0) = e_i,$$

wobei e_i der i -te kanonische Einheitsvektor ist. Diese Gleichung hat für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Lösung, welche auf I existiert. Dann ist aber

$$C = (c_1, \dots, c_n)$$

eine Lösung von (2.2.23). □

Definition 2.2.24 Sei $u(t, t_0, u_0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3). Die Differentialgleichung für eine Funktion $v : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\dot{v} = D_u f(u(t, t_0, u_0), t)v$$

heißt Variationsgleichung für u . Entsprechendes definiert man auch für parameterabhängige f 's.

Bemerkung 2.2.25 Aus dem Hilfssatz 2.2.22 folgt die Lösbarkeit der Variationsgleichung.

Bemerkung 2.2.26 Mit $D_i u$ wird die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach der i -ten Variablen bezeichnet.

Satz 2.2.27 (Differenzierbare Abhängigkeit) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \times \mathbb{R} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei k -mal stetig differenzierbar. Dann ist die Lösung $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3) nach allen Variablen k -mal stetig differenzierbar. Die ersten Ableitungen von u genügen den im folgenden beschriebenen Differentialgleichungen. Differentialgleichungen

1. Die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach der Anfangszeit, die wir, unserer Konvention folgend, mit D_2u bezeichnen wollen, löst die Gleichung

$$\dot{z} = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} z,$$

für eine Abbildung $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit Anfangswert $z(t_0) = -f(u_0, t_0, \lambda)$.

2. Die Ableitung D_3u nach dem Anfangswert ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und löst die Gleichung

$$\dot{C} = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} C,$$

mit Anfangsbedingung $C(t_0) = \mathbb{1}$.

3. Die Ableitung nach dem Parameter D_4u ist eine Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und löst die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} B = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} B + f_\lambda(u, t, \lambda).$$

mit Anfangswert $B(t_0) = 0$.

Beweis. Wir beweisen dies durch Induktion nach k . Haben wir die obigen Formeln bewiesen, dann folgt zunächst die einmalige Differenzierbarkeit. Aber diese Abbildungen sind dann nach dem gleichen Schritt wieder differenzierbar. Sei $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ die Lösung des Anfangswertproblems (2.1.2), (2.1.3). Wir betrachten die Ableitungen nach u_0 und nach λ zusammen. Dazu erweitern wir künstlich das Anfangswertproblem zu

$$(2.2.28) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= f(u, t, \lambda), & u(t_0) &= u_0 \\ \dot{\lambda} &= 0, & \lambda(t_0) &= \lambda. \end{aligned}$$

Natürlich sind die Lösungen des neuen Systems nichts anderes als die Lösungen des alten Systems, nur, dass die Parameter als Anfangswerte auftreten. Sei

$$w = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$

und damit

$$(2.2.29) \quad \dot{w} = F(w, t), \quad w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

mit der offensichtlichen Identifikation

$$F(w, t) = \begin{pmatrix} f(u, t, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert für die neue Gleichung bedeutet natürlich, dass die Lösung der ursprünglichen Gleichung sowohl nach dem Anfangswert, wie

auch nach den Parametern differenzierbar ist. Sei $w(t, t_0, w_0)$ die Lösung der Gleichung (2.2.29). Wir setzen für $h \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$v(t, t_0, w_0, h) = w(t, t_0, w_0 + h) - w(t, t_0, w_0)$$

und

$$V(t, t_0, w_0, h) = \int_0^1 D_w F(w(t, t_0, w_0) + sv(t, t_0, w_0, h), t) ds.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t}(t, t_0, w_0 + h) - \frac{\partial w}{\partial t}(t, t_0, w_0) \\ &= F(w(t, t_0, w_0 + h), t) - F(w(t, t_0, w_0), t) \\ &= V(t, t_0, w_0, h)v(t, t_0, w_0, h) \end{aligned}$$

Da $v(t_0, t_0, w_0, h) = w_0 + h - w_0 = h$ ist, löst v das Anfangswertproblem

$$\dot{z} = V(t, t_0, w_0, h)z, \quad z(t_0) = h.$$

Nach Hilfssatz 2.2.22 hat das Anfangswertproblem

$$\dot{C} = VC, \quad C(t_0) = \mathbb{1}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $C(t, t_0, w_0, h)$, die nach Hilfssatz 2.2.22 und Korollar 2.2.18 in allen Variablen stetig ist. Aus der Eindeutigkeit wiederum schließt man, dass v die Form

$$v(t, t_0, w_0, h) = C(t, t_0, w_0, h)h$$

hat. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} |w(t, t_0, w_0 + h) - w(t, t_0, w_0) - C(t, t_0, w_0, 0)h| &\leq |v(t, t_0, w_0, h) - C(t, t_0, w_0, 0)h| \\ &= |C(t, t_0, w_0, h)h - C(t, t_0, w_0, 0)h| \\ &\leq |C(t, t_0, w_0, h) - C(t, t_0, w_0, 0)||h| \\ &= o(|h|). \end{aligned}$$

Man beachte, dass die erste Norm in der letzten Ungleichung eine Norm im Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^{n+m}$ in sich ist. Diese wird wegen der Stetigkeit von C in allen Variablen klein. Aus diesen Überlegungen folgt, dass w nach dem Anfangswert w_0 differenzierbar ist, mit Ableitung $C(t, t_0, w_0, 0)$. Damit haben wir Differenzierbarkeit von u nach Anfangswert und Parameter geklärt. Wir kommen zur Ableitung nach der Anfangszeit. Für den Rest des Beweises unterdrücken wir bei der Lösung u die Abhängigkeit vom Parameter, um die Schreibweise nicht unnötig zu verkomplizieren. Im folgenden sei $h \in \mathbb{R}$. Setzt man

$$v(t, t_0, u_0, h) = u(t, t_0 + h, u_0) - u(t, t_0, u_0)$$

und

$$A(t, t_0, u_0, h) = \int_0^1 f_u(u(t, t_0, u_0) + sv(t, t_0, u_0, h), t) ds,$$

so erhält man für v die Darstellung

$$\begin{aligned}
 v(t_0, t_0, u_0, h) &= u(t_0, t_0 + h, u_0) - u(t_0, t_0, u_0) \\
 &= u(t_0, t_0 + h, u_0) - u(t_0 + h, t_0 + h, u_0) + u(t_0 + h, t_0 + h, u_0) - u_0 \\
 &= -(u(t_0 + h, t_0 + h, u_0) - u(t_0, t_0 + h, u_0)) \\
 &= -h \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, t_0 + h, u_0) ds \\
 &= -h \int_0^1 f(u(t_0 + sh, t_0 + h, u_0), t_0 + sh) ds \\
 &= -hf(u_0, t_0) + R(t_0, u_0, h)h,
 \end{aligned}$$

wobei natürlich gilt

$$R(t_0, u_0, h) = \int_0^1 (f(u_0, t_0) - f(u(t_0 + sh, t_0 + h, u_0), t_0 + sh)) ds.$$

Die Funktion v löst wieder ein Anfangswertproblem, nämlich

$$\dot{z} = A(t, t_0, u_0, h)z, \quad z(t_0) = -hf(u_0, t_0) + R(t_0, u_0, h)h.$$

Man beachte, dass A eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich ist. Also können wir mit dem Hilfssatz 2.2.22 das Anfangswertproblem

$$\dot{C} = AC, \quad C(t_0) = \mathbb{1}$$

mit einer matrixwertigen Funktion $C = C(t, t_0, u_0, h)$ lösen. Wiederum ist C in allen Variablen stetig. Aus der Eindeutigkeit folgt wie oben die Darstellung von v durch

$$v(t, t_0, u_0, h) = C(t, t_0, u_0, h) (-hf(u_0, t_0) + hR(t_0, u_0, h)).$$

Auch das weitere ist dem obigen ganz ähnlich. Man erhält

$$\begin{aligned}
 &u(t, t_0 + h, u_0) - u(t, t_0, u_0) + C(t, t_0, u_0, 0)f(u_0, t_0)h \\
 &= ((C(t, t_0, u_0, 0) - C(t, t_0, u_0, h))f(u_0, t_0) + C(t, t_0, u_0, h)R(t_0, u_0, h))h \\
 &= o(|h|).
 \end{aligned}$$

Damit ist u stetig nach t_0 differenzierbar und $D_2 u(t, t_0, u_0) = -C(t, t_0, u_0, 0)f(u_0, t_0)$. Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

2.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir eine Verbindung zwischen Differentialgleichungen höherer Ordnung in $\mathbb{R}$ und Gleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ herstellen. Damit übertragen sich die Existenzsätze für die Lösungen von nichtautonomen Gleichungen auch auf Gleichungen höherer Ordnung. Wir bezeichnen die n -te Ableitung

einer Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u^{(n)}$. In diesem Abschnitt sei die unabhängige Veränderliche x . Gegeben seien $n - 1$ stetige Funktionen $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und eine lokal Lipschitz stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir suchen nun eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, welche der Gleichung

$$(2.3.1) \quad Lu = u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u = f(u, u', \dots, u^{(n-1)}, x)$$

genügt. Bevor wir uns über Anfangsbedingungen Gedanken machen, schreiben wir die Gleichung um. Wir setzen $y_i = u^{(i-1)}$. Daraus erhält man dann das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -(a_1(x)y_n + \dots + a_{n-1}(x)y_2 + a_n(x)y_1) + f(y, x). \end{aligned}$$

Setzt man in die letzte Gleichung noch die neuen Variablen ein, so hat man

$$y_n' = -(a_1(x)y_n + \dots + a_{n-1}(x)y_2 + a_n(x)y_1) + f(y, x).$$

Dieses System hat die Form

$$y' = A(x)y + F(y, x)$$

mit

$$(2.3.2) \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(2.3.3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

und

$$(2.3.4) \quad F(y, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(y, x) \end{pmatrix}.$$

Um hieraus ein Anfangswertproblem zu machen, müssen wir noch Anfangswerte für y vorgeben, also $y(t_0) = y_0$. Solche Anfangswerte übersetzen sich in Anfangswerte für u und die ersten $n - 1$ Ableitungen von u . Damit überträgt sich der Existenz und Eindeigkeitssatz auf solche Gleichungen. Wir notieren:

Satz 2.3.5 Es seien $u_0^{(k)}$ für $k = 0, \dots, n-1$ reelle Zahlen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$ seien stetige Funktionen. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich der ersten Variablen lokal Lipschitz stetig. Dann hat das Anfangswertproblem (vgl. (2.3.1))

$$Lu = f(u, u' \dots, u^{(n-1)}, x), \quad u^{(k)}(x_0) = u_0^{(k)} \quad k = 0, \dots, n-1, x_0 \in I$$

eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf einem Intervall $J \subset I$ definiert ist. Genügt f einer Lipschitz Bedingung mit einer globalen Lipschitz Konstante, so existiert die Lösung auf ganz I .

Beweis. Folgt sofort aus den entsprechenden Sätzen für die Anfangswertprobleme (2.1.2) und (2.1.3). $\square$

2.4 Ober- und Unterlösungen

Oberlösungen bzw. Unterlösungen dienen dazu die wahre Lösung einzugrenzen und zumindest noch Abschätzungen machen zu können. Sie sind für eine qualitative Diskussion oft äußerst nützlich, wie wir an Beispielen sehen werden. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung.

Lemma 2.4.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $I = [x_0, b)$, $b \leq \infty$ und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen, die im Inneren von I differenzierbar sind. Ist $f(x_0) < g(x_0)$ so ist entweder

- $f(x) < g(x)$ für alle $x \in I$

oder

- es gibt eine Stelle $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = g(x_1)$ und $f'(x_1) \geq g'(x_1)$.

Beweis. Angenommen das Lemma wäre falsch. Seien f, g differenzierbare Funktionen für die die Aussage des Lemmas nicht gilt. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass $f < g$ auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Da wir annehmen, dass für f, g das Lemma nicht gilt, gibt es einen Punkt $y \in I$ mit $f(y) \geq g(y)$. Dann gibt es ein maximales Intervall $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in J$. Am rechten Endpunkt x_1 von J hat man, dass $f(x_1) = g(x_1)$ ist. Wäre nun $f'(x_1) < g'(x_1)$, so wäre $f - g$ auf einem Intervall $(x_1 - \delta, x_1)$ positiv, im Widerspruch zur Wahl von x_1 . (Man führe dieses Argument aus!) $\square$

Definition 2.4.2 Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem

$$(2.4.3) \quad \dot{u} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0,$$

wobei f eine Funktion $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Eine Funktion $v : \mathbb{R} \rightarrow I$ heißt Oberlösung von (2.4.3), falls

- $v(t_0) \geq u_0$

und

- $\dot{v} > f(v, t)$ gilt.

Sind für eine Funktion w beide Ungleichungen gerade umgekehrt, so sprechen wir von einer Unterlösung.

Aufgrund unseres Lemmas 2.4.1 verlaufen Unterlösungen unterhalb und Oberlösungen oberhalb der wahren Lösung des Anfangswertproblems. Man erhält sie oft durch eine Veränderung von f , die eine explizite Lösung möglich macht. Wir diskutieren diese Möglichkeiten an einem Beispiel.

Beispiel 2.4.4 Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{u} = u^2 + t^2 = f(u, t)$, $u(0) = 1$. Durch die Veränderung der rechten Seite f zu $g(u, t) = u^2$ erhält man das Anfangswertproblem $\dot{v} = v^2$ und $v(0) = 1$. Aufgrund des Lemmas ist v eine Unterlösung. Eine einfache Rechnung lehrt, dass $v(t, 0, 1)$ die Form

$$v(t, 0, 1) = \frac{1}{1-t}$$

hat. Das maximale Existenzintervall von v ist $(-\infty, 1)$ und daher kann auch die Lösung $u(t, 0, 1)$ höchstens bis zum Punkt $t = 1$ existieren. Bis dort gilt aber $t \leq 1$, also kann man abschätzen $f(u, t) \leq u^2 + 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{w} = 1 + w^2$, $w(0) = 1$ ist daher eine Oberlösung des Ausgangsproblems. $w(t, 0, 1)$ hat die Form

$$w(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Also haben wir auf dem Existenzintervall von w und für $t \geq 0$

$$v(t, 0, 1) < u(t, 0, 1) < w(t, 0, 1).$$

Die Lösung w existiert bis $t^* = \frac{\pi}{4}$. Insbesondere ist auch $[0, \frac{\pi}{4})$ im maximalen Existenzintervall von u enthalten. Ein weiteres Beispiel wollen wir in den Übungen untersuchen.

2.5 Aufgaben

Aufgabe 2.5.1 Man vervollständige den Beweis von Satz 2.1.18.

Aufgabe 2.5.2 Man zeige, dass eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann in der Metrik d_L konvergiert, wenn die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset W \times \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2.5.3 (a) Man löse das Anfangswertproblem $\dot{u} = \operatorname{sgn}(u)\sqrt{|u|}$, $u(0) = u_0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$. Sind die Lösungen eindeutig?

(b) Existieren die Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{u} = u^2$, $u(0) = u_0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.5.4 Man zeige, dass die Lösungen des Anfangswertproblems $p(x)u'' + q(x)u' + c(x) = 0$ und $u(x_0) = a$, $u'(x_0) = b$ eindeutig auf dem Intervall $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ lösbar sind, sofern p , q , c auf dem Intervall I stetig sind und p dort nicht verschwindet. Wie ist es, wenn p auf dem Rand verschwindet?