

Kapitel 1

Einführung

1.1 Was sind Differentialgleichungen?

In der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ beschäftigt man sich, wie der Name schon besagt, mit Differentialgleichungen und Eigenschaften der Lösungen, sowie mit Methoden, diese zu bestimmen. Was aber ist eine Differentialgleichung? Wir wollen hier keine formale Definition geben. Einfach gesagt ist es eine Gleichung, mit der man eine Funktion u sucht. In dieser Gleichung tritt die Funktion u selbst, Ableitungen von u und vielleicht noch die Variable(n), von denen u abhängt, auf. Bevor wir uns weiter in Allgemeinheiten verlieren, ein Beispiel:

$$(1.1.1) \quad u' = u,$$

wobei die gesuchte Funktion u von einer unabhängigen Veränderlichen x abhängen soll. Eine Lösung kann man leicht angeben:

$$(1.1.2) \quad u(x) = e^x.$$

Offensichtlich löst die angegebene Funktion Gleichung (1.1.1), jedoch ist es nicht die einzige Lösung. Weitere Lösungen findet man leicht. Oft ist man nicht an der gesamten Lösungsvielfalt interessiert, sondern man stellt weitere Forderungen, um eine eindeutige Lösbarkeit zu gewährleisten. Bevor ich exemplarisch typische zusätzliche Anforderungen angebe und motiviere, will ich noch eine weitere Abgrenzung vornehmen. Sucht man Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und gibt eine Relation zwischen u und den Ableitungen von u an, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung**. Betrachtet man hingegen Funktionen, die auf einem höherdimensionalen Raum, z.B. dem $\mathbb{R}^n$, definiert sind, und hat man Beziehungen zwischen u und den **partiellen** Ableitungen von u , so handelt es sich um eine **partielle Differentialgleichung**. Das Interesse an Differentialgleichungen ist schon alt. Erstens gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und der sogenannten Variationsrechnung. Die Variationsrechnung hat die Entwicklung der Analysis zu Zeiten von Euler

und der Bernoullis entscheidend geprägt. Eine typische Aufgabenstellung ist Bestimmung von kürzesten Wegen unter bestimmten Nebenbedingungen. Zweitens eignen sich Differentialgleichungen hervorragend zum Modellieren von Problemen der realen Welt. Diese Problemstellungen haben auch die Typen der oft untersuchten Gleichungen und der zusätzlichen Bedingungen, die man an die Lösung stellt um Eindeutigkeit zu erzielen, geprägt. Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Gleichzeitig lernen wir eine Anzahl von Techniken kennen, mit der man explizite Lösungen erhalten kann. Man muss aber sagen, dass die meisten Differentialgleichungen analytisch nicht in geschlossener Form gelöst werden können. Analytische Methoden liefern aber oft, und das aufzuzeigen ist ein Ziel dieser Vorlesung, Aufschluß über qualitatives Verhalten. Darunter wollen wir verstehen, Frage nach dem Langzeitverhalten, Stabilität von Lösungen usw.. Während sich das quantitative Verhalten von Lösungen heutzutage recht eindrucksvoll mit dem Computer untersuchen läßt, sind die qualitativen Aussagen fast ausschließlich analytischen Untersuchungen zu verdanken. Moderne Fragestellungen von Anwendern verlangen oft beides. Die Symbiose von analytischem Werkzeug und Rechnern kann zu neuer Einsicht führen. Deshalb wollen wir uns im weiteren Verlauf auch mit numerischen Methoden beschäftigen. Zunächst zu einigen Modellproblemen. Bei manchen dieser Probleme werde ich zur Begründung, warum gerade die angegebene Gleichung untersucht wird, einige physikalische Überlegungen anstellen. Diese sind für das Verstehen der Mathematik nicht notwendig.

• Das mathematische Pendel

Hier hat man es mit folgender Aufgabenstellung zu tun: Ein Pendel der Länge ℓ und Masse M sei an einem festen Punkt P aufgehängt und schwinde in einer Ebene um die untere Ruhelage. Wir wollen den zeitlichen Verlauf der Bewegung untersuchen. Zunächst eine Konvention. Da die unabhängige Variable die Zeit ist, werden wir sie, wie allgemein üblich, mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen. Bei der zu beschreibenden Bewegung reicht es offensichtlich, die Winkelauslenkung φ zu jedem Zeitpunkt t anzugeben. Wir werden die Bewegung also durch eine (gesuchte) Funktion $\varphi(t)$ beschreiben. Wie erhält man eine Gleichung für φ ? Dazu betrachten wir Abbildung 1.1: Mit $-g$ bezeichnen wir die Erdbeschleunigung, dann wirkt auf M die Kraft $-Mg$, wobei der radiale Anteil dafür sorgt, dass die Befestigung gespannt bleibt, während der tangentielle Anteil für die Winkelbeschleunigung $\ell\varphi''(t)$ sorgt. Als tangentialen Kraftanteil erhält man $-Mg \sin \varphi(t)$. Damit ergibt sich als Gleichung (aus dem Newtonschen Kraftgesetz¹) (KRAFT=MASSE*BESCHLEUNIGUNG):

$$M\ell\varphi''(t) = -Mg \sin \varphi(t)$$

¹Isaac Newton (4.1.1643-31.3.1727) ist der berühmteste britische Mathematiker, Physiker und Astronom. Es ist einer der wenigen Wissenschaftler dem die Ehre zu Teil wurde in der Westminster Abbey begraben zu werden. Er schuf die Grundlagen unseres Verständnisses der Gravitation und der klassischen Mechanik. Er entdeckte die axiomatischen Grundlagen der rationalen Mechanik. Innerhalb der Mathematik war er einer der Wegbereiter der Analysis und damit der Theorie der Differentialgleichungen.

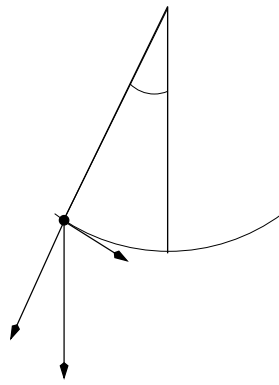


Abbildung 1.1: Am Pendel wirkende Kraft bei einer Auslenkung φ

oder

$$(1.1.3) \quad \varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

Zur einfacheren Behandlung dieser Gleichung hat man schon früh ausgenutzt, dass zumindest für kleine Auslenkungen φ und $\sin \varphi$ annähernd gleich sind. Eine Näherungsgleichung (der Zusammenhang mit (1.1.3) bleibt dabei zumindest jetzt offen) ist daher

$$(1.1.4) \quad \varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t).$$

Setzt man

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ergibt sich als Lösung dieser Gleichung

$$(1.1.5) \quad \varphi(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t),$$

wobei $c_{1,2}$ beliebige reelle Konstanten sind. Man erkennt, dass man $c_{1,2}$ eindeutig bestimmen kann, wenn man eine Anfangsauslenkung und eine Anfangswinkelgeschwindigkeit vorgibt. Dies entspricht unseren Beobachtungen in der realen Welt. Es ist ein erstes Beispiel eines *Anfangswertproblems*.

• Der radioaktive Zerfall

Beim radioaktiven Zerfall betrachtet man folgenden Vorgang. Man hat zum Zeitpunkt 0 eine gewisse Menge u_0 einer radioaktiven Substanz. Mit $u(t)$ bezeichnen wir den zum Zeitpunkt t verbleibenden Rest der Substanz. Durch Beobachtungen erhält man, dass die Anzahl der Zerfälle proportional zur Menge der Substanz ist. Sei α diese Rate. Dann lautet die zugehörige Gleichung (VERÄNDERUNG=ZERFALLSRATE*MENGE)

$$(1.1.6) \quad u'(t) = -\alpha u(t).$$

Wie bei Gleichung (1.1.1) kann man eine Lösung sofort hinschreiben:

$$(1.1.7) \quad u(t) = ce^{-\alpha t}.$$

Jahr	Bevölkerung($\times 10^9$)
0	0.30
1000	0.31
1250	0.40
1500	0.50
1750	0.79
1800	0.98
1850	1.26
1900	1.65
1910	1.75
1920	1.86
1930	2.07
1940	2.30
1950	2.52
1960	3.02
1970	3.70
1980	4.44
1990	5.27
1998	5.90

Tabelle 1.1: Das Bevölkerungswachstum seit Christi Geburt, Quelle: UN

Nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten muss, dass $u(0) = u_0$ erhält man $c = u_0$. Aus dieser Beziehung leitet man sofort ab, wie lange es dauert, bis sich die Menge der radioaktiven Substanz halbiert hat. Ist nämlich $u(T) = \frac{1}{2}u_0$, so rechnet man aus $T = \ln(2)/\alpha$. Dieser Wert ist unabhängig von u_0 und daher gilt immer

$$(1.1.8) \quad u(t + T) = u(t)/2.$$

T wird als **Halbwertszeit** bezeichnet. Sie charakterisiert, wie wir eben gesehen haben, den Zerfallsprozeß. Wiederum haben wir es hier mit einem **Anfangswertproblem** zu tun. Allgemein führen Wachstums- oder Zerfallsprozesse, wobei die Veränderung proportional zur gegenwärtigen Größe ist, auf Differentialgleichungen von der Gestalt (1.1.6).

• Bevölkerungswachstum

Das Wachstum einer Population ist eine Frage von eminenter Bedeutung, sowohl in der Medizin, in der Zoologie, aber es ist auch eine existentielle Frage für die Menschheit. Hier zunächst einige Daten (Quelle: UN) s. Tabelle 1.1 Die nächste Tabelle gibt einen Eindruck der weiteren Entwicklung in den nächsten Jahrzehnten s. Tabelle 1.2 Eine aktualisierte Tabelle aus dem Jahr 2000 prognostiziert (in der mittleren Variante) die in der Tabelle 1.3 angegebenen Zahlen.

Ein einfaches Modell zur Beschreibung einer Population p ohne natürliche Feinde ist, dass sowohl die Geburtenzahl, wie auch die Sterbezahle proportional zum

Jahr	Bevölkerung($\times 10^9$)
2000	6.06
2010	6.79
2020	7.50
2030	8.11
2040	8.58
2050	8.91

Tabelle 1.2: Das prognostizierte Bevölkerungswachstum in den nächsten Jahrzehnten, Quelle: UN 1999

Jahr	Bevölkerung($\times 10^3$)
2000	6056715
2015	7207361
2025	7936741
2050	9322251

Tabelle 1.3: Das prognostizierte Bevölkerungswachstum nach Revision aus dem Jahr 2000, Quelle: UN 2002

Stand der Bevölkerung sind. Dann gibt es eine Geburtenrate B (birth rate), eine Sterberate D (death rate) und p genügt der Differentialgleichung

$$(1.1.9) \quad p' = Bp - Dp.$$

Aus (1.1.9) wird natürlich mit $\beta = B - D$ die Gleichung (1.1.6) mit $\alpha = -\beta$. Ist β positiv, hat man ein Bevölkerungswachstum, ähnlich der Halbwertszeit gibt es nun eine Verdoppelungszeit $T = \ln(2)/\beta$. Beobachtet man in der Realität ein Wachstum, das noch stärker ist (Verkürzung der Verdoppelungszeiten), dann ist (1.1.9) kein geeignetes Modell. Ein schwerwiegender Nachteil dieses Modells ist die Vorhersage grenzenlosen Wachstums. Dies kann wegen der Endlichkeit aller Dinge nicht vorliegen, so gab es schon lange Versuche die Gleichung (1.1.9) zu modifizieren. Ein solches Modell ist die Einführung eines Streßfaktors S , der proportional zur Anzahl der Begegnungen von Individuen der Population ist. Diese ist proportional zu p^2 . Damit erhält man

$$(1.1.10) \quad p' = \beta p - Sp^2.$$

Mit $p(t) = \beta/S$ hat man eine konstante Lösung. Es ergibt sich sogar, dass jede positive Lösung sich an diese konstante Lösung annähert. Man erhält dies, indem man zu jedem Anfangswert eine Lösung durch diesen Anfangswert angibt, die diese Eigenschaft hat. Aus der Eindeutigkeit, die wir noch zeigen werden, folgt dann die Behauptung. Man bekommt die Lösung für einen beliebigen Anfangswert mit der Methode der **Trennung der Veränderlichen**. Wir nehmen uns vor,

eine Lösung der Gestalt $p(t)$ mit $p(t_0) = p_0 \neq \beta/S$, zu finden und schreiben

$$(1.1.11) \quad \frac{dp}{dt} = \beta p - Sp^2.$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$ erhält man

$$(1.1.12) \quad \frac{dp}{dt} \frac{1}{\beta p - Sp^2} = 1.$$

Integration dieser Gleichung von t_0 bis t liefert

$$(1.1.13) \quad \int_{t_0}^t p'(s) \frac{ds}{\beta p(s) - Sp(s)^2} = \int_{t_0}^t ds = t - t_0.$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$, so ist auch $p' \neq 0$ und die linke Seite ergibt mit der Substitutionsregel

$$\int_{p_0}^p \frac{dz}{\beta z - Sz^2}.$$

Dies wird mittels einer Partialbruchzerlegung integriert. Es ergibt sich (wir führen diese Rechnung einmal sehr ausführlich durch) mit $K = \beta/S$

$$\frac{1}{\beta} \int_{p_0}^p \frac{dz}{z} \frac{K}{K - z} = \frac{1}{\beta} \int_{p_0}^p \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{K - z} \right) dz = \frac{1}{\beta} \left(\ln \left(\frac{|p|}{|p - K|} \right) - \ln \left(\frac{|p_0|}{|p_0 - K|} \right) \right).$$

Da die Größe der Population jeweils nicht negativ ist, kann man $p > 0$, $p_0 > 0$ annehmen. Daher hat man

$$(1.1.14) \quad \ln \left(\frac{p|p_0 - K|}{|p - K|p_0} \right) = \beta(t - t_0).$$

Einsetzen und Auflösen nach p bringt uns die endgültige Gestalt der Lösung

$$(1.1.15) \quad \frac{p(p_0 - K)}{(p - K)p_0} = e^{\beta(t-t_0)}.$$

Hier beachtet man noch, dass die Annahme, dass $p(s) \neq K$ für alle $s \in [t_0, t]$ dazu führt, dass $p - K$ und $p_0 - K$ gleiches Vorzeichen haben. Daraus erhält man

$$p = \frac{e^{\beta(t-t_0)}p_0}{p_0 - K}(p - K).$$

Bezeichnet man den hier aufgetretenen Bruch mit B so ergibt sich

$$p(1 - B) = -BK$$

und damit

$$p = \frac{BK}{(B - 1)}.$$

Einsetzen ergibt

$$p(t) = K \frac{e^{\beta(t-t_0)} p_0}{e^{\beta(t-t_0)} p_0 - p_0 + K}.$$

Multiplikation mit $e^{-\beta(t-t_0)}$ führt auf

$$(1.1.16) \quad p(t) = \frac{K p_0}{p_0 - e^{-\beta(t-t_0)}(p_0 - K)}.$$

Wie erwartet, liefert das Einsetzen von $t = t_0$ den Wert p_0 . Um das Verhalten von p für $t \rightarrow \infty$ zu studieren, muss man sich nur das Verhalten des Nenners ansehen. Er konvergiert gegen p_0 und insgesamt ergibt sich der Wert K .

Wir wollen noch die Frage stellen: Woher kommen die Lösungen für $t < t_0$? Sozusagen fragen wir nach der Vergangenheit. Ist $p_0 \in (0, K)$ so existiert die Lösung für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und konvergiert für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0. Ist jedoch $p_0 > K$, so würde formal die Grenzwertbetrachtung $t \rightarrow -\infty$ den gleichen Wert ergeben, dies jedoch erscheint absurd. Man überlegt sich, dass der Nenner für ein $t < t_0$ eine Nullstelle $t_1(p_0)$ hat und demzufolge die Lösung nur auf dem Intervall (t_1, ∞) existiert.

Die hier behandelte Gleichung wird oft als *logistische Gleichung* bezeichnet. Sie geht auf den belgischen Mathematiker VERHULST² zurück.

- **Die schwingende Saite**

Hier betrachtet man die Aufgabe, die Auslenkung u einer schwingenden Saite zum Zeitpunkt t an der Stelle x zu beschreiben. Ohne Begründung möchte ich im Moment die zugrundeliegende Differentialgleichung angeben. Sie lautet

$$(1.1.17) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Eine Herleitung dieser Gleichung findet man bei Heuser [14, S.291/292]. Üblicherweise befestigt man eine Saite an den Endpunkten und hindert sie damit an der Auslenkung. Wir nehmen an, dass diese Endpunkte $x = 0$ und $x = \pi$ sind. Damit erhält man die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.

Hier handelt es sich um eine *partielle Differentialgleichung*. In diesem und im folgenden Beispiel sehen wir, dass gewöhnliche Differentialgleichungen eine erhebliche Rolle bei der Diskussion von Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen spielen.

Wir setzen der Einfachheit halber $\lambda = 1$. Mit dem Ansatz

$$(1.1.18) \quad u(x, t) = v(x)w(t)$$

erhält man die Beziehung

$$(1.1.19) \quad v(x)w''(t) = v''(x)w(t).$$

²Pierre-Francois Verhulst (28.10.1804-15.2.1849) war Professor an der Freien Universität in Brüssel und später an der königlichen Militärschule. Seine Arbeiten zum Bevölkerungswachstum machten ihn zum Begründer der Bevölkerungsstatistik.

Steckt man noch die Annahme rein, dass im Punkt (x, t) beide Funktionen v , w nicht verschwinden, so ergibt sich

$$(1.1.20) \quad \frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Da die beiden Seiten von verschiedenen Variablen abhängen, müssen diese konstant und gleich sein. Setzen wir diese Konstante $-K$, $K > 0$ so ergibt sich

$$(1.1.21) \quad \begin{aligned} w'' &= -Kw \\ v'' &= -Kv. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von K ist physikalisch motiviert. Sonst erhält man keine zeitlich periodische Lösung. Für eine vollständige Lösung muss man zumindest aus mathematischer Sicht auch den anderen Fall diskutieren. Eine Lösung der zweiten Gleichung lautet, wie in (1.1.5)

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{K}x) + c_2 \sin(\sqrt{K}x).$$

Die Randbedingung $v(0) = 0$ eliminiert den Kosinusterm, die Bedingung $v(\pi) = 0$ ergibt für K die möglichen Werte $K = n^2$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Damit kann man eine Schar von Lösungen der Gleichung (1.1.17) angeben. Sie lautet

$$(1.1.22) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(d_n^1 \cos(nt) + d_n^2 \sin(nt) \right) \sin(nx).$$

Geht man von einer Ausgangsauslenkung mit Ausgangsgeschwindigkeit 0 aus, so verschwindet der Sinusterm und man behält die Lösung

$$(1.1.23) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(nt) \sin(nx).$$

Ausführliche historische Bemerkungen findet man bei Heuser, [14, S. 441-449]. Diese seien allen Hörern anempföhlen. Man erkennt, dass über das Problem der schwingenden Saite viele der großen Mathematiker nachgedacht haben, wir

erwähnen EULER³, LAGRANGE⁴, BERNOULLI⁵, D’ALEMBERT⁶ und RIEMANN⁷. Diese Liste ist unvollständig.

- **Die Wärmeleitungsgleichung**

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, die die Temperaturentwicklung in einem Stab modelliert. Wir nehmen an, wir hätten einen Stab der Länge ℓ . Für $x \in (0, \ell)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $u(x, t)$ die Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t an der Stelle x . Die Anfangsverteilung der Temperatur sei durch eine Funktion $u_0(x)$ gegeben. An den Enden des Stabes bieten sich verschiedene Randbedingungen an, die physikalisch motiviert sind. Zum einen kann man annehmen, dass man an den Enden eine feste Temperatur τ hat, o.B.d.A. nehmen wir $\tau = 0$ an, oder eine vollständige Isolierung, d.h. keine Temperaturänderung durch den Rand, d.h. $u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die erste Randbedingung wird nach DIRICHLET⁸ benannt, die zweite nach NEUMANN⁹. An der Stelle (x, t) ist dabei die Differentialgleichung

$$(1.1.24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt. Zur Vereinfachung setzen wir $k = 1$. Wieder macht man den Ansatz

³Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen. Die Herausgabe seines vollständigen Werkes ist bis heute nicht abgeschlossen. Er verbrachte längere Zeit an der Akademie der Wissenschaften in Potsdam und am Hofe der Zarin in St. Petersburg.

⁴Joseph Louis Lagrange (25.1.1736–10.4.1813) war Mathematiker, Physiker und Astronom. Er arbeitete zunächst über Variationsprobleme. Auf Einladung von Friedrich II verbrachte er 20 Jahre in Berlin und verfaßte hier unter anderem sein Werk *Mécanique analytique*. Neben seinen Beiträgen zur Analysis (nach ihm sind eine Restgliedformel und der Multiplikator benannt) stammen auch algebraische Erkenntnisse von ihm.

⁵Johann I Bernoulli (6.8.1667–1.1.1748) war jüngerer Bruder von Jakob I Bernoulli, von dem er die Mathematik lernte, sich aber später mit ihm überwarf. Er lehrte in Groningen und Basel und schuf bedeutende Beiträge zur Analysis, insbesondere löste er das Problem der schwingenden Saite und arbeitete zur Variationsrechnung.

⁶Jean-Baptist le Rond d’Alembert (17.11.1717–29.10.1783) war einer der bekanntesten Gelehrten seiner Zeit. Er arbeitete zunächst über Hydrodynamik. Sein Hauptwerk „*Traité de dynamique*“ widmete sich der klassischen Mechanik und ihrer Mathematisierung. Er bemühte sich die physikalische Umwelt mathematisch zu beschreiben und die dabei auftretenden Probleme zu lösen, u.a. beschrieb er die Bewegung der schwingenden Saite durch eine Differentialgleichung.

⁷Bernhard Riemann (17.9.1826–20.7.1866) war Sohn eines Pastors und studierte auch anfänglich Theologie. Seine Dissertation widmete sich den Grundlagen der Funktionentheorie. In seinem Habilitationsvortrag legte er den Grundstein für ein modernes Verständnis der Geometrie. Obwohl er nicht einmal vierzig Jahre alt wurde, hat er die Mathematik und Physik grundlegend beeinflusst.

⁸Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805–5.5.1859) bewies den großen Fermat’schen Satz für $n = 5$. Bekannt sind vor allem die nach ihm benannten Reihen, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielen, und sein Beitrag zur Variationsrechnung. Er wurde Nachfolger von Gauß in Göttingen, lehrte und forschte in vielen Gebieten der Mathematik. Herausragend sind seine Leistungen in der Zahlentheorie und in der Theorie der Differentialgleichungen.

⁹Franz Ernst Neumann (11.9.1798–23.5.1895) arbeitete vor allem zur mathematischen Physik.

$u(x, t) = v(x)w(t)$. Dann erhält man

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v} = -\lambda.$$

Wir nehmen an, $\lambda > 0$. Dann lautet eine mögliche Lösung

$$u(x, t) = e^{\lambda t} (c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)).$$

Aus der Randbedingung am linken Rand ergibt sich $c_1 = 0$, und die Randbedingung am rechten Rand ergibt $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, also

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$$

für eine natürliche Zahl n . Da man beliebige Summen (Reihen) bilden kann, lautet eine sehr allgemeine Lösung

$$(1.1.25) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

Die Werte für c_n bestimmt man durch Entwicklung von u_0 in eine Fourierreihe, siehe z.B. DYM & MCKEAN[8]

• Das elektrische Feld

Sei $\mathbf{E}$ ein elektrisches Feld in der Ebene mit Komponenten $\mathbf{E}=(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Sei $\mathbf{U}$ das Potential dieses Feldes. Also $\mathbf{E}=\nabla\mathbf{U}$, wobei $\mathbf{U}$ eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y ist. Wir stellen uns die Frage, welches sind die Linien, längs denen das Potential konstant ist. An fast allen Punkten (x, y) wird entweder $x = x(y)$ eine Funktion von y sein, oder umgekehrt $y = y(x)$ eine Funktion von x . Wir beschränken uns auf den zweiten Fall, der erste geht daraus durch einfaches Umschreiben hervor. Um die Äquipotentiallinien zu finden, geben wir uns eine, zunächst beliebige, Konstante c vor und stellen die Frage, wo ist $\mathbf{U} = c$? Die Annahme, dass diese Linie durch $y = y(x)$ zu beschreiben ist, führt auf $\mathbf{U}(x, y(x)) = c$ und differenzieren nach x ergibt

$$(1.1.26) \quad \frac{d}{dx}\mathbf{U}(x, y(x)) = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Dies ist ein Beispiel einer **exakten** Differentialgleichung. Allgemeiner sind diese folgendermaßen definiert:

Definition 1.1.27 Die Differentialgleichung habe die Form

$$(1.1.28) \quad f(x, y) \frac{dy}{dx} + g(x, y) = 0.$$

Gibt es eine Funktion $\mathbf{U}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$(1.1.29) \quad f(x, y) = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial y}, \quad g(x, y) = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x},$$

so nennt man die Gleichung (1.1.28) exakt.

Bei exakten Differentialgleichungen sind die Niveaulinien von U immer aus Trajektorien der Gleichung zusammengesetzt: ist $U(x_0, y_0) = c$ und $f(x_0, y_0) \neq 0$, so ist

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \neq 0$$

und der Satz über implizite Funktionen garantiert eine lokale Darstellung der Menge

$$\{(x, y) \mid U(x, y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x, y(x)) \mid |x - x_0| < \delta\}$$

für ein geeignetes $\delta > 0$. Nun ist

$$U(x, y(x)) = c \text{ und daher } \frac{d}{dx}U(x, y(x)) = 0.$$

Also hat man

$$0 = \frac{d}{dx}U(x, y(x)) = \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}U(x, y)y'(x) = g(x, y) + f(x, y)y'.$$

Hat man die Niveaulinien gefunden, kann man oft auch noch die Trajektorien bestimmen.

Aus $U_{xy} = U_{yx}$ erhält man unmittelbar die notwendige Bedingung

$$f_x = g_y$$

für die Exaktheit einer Gleichung. Ist bei einer Gleichung der Form (1.1.28) die Bedingung (1.1.29) nicht erfüllt, so ist es manchmal möglich, einen **integrierenden Faktor** zu finden. Dies ist eine Funktion $M(x, y)$, so dass Mf bzw. Mg die Bedingung (1.1.29) erfüllen. Eine Diskussion der Gleichung ist dann der Diskussion einer exakten Gleichung ähnlich. Insbesondere führt die Forderung $(Mg)_y = (Mf)_x$ auf die partielle Differentialgleichung

$$M_y g + M g_y = M_x f + M f_x.$$

1.2 Die ersten numerischen Schritte

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir das erste einfache numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen besprechen und auf die genannten Problemstellungen anwenden. Wir betrachten ein Anfangswertproblem bestehend aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung und einem Anfangswert der Form

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

auf dem $\mathbb{R}^n$ und wollen einen Algorithmus zur Bestimmung einer Näherungslösung entwickeln. Der einfachste Zugang ist die Überlegung

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x),$$

und daraus entsteht

$$x(t+h) = x(t) + h * f(x, t).$$

Eine Programmiersprache, die sich speziell eignet, Algorithmen auf einfache Weise in Programme umzuwandeln, ist die Sprache **matlab**. Das zugehörige matlab-Programm sieht wie folgt aus (bei gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, einer Schrittweite $sw > 0$ und einer Endzeit $t_1 \in \mathbb{R}$)

```
x = x0
t = t0
h = sw
while t < t1
    x = x + h * f(t, x)
    t = t + h
end
```

Das angegebene Programm berechnet eine Näherungslösung, jedoch wird diese erst mit Sinn erfüllt, wenn man entweder durch eine graphische Ausgabe oder durch geeignete Aufbereitung der Resultate diese in verständlicher Form darstellen kann.

Dabei wird auf natürliche Weise die Frage nach einer graphischen Darstellung der Resultate gestellt. Je nach Fragestellung mag die Antwort unterschiedlich ausfallen, wir präsentieren zwei Beispiele in matlab:

1. Wir initialisieren einen Wert $i=0$ und fügen in die obige while-Schleife noch die Befehle $i=i+1$ und $y(i)=x$ (oder im Falle eines Vektors x den Befehl $y(i)=x(k)$ für einen Index k) ein. Danach erhält man mit dem einfachen Kommando `plot (y)` einen Auftrag zur graphischen Ausgabe der entsprechenden Komponente über der Zeit. Das vollständige Programm sieht dann wie folgt aus, wobei f in einer eigenen Datei abgelegt wird.

```
x = x0
t = t0
h = sw
i = 0
while t < t1
    y(i) = x
    x = x + h * f(t, x)
```

```

        t    = t + h
        i    = i + 1
    end

    plot y

```

2. Oft will man jedoch eine andere Darstellung: Wir betrachten dies anhand der Pendelgleichung und setzen $x_1(t) = x(t)$ und $x_2(t) = x'(t)$ und stellen nun jeweils den Wert des Vektors $(x_1(t), x_2(t))$ dar. Hier sieht das vollständige Programm wie folgt aus

```

x = x0
t = t0
h = sw
i = 0
while t < t1
    y1(i) = x(1)
    y2(i) = x(2)
    x = x + h * f(t, x)
    t = t + h
    i = i + 1
end

plot(y1,y2)

```

Ein Beispiel für die Pendelgleichung ist das folgende Programm (zu speichern in einer Datei pendel.m (innerhalb des matlab-Suchpfades)):

```

t = 0
t1 = 80
x = [0, 1.915]
h = 0.005
i = 1
while t < t1
    e1(i) = x(1);
    e2(i) = x(2);
    x = x + h * h_osc(t, x);
    t = t + h;
    i = i + 1;
end
plot(e1,e2)

```

dabei wird noch eine Datei mit dem Namen h_osc.m folgendes Inhaltes

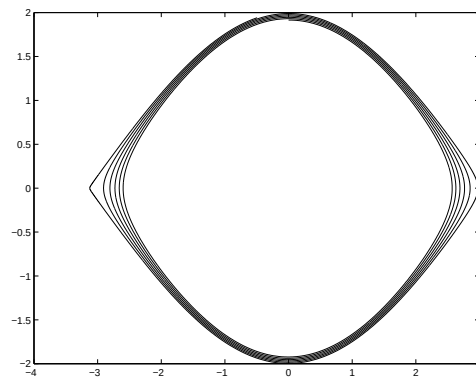


Abbildung 1.2: Das mathematische Pendel, der Anfangswert ist innerhalb der sogenannten Seperatrix gewählt. Die Seperatrix trennt Gebiete von Anfangswerten mit speziellen Eigenschaften (solchen mit Überschlagen von solchen ohne. Sie selbst besteht aus Lösungskurven, die jedoch nicht leicht zu finden sind und den Übergang vom oberen Gleichgewicht zum oberen Gleichgewicht beschreiben, Die Frage, ob das Bild das wirkliche Lösungsverhalten korrekt wiedergibt, wird uns noch beschäftigen.

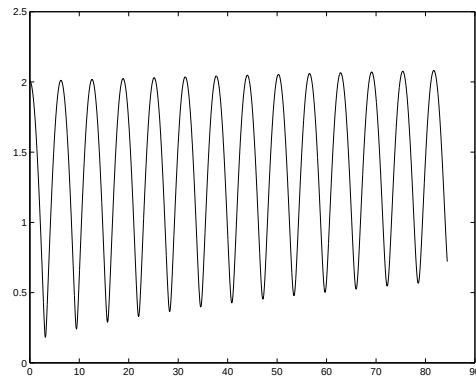


Abbildung 1.3: Das mathematische Pendel mit Anfangswert außerhalb der sogenannten Seperatrix.

```
function v=h_osc(t,x)
v=[x(2), -sin(x(1))];
```

benötigt. Es liefert die Graphik in Abbildung 1.2. Ändert man den Anfangswert der zweiten Komponente auf $x(2) = 2.005$, so erhält man Abbildung 1.3 Ein interessantes Verhalten liefert der Anfangswert 1.91535, siehe Abbildung 1.4.

1.3 Bezeichnungen

Die folgenden Bezeichnungen sind Standard und werden regelmäßig gebraucht werden. Einige werden erst später erklärt.

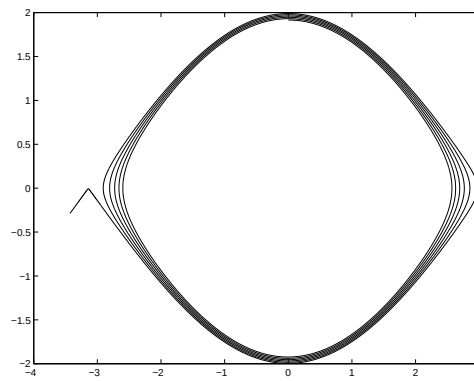


Abbildung 1.4: Die numerisch berechnete Lösung scheint für diesen Anfangswert innerhalb, der Seperatrix zu starten, zu einem späteren Zeitpunkt zeigt sie jedoch das Verhalten der Lösung von außerhalb.

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$i\mathbb{R}$	die imaginäre Achse
$\mathbb{R}^n$	n -dimensionaler reeller Vektorraum mit üblichen Strukturen
u'	Ableitung einer Funktion die auf $\mathbb{R}$ definiert ist
$\dot{u}$	wie eben, unabhängige Veränderliche ist die Zeit t
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
$ \cdot $	Betrag einer reellen Zahl oder Norm im $\mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ $	Norm in einem Banachraum
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$	metrische Räume oder Banachräume
M, N	Mannigfaltigkeiten
$T_x M$	Tangentialraum an M in $x \in M$
TM	Tangentialbündel von M
$C(A, B)$	Raum der stetigen Funktionen von $A \rightarrow B$
$\text{Lip}(A, B)$	Raum der Lipschitz stetigen Funktionen
∂U	Rand einer Menge U
$\text{dist}(A, B)$	Abstand zweier Mengen: $\inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

1.4 Hilfsmittel aus der Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir einige Begriffe einführen, bzw. wiederholen, die für eine einfache und geschlossene Behandlung der Theorie unumgänglich sind.

1.4.1 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Definition 1.4.1 Sei X eine Menge, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum, falls d den folgenden Forderungen genügt.

M1 $d(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in X \times X$

M2 $d(x, y) = 0 \iff x = y$

M3 $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in X \times X$

M4 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall (x, y, z) \in X \times X \times X$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ nennt man Cauchyfolge¹⁰, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n > N, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(b) Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn zu jeder Cauchyfolge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X ein Element $\bar{x} \in X$ existiert, so dass gilt

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Dies bedeutet natürlich: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$n > N \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon.$$

Eine reiche Klasse von metrischen Räumen sind normierte Vektorräume. Wir werfen einen Blick darauf.

Definition 1.4.3 Sei X ein reeller Vektorraum.

(a) Man nennt $(X, \|\cdot\|)$ einen normierten Raum, falls $\|\cdot\|$ eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist, so dass

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X;$

2. $\|x\| = 0 \iff x = 0;$

¹⁰Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoß demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war sehr produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X};$$

$$4. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbf{X}$$

gilt.

Ohne Beweis geben wir das folgende (triviale) Lemma an.

Lemma 1.4.4 *Mit*

$$(1.4.5) \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

wird ein normierter linearer Raum $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ zum metrischen Raum $(\mathbf{X}, d)$.

Definition 1.4.6 *Ist ein normierter, linearer Raum $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ bezüglich der Metrik aus (1.4.5) vollständig, so bezeichnet man ihn als Banachraum, nach BANACH¹¹.*

Definition 1.4.7 *Sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Eine Abbildung $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ heißt Kontraktion, falls für alle (x, y) in $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ gilt:*

$$(1.4.8) \quad d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

T nennt man stark kontrahierend, wenn es ein $\lambda \in (0, 1)$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ gilt

$$(1.4.9) \quad d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y).$$

Satz 1.4.10 (Banach) *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Jede stark kontrahierende Abbildung $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbf{X}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Angenommen x_1, x_2 sind Fixpunkte. Dann ist

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2) < \lambda d(x_1, x_2).$$

Also ist $d(x_1, x_2) = 0$ und wegen (M2) folgt $x_1 = x_2$. Wir kommen zur Existenz. Sei $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{X}$ durch $x_n = Tx_{n-1}$ und behaupten, dass dies eine Cauchyfolge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 1$ ergibt sich mit (M4)

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) = \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j)$$

Für ein j im angegebenen Bereich schließt man

$$d(x_{j+1}, x_j) = d(T^j x_1, T^j x_0) \leq \lambda^j d(x_1, x_0).$$

¹¹Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945), polnischer Mathematiker, war der Begründer der Theorie linearer, normierter Räume und ihren linearen Abbildungen. Seine Arbeiten sind die Grundlage der modernen Funktionalanalysis. Er und seine Schüler zeigten viele Anwendungen der Funktionalanalysis auf.

Also hat man

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^m \lambda^j d(x_1, x_0) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^j d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

solange nur n genügend groß ist. Mit der Vollständigkeit von (X, d) ergibt sich die Konvergenz der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Mit $\bar{x}$ bezeichnen wir den Grenzwert. Der letzte Schritt besteht darin die Fixpunkteigenschaft des Grenzwertes nachzuweisen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$, so dass $n > N$ impliziert

$$d(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist für $n > N$

$$\begin{aligned} d(T\bar{x}, \bar{x}) &\leq d(T\bar{x}, x_n) + d(x_n, \bar{x}) \\ &= d(T\bar{x}, Tx_{n-1}) + d(x_n, \bar{x}) \\ &\leq \lambda d(\bar{x}, x_{n-1}) + d(x_n, \bar{x}) \\ &\leq 2d(x_n, \bar{x}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist

$$d(T\bar{x}, \bar{x}) = 0$$

und damit

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

□

Bemerkung 1.4.11 Ein alternativer Beweis für die Fixpunkteigenschaft besteht in der Beobachtung, dass T stetig ist (warum?) und dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & Tx_n & \rightarrow & T\bar{x} \\ \downarrow & & & & \\ \bar{x} & & & & \end{array}$$

Satz 1.4.12 (Stetige Abhängigkeit) Sei $(\mathbf{X}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $(\mathbf{Y}, d')$ ein metrischer Raum. Ferner sei für jedes $y \in \mathbf{Y}$ eine starke Kontraktion $T_y : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ mit Kontraktionskonstante λ_y gegeben. Es sei $s = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \lambda_y < 1$. Für jedes $x \in \mathbf{X}$ sei die Abbildung

$$F_x : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X} : y \mapsto T_y x$$

stetig. Dann ist auch die Abbildung

$$(1.4.13) \quad G : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X} : y \mapsto \bar{x}_y,$$

stetig, wobei $\bar{x}_y$ durch $T_y \bar{x}_y = \bar{x}_y$ definiert ist.

Beweis. Fixiere $y_0 \in Y$. Wir zeigen die Stetigkeit in y_0 . Sei $\bar{x}_0$ der zugehörige Fixpunkt von T_{y_0} . Dann gilt für den Fixpunkt $\bar{x}_y$ von T_y ,

$$\begin{aligned}
 d(\bar{x}_y, \bar{x}_0) &= d(T_y \bar{x}_y, T_{y_0} \bar{x}_0) \\
 (1.4.14) \quad &\leq d(T_y \bar{x}_y, T_y \bar{x}_0) + d(T_y \bar{x}_0, T_{y_0} \bar{x}_0) \\
 &\leq \lambda_y d(\bar{x}_y, \bar{x}_0) + d(T_y \bar{x}_0, T_{y_0} \bar{x}_0).
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$(1 - s)d(\bar{x}_y, \bar{x}_0) \leq (1 - \lambda_y)d(\bar{x}_y, \bar{x}_0) \leq d(T_y \bar{x}_0, T_{y_0} \bar{x}_0).$$

Wegen $s < 1$ darf man durch $(1 - s)$ teilen und die Behauptung folgt aus der Stetigkeit von F_{x_0} . $\square$

1.4.2 Mannigfaltigkeiten

In diesem kurzen Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit soweit ein, dass wir Anfangswertprobleme auf Mannigfaltigkeiten diskutieren können. Dies macht die Theorie nicht schwieriger, führt aber oft zu entscheidenden Vereinfachungen der Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichungen. Oft ist allein die Geometrie eines Vorgangs so einschränkend, dass es sinnvoll ist, sich diese Einschränkungen zunutze zu machen. Man denke an das Pendel. Die Geometrie zwingt zur Bewegung auf einer Kreislinie. Zur Beschreibung des Zustandes benötigt man zwei Variablen in $S^1 \times \mathbb{R}$, den Winkel (nimmt nur Werte auf der Kreislinie an) und die Winkelgeschwindigkeit, welche Werte in $\mathbb{R}$ annehmen kann. Eine Beschreibung in $\mathbb{R}^2$ würde vier Größen benötigen, zwei für den Ort, zwei für die Geschwindigkeit.

Der Begriff der Mannigfaltigkeiten ist eine naheliegende Verallgemeinerungen des Begriffes der Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, nur dass wir nun auf den umgebenden Raum, sowohl bei der Definition, wie auch bei der technischen Bewältigung der damit verbundenen Probleme verzichten wollen. Bei Untermannigfaltigkeiten hat man Sätze zum lokalen Geradbiegen und Sätze die Gleichwertigkeit von Parametrisierung und von der Beschreibung als (lokales) Nullstellengebilde. Hier fehlen solche Techniken. Trotzdem werden wir auf keine der Begriffsbildungen verzichten müssen.

Ausgangspunkt für diese Überlegungen ist das mathematische Pendel: Umgebungen von Punkten sehen aus wie Umgebungen von Punkten in $\mathbb{R}$, lokal ist unser Raum homöomorph zu $\mathbb{R}$, wenn auch die **globale** Gestalt sehr unterschiedlich ist: S^1 ist kompakt und $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt. (Man beachte, dass Kompaktheit unter Homöomorphismen erhalten bleibt!)

Definition 1.4.15 Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Gibt es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U_x \subset M$, welche homöomorph zu einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$ ist, so nennen wir den Raum lokal euklidisch.

Lemma 1.4.16 Ist M zusammenhängend und lokal euklidisch, so ist n unabhängig von x .

Beweis. Wir benutzen eine Aussage aus der Analysis, die nicht offensichtlich ist, vgl. DEIMLING [6], sind zwei offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ homöomorph, so ist $m = n$. Sind nun $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, $\tau_x : U_x \rightarrow V_x \subset \mathbb{R}^n$, $\tau_y : U_y \rightarrow V_y \subset \mathbb{R}^m$ Homöomorphismen, so ist

$$\tau_y \circ \tau_x^{-1} : \tau_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \tau_y(U_x \cap U_y)$$

ein Homöomorphismus zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ und damit ist $n = m$. Daraus folgt, dass die Menge der Punkte $C(n) = \{x \in M \mid \tau_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ offen ist und offenes Komplement besitzt. Da M zusammenhängend ist, ist $C(n) = \emptyset$ oder $C(n) = M$. $\square$

Während wir für die Abbildungen τ_x nicht mehr verlangen können, als dass es Homöomorphismen sind, bilden die Abbildungen $\tau_y \circ \tau_x^{-1} : \tau_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \tau_y(U_x \cap U_y)$ offene Mengen in euklidischen Räumen auf ebensolche Mengen ab und wir können Differenzierbarkeitseigenschaften für diese Abbildungen fordern.

Definition 1.4.17 1. Sei $\{U_x \subset M \mid x \in M\}$ eine offene Überdeckung von M . Eine Familie von Homöomorphismen $\tau_x : U_x \rightarrow V_x$, wobei $V_x \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist, so dass für je zwei Abbildungen τ_x, τ_y gilt

$$(1.4.18) \quad \tau_x \circ \tau_y^{-1} : \tau_y(U_x \cap U_y) \rightarrow \tau_x(U_x \cap U_y)$$

ist ein Diffeomorphismus und r -mal stetig differenzierbar, nennt man einen C^r -Atlas auf M . Einen Atlas bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$.

2. Ist $\mathcal{A}$ ein C^r -Atlas, $\tau \in \mathcal{A}$ eine Abbildung mit zugehörigem Definitionsbereich U , so nennen wir (τ, U) eine C^r -Karte und U eine Koordinatenumgebung. Die Abbildung

$$\tau_x \circ \tau_y^{-1} : \tau_y(U_x \cap U_y) \rightarrow \tau_x(U_x \cap U_y)$$

nennen wir Kartenwechseldiffeomorphismus.

3. Zwei C^r -Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sind äquivalent, wenn für zwei Koordinatenumgebungen $(\tau_1, U_1), (\tau_2, U_2)$ mit $\tau_1 \in \mathcal{A}_1, \tau_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt,

$$(1.4.19) \quad \tau_1 \circ \tau_2^{-1} : \tau_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \tau_1(U_1 \cap U_2)$$

ist r -mal stetig differenzierbar.

4. Eine Äquivalenzklasse Σ von C^r -Atlanten $[\mathcal{A}]$ wird als C^r -differenzierbare Struktur auf M bezeichnet.

5. Ist Σ eine C^r -differenzierbare Struktur auf M , so nennt man das Paar (M, Σ) eine C^r -Mannigfaltigkeit.

6. Ist M zusammenhängend, so sind (nach Lemma 1.4.16 alle Bilder von Koordinatenumgebungen im gleichen Raum $\mathbb{R}^n$. Die Zahl n heißt die Dimension der Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 1.4.20 Die in Punkt 3 definierte Äquivalenz ist, wie man leicht nachprüft, tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Damit wird die Definition in Punkt 4 sinnvoll.

Beispiel 1.4.21

- **Der euklidische Raum**

Hier definiert man durch eine Karte $(id, \mathbb{R}^n)$ einen Atlas (bestehend aus eben dieser Karte) und dessen Äquivalenzklassen gibt eine differenzierbare Struktur.

- **Sphären**

Die Einheitssphäre S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist gegeben durch

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$

Die Definition von Koordinatenumgebungen kann auf verschiedene Weisen erfolgen, eine Möglichkeit ist jede Halbkugel

$$H_j^\pm = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, \pm x_j > 0 \right\}$$

durch

$$\tau_j : H_j^\pm \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} (\mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}_j)$$

mit $2n$ Karten zu versehen.

- **Tori**

Die Definition der Tori ist eine erste interessante Konstruktion mit Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ und darin $\mathbb{Z}^n$ als additive Untergruppe. Wir führen auf $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation ein, indem wir zwei Punkte äquivalent nennen, falls sie sich um einen Vektor in $\mathbb{Z}^n$ unterscheiden. Sei $\mathbf{T}^n$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. Als Metrik führt man ein

$$(1.4.22) \quad d'([x], [y]) = \inf \{d(x, y) \mid x \in [x], y \in [y]\},$$

wobei d die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Das Nachprüfen der ersten drei Eigenschaften einer Metrik ist elementar: $d'([x], [y])$ ist definiert als das Infimum einer Menge nichtnegativer Zahlen, also ist es nichtnegativ. Ist $d'([x], [y]) = 0$ so gibt es Folgen $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [x]$ und $\{\mathbf{y}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [y]$ mit $d(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \rightarrow 0$ mit $j \rightarrow \infty$. OBdA dürfen wir annehmen, dass alle $\mathbf{x}_j \in [0, 1)^n$ liegen (kann man durch Addition eines Elementes in $\mathbb{Z}^n$ immer erreichen). Da jede Klasse $[x]$ die Menge $[0, 1)^n$ in genau einem Punkt schneidet, folgt aus der Annahme, dass die Folge der $\mathbf{x}_j$ konstant ist, sagen wir $\mathbf{x}$ ist. Nun konvergiert die Folge der $\{\mathbf{y}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen $\mathbf{x}$, d.h. zu $\varepsilon < \frac{1}{4}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $\mathbf{y}_j$, $j > N$ in $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ liegen. Die Klasse $[y]$ schneidet aber einen Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ in genau einem Punkt, also ist für $j > N$ die Folge der $\mathbf{y}_j$ konstant. Insbesondere folgt aus der Konvergenz, dass für $j > N$ $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}$. Also sind die Klassen gleich. Die Symmetrie der Metrik folgt

sofort aus der Definition.

Die letzte der Eigenschaften einer Metrik erhält man, indem man zwei Punkte $x \in [x]$ und $y \in [y]$ wählt, die den Abstand minimieren (die Existenz ist klar!). Dann gilt für jedes $z \in [z]$

$$d'([x], [y]) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Beim Übergang zum Infimum auf der rechten Seite entsteht das Problem, dass das Infimum in beiden Termen für verschiedene $z \in [z]$ angenommen werden könnte. Sei also $d'([x], [z]) = d(x, z')$ und $d'([y], [z]) = d(y, z)$. Dann erhält man durch Verschieben (die Metrik d ist translationsinvariant!), dass $d'([x], [z]) = d(x', z)$ für ein geeignetes $x' \in [x]$ ist. Dann hat man $d'([x], [z]) = d(x', z)$ und

$$d'([x], [y]) \leq d(x', y) \leq d(x', z) + d(y, z) = d'([x], [z]) + d'([y], [z]).$$

Um Karten zu definieren, betrachten wir für $x \in \mathbb{R}^n$ die Kugel $K(x)$ mit Radius $1/4$ um x . Sie schneidet jede Äquivalenzklasse höchstens einmal. Sei $\rho_x : K(x) \rightarrow \mathbf{T}^n$ gegeben durch die Einschränkung der Abbildung $x \mapsto [x]$. Da jede Klasse höchstens einen Punkt in dieser Kugel besitzt, ist die Abbildung injektiv und deswegen umkehrbar. Für je zwei Punkte $y_1, y_2 \in K(x)$ gilt $d'(\rho_x(y_1), \rho_x(y_2)) = d(y_1, y_2)$. Deswegen ist ρ_x ein Homöomorphismus und gleiches gilt natürlich für die Umkehrung $\tau_x = \rho_x^{-1}$. Insgesamt ergibt sich, dass $\mathbf{T}^n$ eine C^∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. $\mathbf{T}^n$ wird als n -Torus bezeichnet.

Definition 1.4.23 Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ heißt differenzierbar, wenn für jede Karte τ aus einem Atlas in Σ gilt, dass $\tau \circ \gamma$ differenzierbar ist. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen.

Allgemeiner definiert man differenzierbare Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Wir werden dies benötigen, um Differentialgleichungen hinschreiben zu können.

Definition 1.4.24 Seien (M, Σ) , (N, Σ') differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt differenzierbar, wenn für je zwei Karten τ, τ' aus Σ, Σ' gilt, dass

$$\tau' \circ f \circ \tau^{-1} : \tau(U) \rightarrow \tau'(U')$$

differenzierbar ist.

Lemma 1.4.25 1. Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ ist im Punkt t_0 in $\mathbb{R}$ genau dann differenzierbar, wenn für eine Karte $\tau_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t_0) \in U_x$ gilt

$$\tau_x \circ \gamma \text{ ist in } t_0 \text{ differenzierbar.}$$

2. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in M$ differenzierbar, wenn für eine Karte (τ, U) , $x_0 \in U \subset M$ und eine Karte (σ, V) , $f(x_0) \in V \subset N$ offen gilt

$$\sigma \circ f \circ \tau^{-1} : U \rightarrow \sigma(f(U) \cap V)$$

ist differenzierbar.

Beweis. Eine Richtung ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition, die andere folgt einfach durch Anfügen eines geeigneten Kartenwechseldiffeomorphismus. $\square$

Bemerkung 1.4.26 Euklidische Räume seien immer mit der differenzierbaren Struktur versehen, welche durch die Identität definiert wird.

Definition 1.4.27 Sei (M, Σ) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $\gamma_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow M$ seien differenzierbare Abbildungen (Kurven) mit $x_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Wir sagen, γ_1 und γ_2 sind im Punkt x_0 tangential, in Zeichen $\gamma_1 \sim_0 \gamma_2$, wenn für jede Koordinatenumgebung (τ, U) von $\gamma_1(0)$ gilt

$$(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0).$$

Eine einfache Überlegung liefert:

Lemma 1.4.28 1. $\sim_0$ ist eine Äquivalenzrelation.

2. Ist für eine Karte τ die Beziehung $(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0)$ erfüllt, so ist sie für jede Karte richtig.

Beweis.

1. Die Symmetrie und die Reflexivität der Relation sind klar. Die Transitivität folgt ebenfalls unmittelbar.
2. Sind $(\tau_x, U_x), (\sigma_x, V_x)$ zwei Karten mit $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \in U_x \cap V_x$. Dann ist $\sigma_x = (\sigma_x \circ \tau_x^{-1})\tau_x$. Ist nun

$$(\tau_x \circ \gamma_1)'(0) = (\tau_x \circ \gamma_2)'(0)$$

so bleibt die Gleichheit unter $(\sigma_x \circ \tau_x^{-1})'$ erhalten und überträgt sich damit auf die Karte (σ_x, V_x) .

$\square$

Definition 1.4.29 Sei $[\gamma]_0$ eine Äquivalenzklasse, der Relation $\sim_0$. Eine Klasse $[\gamma]_0$ wird Tangentialvektor an M im Punkt $\gamma(0)$ genannt. Die Menge der Tangentialvektoren bei $x \in M$ bezeichnet man als Tangentialraum im Punkt x , wir schreiben dafür $T_x M$.

Aufgabe 1.4.30 Zeigen Sie, dass dieses Konzept von Tangentialvektoren für Kurven in $\mathbb{R}^n$ äquivalent zum üblichen Begriff ist.

Lemma 1.4.31 Die Menge $T_x M$ bildet einen reellen Vektorraum, dessen Dimension mit der Dimension der Mannigfaltigkeit zusammenfällt.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass man Tangentialvektoren an M im Punkt $x \in M$ in geeigneter Weise mit Skalaren multiplizieren kann und auch eine Addition möglich ist. Seien dazu $[\gamma]_0$, $[\gamma_{1,2}]_0$ drei Tangentialvektoren an M bei x , $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und (τ, U) eine Koordinatenumgebung von $x \in M$. Die Kurven $\gamma, \gamma_{1,2}$ seien Repräsentanten der Tangentialvektoren $[\gamma]_0$, $[\gamma_1]_0$, bzw. $[\gamma_2]_0$. Wir setzen

$$(1.4.32) \quad \lambda[\gamma]_0 = [\tau^{-1}(\lambda(\tau \circ \gamma))]_0$$

und

$$(1.4.33) \quad [\gamma_1]_0 + [\gamma_2]_0 = [\tau^{-1}(\tau \circ \gamma_1 + \tau \circ \gamma_2 - \tau(x))]_0.$$

Zunächst muss gezeigt werden, dass diese Verknüpfungen unabhängig von den Repräsentanten und unabhängig von der gewählten Karte (τ, U) ist. Wir führen dies nur in einem, dem einfacheren, Fall aus. Angenommen, $\gamma, \bar{\gamma}$ seien beide Repräsentanten von $[\gamma]_0$. Aufgrund der Definition ist $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0) = x$. Wir müssen nun zeigen, dass für jede Karte (σ, U) , die bei x definiert ist, gilt

$$(\sigma \circ \tau^{-1}(\tau \circ \gamma))'(0) = (\sigma \circ \tau^{-1}(\tau \circ \bar{\gamma}))'(0).$$

Eine einfache Anwendung der Produktregel liefert als Ergebnis, dass beide Seiten gleich sind. Wählt man in der Konstruktion eine andere Karte $\tilde{\tau}$, so muss wiederum für eine beliebige Karte σ gezeigt werden, dass

$$\sigma(\tau^{-1}(\lambda\tau \circ \gamma))'(0) = \sigma(\tilde{\tau}^{-1}(\lambda\tilde{\tau} \circ \gamma))'(0)$$

ist. Da die Ableitung linear in λ ist, folgt das Ergebnis wieder aus der Produktregel. Die Dimension erhält man einfach durch Identifizierung von $[\gamma]_0$ mit $(\tau \circ \gamma)'(0)$ für eine feste Karte mit zugehöriger Koordinatenumgebung (τ, U) , wobei $\gamma(0) \in U$ liegt. $\square$

Lemma 1.4.34 Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit M , für $x \in M$ sei $T_x M$ der Tangentialraum. Wir setzen

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

und definieren Karten $\tau_{x,v} : TM \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Hier ist $(x, v) \in TM$, d.h. $x \in M$, $v \in T_x M$. Ferner sei (τ, U) eine Koordinatenumgebung von x . Für $y \in U$ und $w \in T_y M$ setzen wir

$$\tau_{x,v}(y, w) = (\tau_x(y), (\tau_x \circ \gamma)'(0)),$$

wobei γ eine Kurve ist, welche w repräsentiert.

Die Menge $\{(\tau_{x,v}, U_x \times T_x M) \mid x \in M, v \in T_x M\}$ bildet einen Atlas auf TM . Hat M eine C^k differenzierbare Struktur, so ist TM eine C^{k-1} -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Man beachte die Wahl der Topologie auf TM : wir wählen die grösste Topologie, so dass alle $\tau_{x,v}$ stetig sind.

Beweis. Nachzulesen in Büchern über Differentialtopologie. Siehe z.B. BRÖCKER & JÄNICH¹² [4]. $\square$

Man beachte, dass die Konstruktion nicht von v abhängt.

¹²T. Bröcker und K. Jänich sind an der Universität Regensburg tätige gegenwärtige Mathematiker.

Bemerkung 1.4.35 Den einzelnen Tangentialraum $T_x M$ bezeichnet man auch als *Faser* des Bündels TM .

Definition 1.4.36 Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Wir definieren die *tangentiale Abbildung* $Tf : TM \rightarrow TN$ faserweise durch $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$, indem wir einen Tangentialvektor $v \in T_x M$, der durch eine Kurve γ repräsentiert wird, abbilden auf die Klasse $[f \circ \gamma]_0$.

Definition 1.4.37 1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (wir werden in Zukunft auf die Schreibweise als Paar verzichten). Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Kurve (d.h. eine glatte Abbildung). Wir definieren den Tangentialvektor $[\gamma]_t$ für $t \in \mathbb{R}$ im Punkt $\gamma(t)$ durch den Tangentialvektor der Kurve $\gamma_1(s) = \gamma(t + s)$ im Punkt $\gamma_1(0)$.

2. Eine stetige Abbildung $v : M \rightarrow TM$ mit der Eigenschaft $v(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$ heißt *Vektorfeld* auf M .

3. $w : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ sei eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft $w(x, t) \in T_x M$ für alle $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$. Wir nennen w ein *zeitabhängiges Vektorfeld* auf M .

4. Gegeben sei ein (zeitabhängiges) Vektorfeld v . Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt *Lösungskurve* für v , wenn für jedes $t \in I$ der Tangentialvektor $[\gamma]_t$ der Kurve im Punkt $\gamma(t)$ mit $v(\gamma(t))$ bzw. mit $v(\gamma(t), t)$ übereinstimmt.

Bemerkung 1.4.38 Ist $M = \mathbb{R}^n$, so ist natürlich $TM = \mathbb{R}^{2n}$. Jedoch identifiziert man üblicherweise die Tangentialvektoren wieder mit Punkten des Raumes und betrachtet dann Vektorfelder als Abbildungen $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bzw. $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dies macht manchmal die Schreibweise einfacher. Konzeptionell ist jedoch die Trennung einfacher. Im weiteren Verlauf werden wir uns ausschließlich dem Studium von Integralkurven von (zeitabhängigen) Vektorfeldern widmen.

Bemerkung 1.4.39 Hat man ein Vektorfeld $v : M \rightarrow TM$ auf einer Mannigfaltigkeit M , dann ist formal die *tangentiale Abbildung* Tv eine Abbildung von $TM \rightarrow T(TM)$. Im Spezialfall, dass $v(x) = 0 \in T_x M$ ist, kann man jedoch $T_x f$ als Abbildung $T_x M \rightarrow T_x M$ auffassen. Das sollte sich jede(r) selbst überlegen! Noch ein Hinweis: Viele Bilder zur Erläuterung der Konzepte findet man im Buch von CHILLINGWORTH [5] oder bei ARNOL'D [3].

Neben den bisher erwähnten Büchern über gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es noch eine ganze Reihe von Büchern, die teilweise weit über das hier behandelte Material hinausgehen. Als Beispiele seien genannt: Amann [2], Hale [12], Hartman [13], Knobloch & Kappel [15], Palis & de Melo [16] und Walter [19].

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1.5.1 Man überlege sich, ob ein Zerfallsgesetz $u(t)$, welches der Beziehung (1.1.8) genügt, auch eine Gleichung der Form (1.1.6) erfüllt.

Aufgabe 1.5.2 (a) Man begründe, dass jede Lösung der Gleichung (1.1.1) die Form Ce^x mit einer reellen Konstante C hat.

(b) Man gebe ein entsprechendes Argument für die Gleichung (1.1.4) und die Lösungen (1.1.5) an.

Aufgabe 1.5.3 Man löse die Gleichungen

(a) $u' = u^2 + 1$

(b) $u' = -\frac{x^2}{u^3}$

(c) $u' = e^u \sin(x)$

mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen* und diskutierte das Verhalten der Lösungen mit $u(0) = p_0$, $p_0 \in \mathbb{R}$. Darunter verstehen wir die Beantwortung der folgenden Fragen.

- Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?
- Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow t_+$, $t \rightarrow t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnet, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Aufgabe 1.5.4 Man verifiziere die Aussagen über die logistische Gleichung:

(a) Für $p_0 \in (0, K)$ existiert die Lösung für alle Zeiten und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen K , für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null.

(b) Für $p_0 > K$ existiert die Lösung nicht für alle reellen Zeiten. Man diskutierte das Verhalten.

(c) Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $p_0 < 0$!

Aufgabe 1.5.5 Man diskutierte das System (1.1.21) für $K < 0$.

Aufgabe 1.5.6 Man überprüfe die folgenden Gleichungen auf Exaktheit, bestimme für die nicht exakten Gleichungen einen integrierenden Faktor und bestimme die Lösungen. Man beachte, dass die Gleichungen nicht überall Sinn machen. In diesen Fällen betrachte man eine äquivalente Differentialgleichung für die Funktion $x = x(y)$. Gibt es eine symmetrische Schreibweise?

1. $yy' = x$

2. $xy' = y$

3. $x - y + (-x + 1)y' = 0$

$$4. \quad 4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$$

$$5. \quad xy^2 + y - xy' = 0$$

Aufgabe 1.5.7 Man programmiere den oben genannten Algorithmus in matlab und stelle die Lösungen zu den oben genannten Modellproblemen für verschiedene Anfangs- und Parameterwerte graphisch dar und interpretiere die Ergebnisse.

Aufgabe 1.5.8 Man zeige, dass die Menge $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm

$$\|u\| = \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|,$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 1.5.9 Wir betrachten die Abbildung

$$(1.5.10) \quad T : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n) : u \mapsto \int_0^1 f(., y)u(y)dy,$$

wobei f eine auf $[0, 1] \times [0, 1]$ stetige, reellwertige Funktion ist. Man zeige, T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Aufgabe 1.5.11 Man beweise das Lemma 1.4.4.

Aufgabe 1.5.12 Man veranschauliche sich das Tangentialbündel an die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^2$. Wie sehen typische Vektorfelder aus? Wie hat man sich das entsprechende auf dem Torus $\mathbf{T}^2$ vorzustellen.

Aufgabe 1.5.13 Für die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem Beweis zum Banachschen Fixpunktstaz beweise man die Fehlerabschätzung

$$d(x_{n+1}, \bar{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0).$$