Kapitel 7

Topologische Äquivalenz

7.1 Strukturelle Stabilität

Wir betrachten in diesem Abschnitt C^1-Vektorfelder auf kompakten Mannigfaltigkeiten, oder aber Lipschitz stetige Vektorfelder auf einem Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ existieren. Es seien v_1, v_2 zwei C^1-Vektorfelder auf M_1 bzw. M_2.

Definition 7.1.1 *Wir nennen die Flüsse Φ_1 und Φ_2 zu v_1 bzw. v_2* topologisch äquivalent, *wenn es einen Homöomorphismus $H : M_1 \to M_2$ gibt der Trajektorien von v_1 auf Trajektorien von v_2 unter Erhalt der Orientierung der Zeit abbildet. Gilt sogar*

$$H(\Phi_1(t, x)) = \Phi(t, H(x))$$

so nennen wir v_1 und v_2 konjugiert.

Die Anzahl von Ruhelagen und periodischen Lösungen ist eine Invariante unter topologischer Äquivalenz. Ebenso bleiben Stabilitätseigenschaft unter topologischer Äquivalenz erhalten, nicht aber die Eigenwerte der Linearisierung.

Beispiel 7.1.2

1. *Der Fluss zu $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$ ist topologisch äquivalent zum Fluss zu $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x$.*
   Dies sieht man durch Betrachten geeigneter Transversaler.

2. *Aufgrund des Begradigungssatzes 5.1.21 ist in der Nähe jedes regulären Punktes ein Fluss topologisch äquivalent zum Fluss zum Vektorfeld $(1, 0, \dots, 0)$.*

Definition 7.1.3 *Ein C^1-Vektorfeld $v : M \to TM$ heißt* strukturell stabil, *wenn es eine Umgebung Q von v in der Menge aller C^1-Vektorfelder $M \to TM$ gibt, so daß $w \in Q$ impliziert, daß der zu w gehörende Fluss Φ_w topologisch äquivalent zu Φ_v ist. Als Metrik auf dem Raum der C^1-Vektorfelder wählen wir $d_{C^1}(v, w) = \sup |v(x) - w(x)| + \sup \|Dv - Dw\|$.*

Aufgrund der Vorbemerkung treten Verzweigungen nur in nicht strukturell stabilen Vektorfeldern auf. Es ist daher eine allgemeinere Aufgabe, alle strukturell stabilen Vektorfelder zu klassifizieren und darüber hinaus die Umgebungen von nicht strukturell stabilen wiederum in Regionen struktureller Stabilität einzuteilen. Dies ist eine wesentliche Verallgemeinerung der Verzweigungstheorie, wie wir sie im letzten Kapitel gesehen haben.

Beispiel 7.1.4 1. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto 0$ ist nicht strukturell stabil.

2. Das Vektorfeld
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$
ist nicht strukturell stabil.

3. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto -x$ ist strukturell stabil

Die erste Aussage ist leicht einzusehen. Der Fluss zu $\dot{x} = c \in \mathbb{R}^n$ ist für jedes $c \neq 0$ nicht topologisch äquivalent zum trivialen Fluss $\Phi(t, \cdot) = \mathbb{1}$.

Im zweiten Fall betrachten wir einfach die Störung

$$v_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1 \\ x_1 + \varepsilon x_2. \end{pmatrix}.$$

Für jedes $\varepsilon \neq 0$ hat das v_ε keine periodische Lösung.

Die dritte Aussage, ist schwerer zu beweisen. Der Satz über implizite Funktionen besagt (man überlege sich eine genaue Begründung), daß jedes C^1-Vektorfeld v_ε , das bezüglich der Metrik d^{C^1} genügend nahe bei v ist, genau eine asymptotisch stabile Ruhelage u^* hat, und daß für jeden Anfangswert u_0 gilt $\omega(u_0) = u^*$. Setze $H(0) = u^*$. Aufgrund des Umkehrsatzes von Ljapunov gibt es bei u^* eine positiv definite Ljapunov-Funktion V mit $\dot{V} < 0$. Sei $c \neq 0$ $c \in V(U)$, wobei U die Umgebung ist, in der nach Satz über implizite Funktionen keine weitere Ruhelage von v_ε liegt. Setze $T = V^{-1}(c)$. T ist Transversale zum Vektorfeld und homöomorph zu einer Sphäre (Satz über implizite Funktionen). Sei $h : T \to S^{n-1}$ ein Homöomorphismus, der nach der eben gemachten Aussage existiert. Setze für $x \in S^{n-1}$

$$H(x) = h(x)$$

und für allgemeines $u_0 \in \mathbb{R}^n$, sei $t \in R$, so daß $u(t, u_0) \in S^{n-1}$. Setze

$$H(u_0) = \Phi_{v_\varepsilon}(h(u(t, u_0)), -t).$$

Zu zeigen ist:

1. H ist eine Bijektion.

2. H ist stetig.

3. H^{-1} ist stetig.

H ist wohl-definiert und injektiv. Da u^* global asymptotisch stabil ist, ist H auch surjektiv. Der einzige Punkt, an dem die Stetigkeit unklar ist, ist $u = 0$. Da aber $u = 0$ global asymptotisch stabil ist, ist auch dort die Stetigkeit gewährleistet.

Eine erste allgemeine Aussage liefert der folgende Satz.

Satz 7.1.5 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $v : M \to TM$ ein C^1-Vektorfeld. Ist Φ_v strukturell stabil, so hat v nur endlich viele Ruhelagen und jede dieser Ruhelagen ist hyperbolisch.*

Beweis. Wenn wir zeigen, daß jede Ruhelage notwendigerweise hyperbolisch ist, dann folgt auch die Aussage über die Anzahl (auf einer kompakten Mannigfaltigkeit). Angenommen u^* sei eine nicht-hyperbolische Ruhelage. Sei U eine Umgebung und χ eine $C_0^\infty(U, \mathbb{R})$-Funktion. Wähle einen Eigenwert $\mu \in i\mathbb{R}$ und störe alle anderen Eigenwerte von der imaginären Achse, so daß μ einfacher Eigenwert wird. Nun können wir eine kleine Störung angeben, die zu einer Verzweigung am einfachen Eigenwert Null oder einer Hopf-Verzweigung führt. Dies widerspricht der strukturellen Stabilität. □

Strukturelle Stabilität impliziert nicht nur Bedingungen an die Gleichgewichtslagen, sondern auch an weitere signifikante Erscheinungen des Flusses. Wir betrachten zunächst ein Beispiel.

Beispiel 7.1.6 *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld mit zwei Gleichgewichtslagen und einem verbindenden Orbit. Wir betrachten zunächst den Fall zweier (hyperbolischer) Sättel, o.B.d.A. nehmen wir an, das Vektorfeld habe die Form*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= y^2 - 1. \end{aligned}$$

Das Phasenportrait ist schematisch in Abbildung 7.1 dargestellt. Wir wollen zeigen, daß diese Verbindung der strukturellen Stabilität widerspricht. Wir betrachten eine Umgebung des Ursprungs U und eine C_0^∞-Funktion χ mit $\operatorname{supp}\chi \subset U$. *Wir betrachten die Störung* $\chi(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Durch diese Störung wird offensichtlich der verbindende Orbit zerstört.*

Das nächste Beispiel zeigt den Fall einer Sattel-Knoten-Verbindung.

Beispiel 7.1.7

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y^2 - 1. \end{aligned}$$

Das Phasenportrait hat schematisch die in Abbildung 7.2 gezeigte Gestalt. Wir wollen zeigen,

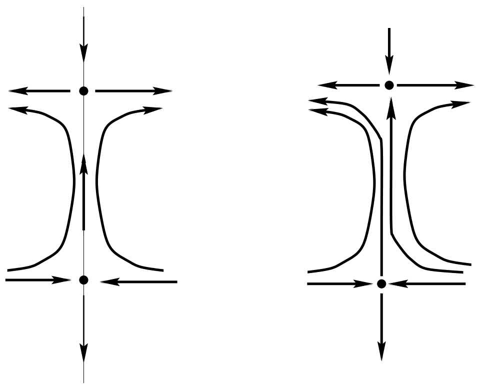

Abbildung 7.1: Das Bild einer Sattel-Sattel Verbindung.

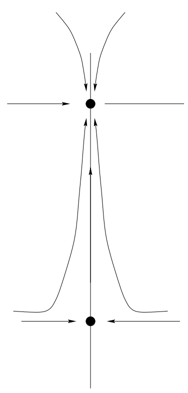

Abbildung 7.2: Das Bild einer Sattel-Knoten Verbindung.

daß dieses System strukturell stabil ist. Wir betrachten eine Umgebung des Q dieses Vektorfelds in der Menge der C^1-Vektorfelder bezüglich der metrik d^{C^1}. . Jedes Vektorfeld in der Nähe hat genau zwei Ruhelagen, einen Sattel und einen Knoten. Da die Menge der Punkte, deren ω-Limesmenge der Punkt $(0,-1)$ ist, offen ist, bleibt eine Verbindung bestehen. Die strukturelle Stabilität des Systems bedarf einiger weiterer Überlegungen. Wir kommen später darauf zurück.

Nun wollen wir die im Beispiel gemachten Erfahrungen verallgemeinern. Wir erinnern zunächst an den Beweis des Satzes 6.1.4: Beim Beweis des Satzes 6.1.4 über Spektrum und Stabilität II haben wir gezeigt, daß zu jedem u_0 im Eigenraum zu Eigenwerten mit positivem Realteil eine Lösung existiert, die rückwärts gegen null konvergiert und deren Eigenwert durch Projektion auf diesen Wert u_0 abgebildet wird. Wir hatten damals bereits erwähnt, daß diese Aussage fast den Satz von der instabilen Mannigfaltigkeit beweist, der aussagt, daß falls w_0 hyperbolische Ruhelage ist, die Menge der Anfangswerte u_0 mit $\alpha(u_0) = w_0$ eine Mannigfaltigkeit bilden.

Definition 7.1.8 *Sei w_0 eine hyperbolische Ruhelage. Die* instabile Menge *$W^u(w_0)$ von u_0 ist definiert als die Menge aller u_0 mit $\alpha(u_0) = w_0$. Ebenso definiert man die* stabile Menge *als die Gesamtheit der Punkte, deren ω-Limesmenge w_0 ist.*

Satz 7.1.9 *$W^u(w_0)$ und $W^s(w_0)$ bilden Mannigfaltigkeiten, deren Dimension sind durch*

$$\dim W^u(w_0) = \dim E^+(w_0),$$

bzw.

$$\dim W^s(w_0) = \dim E^-(w_0)$$

gegeben.

Beweis. Lokal, d.h. in der Nähe, d.h. in einer Umgebung V von w_0 ist dies eine Überlegung, die auf dem Beweis von Satz 6.1.4 aufbaut. Zu jedem Punkt auf $W^u(w_0)$ gibt es eine Umgebung U und eine Umgebung $W \subset V$, so daß U diffeomorphes Bild von W ist. Dies beweist dann die Aussage. □

Natürlich sind Schnittpunkte von $W^u(w_0)$ und $W^s(w_1)$ Punkte auf heteroklinen Orbits, die w_0 mit w_1 verbinden. Offenkundig ist auch die Existenz eines verbindenden Orbits eine Invariante unter topologischer Äquivalenz. Weit weniger offenkundig ist der folgende Sachverhalt: Ist Fluss Φ_v zu v strukturell stabil und schneiden sich $W^u(w_0)$ und $W^s(w_1)$, so ist dieser Schnitt transversal. Dabei heißt ein Schnitt zweier Mannigfaltigkeiten $N_1, N_2 \subset M$ transversal, wenn für $x \in N_1 \cap N_2$ folgt $T_xN_1 + T_xN_2 = T_xM$. Dieser Sachverhalt, den wir hier nicht beweisen können, der aber durch das folgende Bild klarer wird, hat wichtige Konsequenzen: In strukturell stabilen Systemen gibt es weder homokline Lösungen noch heterokline Zykel. Dabei heißt eine Folge von Ruhelagen $w_1, \dots w_m$ mit verbindenden Orbits $\mathcal{O}_i$ mit $\omega(\mathcal{O}_i) = w_{i+1 \bmod m}, \alpha(\mathcal{O}_i) = w_i$ ein heterokliner Zyklus. Warum sind solche speziellen Lösungen in strukturell stabilen Systemen nicht möglich? Ist $u_0 \in W^u(w_0) \cap W^s(w_1)$, so ist u_0 ein regulärer Punkt und die gesamte Trajektorie ist im Schnitt $W^u(w_0) \cap W^s(w_1)$. Der Rest ist eine einfache Übung der Arithmetik, wir betrachten den Fall eines heteroklinen Zyklus mit zwei Ruhelagen w_0, w_1 und verbindenden Orbits $\mathcal{O}_1 = \{u(t, u_1)|t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{O}_2 = \{u(t, u_2)|t \in \mathbb{R}\}$. Eine bildliche Vorstellung vermittelt die folgende Skizze 7.3. Angenommen der Schnitt wäre in jedem

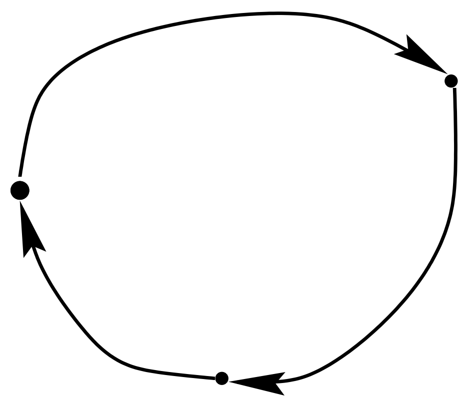

Abbildung 7.3: Ein schematisches Bild eines heteroklinen Zyklus.

Punkt auf den Orbits transversal, sei $n = \dim M$, $n_i = \dim W^u(w_i)$, $m_i = \dim W^s(w_i)$, so gilt

$$\begin{aligned}
n_1 + m_1 + n_2 + m_2 &= \dim W^u(w_1) + \dim W^s(w_1) + \dim W^u(w_2) + \dim W^s(w_2) \\
&= 2n \\
&= \dim T_{u_1} M + \dim T_{u_2} M \\
&= \dim(T_{u_1} W^u(w_1) + T_{u_1} W^s(w_2)) + \dim(T_{u_2} W^u(w_2) + T_{u_1} W^s(w_1)) \\
&= \dim T_{u_1} W^u(w_1) + \dim T_{u_1} W^s(w_2) - \dim(T_{u_1} W^u(w_1) \cap T_{u_1} W^s(w_2)) \\
&\qquad + \dim T_{u_2} W^s(w_1) + \dim T_{u_2} W^u(w_2) - \dim(T_{u_2} W^s(w_1) \cap T_{u_2} W^u(w_2)) \\
&\geq n_1 + m_2 - 1 + n_2 + m_1 - 1 \\
&> n_1 + m_2 + m_1 + n_2.
\end{aligned}$$

Für alle weiteren Fälle kann man eine ganz ähnliche Rechnung durchführen. Neben einigen Beispielen für strukturell stabile Flüsse haben wir noch notwendige Bedingungen für strukturelle Stabilität gesehen.

Eine genaue Klassifikation der strukturell stabilen Systeme stammt von ROBINSON[18] aus dem Jahr 1974. Die Formulierung benötigt ein paar Begriffe, die wir bisher nicht eingeführt haben. Eine weiterführende Diskussion findet man in der sehr schönen Monographie von GUCKENHEIMER & HOLMES [11]

7.2 Der Satz von Hartman-Grobman

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, daß es zu jeder hyperbolischen Gleichgewichtslage einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ eine Umgebung U gibt, so daß der auf U eingeschränkte Fluss äquivalent zum Fluss des linearisierten Systems ist. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 7.2.1 *Sei w_0 hyperbolischer Fixpunkt eines C^1-Vektorfeldes v und $Q = D_u v(w_0)$. Φ_Q sei der zum linearen Vektorfeld $u \mapsto Qu$ gehörenden Fluss. Dann gibt es eine Umgebung W von w_0 und eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$, so daß die Flüsse $\Phi_v|_W$ und $\Phi_Q|_U$ topologisch äaquivalent sind.*

Beweis. Die Aussage folgt aus einer vergleichbaren Aussage für Abbildungen. Wir formulieren diese zunächst als Satz 7.2.2, dann beweisen wir, daß Satz 7.2.1 aus Satz 7.2.2 folgt und schließlich zeigen wir Satz 7.2.2. □

Sei A eine $k \times k$-Matrix, deren Eigenwerte alle im Inneren des Einheitskreises liegen, B eine $(n-k) \times (n-k)$-Matrix, deren Eigenwerte alle vom Betrag größer als 1 sind. Sei

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung mit $D_u F(0) = 0$. Wir betrachten die Abbildung

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Pu + F(u).$$

Satz 7.2.2 *Ist P regulär, so gibt es Umgebungen U, V von $0 \in \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : V \to U$, so daß für $u \in U$ gilt*

$$\Psi \circ G \circ \Psi^{-1}(u) = Pu.$$

Wir führen nun die Aussage des Satzes 7.2.1 auf den Satz 7.2.2 zurück. Wir können annehmen, daß der Fluss Φ_v zu v die Form $\exp(Qt) + r(t,u)$ hat und $r(t, w_0) = \partial_u r(t,u) = 0$ ist. Q hat Blockdiagonalgestalt und damit auch $\exp(Qt)$. Seien A, B die Blöcke von $\exp(Q) = P$ zu den Eigenwerten im Inneren, bzw. im Äußeren des Einheitskreises. Wir betrachten nun die Aufgabe, die Matrix $\exp(Q)$ zur Zeit-1-Abbildung $\Phi(1,u)$ zu konjugieren. Dies ist wegen Satz 7.2.2 auf einer Umgebung von w_0 möglich. Sei also Ψ_0 diese Konjugation, also $\Psi_0 \circ \Phi(1, \cdot) \circ \Psi_0^{-1} = \exp(Q)$. Setze

$$\Psi = \int_0^1 \exp(-Qs) \Psi_0 \Phi(s, \cdot) ds.$$

Dann ist

$$\exp(Qt)\Psi = \exp(Qt) \int_0^1 \exp(-Qs) \Psi_0 \Phi(s, \cdot) ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \exp(-Q(s-t))\Psi_0\Phi(s-t,\cdot)\Phi(t,\cdot)ds \\
&= \int_{-t}^{1-t} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds\Phi(t,\cdot) \\
&= \left(\int_{-t}^{0} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds + \int_0^{1-t} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds\right)\Phi(t,\cdot).
\end{aligned}
$$

Nun schreiben wir

$$\exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot) = \exp(-Qs)\exp(-Q)\exp(Q)\Psi_0\Phi(s,\cdot).$$

Wegen $\exp(Q) = \Psi_0\Phi(1,\cdot)\Psi_0^{-1}$ ergibt dies

$$\exp(-Qs)\exp(-Q)\Psi_0\Phi(1,\cdot)\Psi_0^{-1}\Psi_0\Phi(s,\cdot) = \exp(-Q(s+1))\Psi_0\Phi(s+1,\cdot).$$

Damit ist

$$\int_{-t}^{0} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds = \int_{-t}^{0} \exp(-Q(s+1))\Psi_0\Phi(s+1,\cdot)ds = \int_{1-t}^{1} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds.$$

Also wird aus der obigen Gleichung

$$\exp(Qt)\Psi = \int_0^1 \exp(-Q(s))\Psi_0\Phi(s,\cdot)\Phi(t,\cdot)ds.$$

Insgesamt ergibt dies die Konjugation

$$\exp(Qt)\Psi = \int_0^1 \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds\Phi(t,\cdot) = \Psi\Phi(t,\cdot).$$

Für den Beweis von Satz 7.2.2 benötigen wir noch ein Lemma aus der Linearen Algebra.

Definition 7.2.3 *Wir nennen eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ m-hyperbolisch, falls L keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt. Mit L^s bezeichnen wir den stabilen Anteil von L, also die Einschränkung auf E^s, den verallgemeinerten Eigenraum zu den Eigenwerten im Inneren des Einheitskreises, und mit L^u entsprechend den instabilen Anteil.*

Lemma 7.2.4 *Ist L eine reguläre, m-hyperbolische Matrix und $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, welche von einem Skalarprodukt induziert wird (Hilbert-Norm) mit*

$$|\sigma(L^s)| < \alpha, \ |\sigma((L^u)^{-1})| < \alpha$$

und $E^s \perp E^u$. Weiterhin gilt

$$\max\left\{\|L^s\|, \|(L^u)^{-1}\|\right\} < \alpha.$$

Beweis. Bekannt aus der Linearen Algebra. □

Beweis von Satz 7.2.2. Zunächst wählen wir die Norm, die wir im vorigen Lemma konstruiert haben. Der Übergang zu einer äquivalenten Norm bedeutet, daß wir Lipschitz-Konstanten mit positiven Zahlen multiplizieren und daher sagt uns die Voraussetzung des Satzes, daß wir eine hinreichend kleine Umgebung wählen können, so daß gilt

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

mit

$$2\lambda < \min\left\{1 - \alpha, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}.$$

Schritt 1: $L + g$ ist ein Homöomorphismus.

Lösen wir die Gleichung $Lx + g(x) = y$, so ist diese äquivalent zu

$$x = L^{-1}(y - g(x)) =: f_y(x).$$

Für ein Paar x_1, x_2 rechnet man leicht nach

$$\|f_y(x_1) - f_y(x_2)\| \leq \|L^{-1}\|\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \lambda\|L^{-1}\|\|x_1 - x_2\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Damit existiert ein Fixpunkt $x(y)$. Eine einfache Rechnung ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x(y) - x(\tilde{y})\| &= \|f_y(x(y)) - f_{\tilde{y}}(x(\tilde{y}))\| \\ &\leq \|f_y(x(y)) - f_y(x(\tilde{y}))\| + \|f_y(x(\tilde{y})) - f_{\tilde{y}}(x(\tilde{y}))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x(y) - x(\tilde{y})\| + \|L^{-1}\|\|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\|x(y) - x(\tilde{y})\| \leq 2\|L^{-1}\|\|y - \tilde{y}\|.$$

Also ist $y \mapsto x(y) = (L + g)^{-1}(y)$ gleichmäßig Lipschitz stetig.

Schritt 2: Sei h wie g. Wir nehmen an, daß es eine eindeutige Abbildung $H(g, h)$ gibt mit $H - \mathbb{1}$ ist stetig und beschränkt, und H ist stetig mit

$$(L + g)H = H(L + h).$$

Setze $A = H(g, 0)$, $B = H(0, g)$. Dann ist

$$L \circ B = B \circ (L + g)$$

und

$$(L + g) \circ A = A \circ L.$$

Insgesamt also

$$(L + g) \circ A \circ B = A \circ L \circ B = A \circ B(L + g).$$

Setzen wir an $A = \mathbb{1} + u$, $B = \mathbb{1} + v$ und $A \circ B = \mathbb{1} + w$ mit $w = v + u \circ B$, so ergibt sich

$$A \circ B = H(g, g) = \mathbb{1}$$

und ebenso $B \circ A = \mathbb{1}$. Also ist H ein Homöomorphismus.

Schritt 3: Mit dem Ansatz $H = \mathbb{1} + u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein stetiges, beschränktes u gibt mit

$$(L + g) \circ (\mathbb{1} + u) = (\mathbb{1} + u) \circ (L + h).$$

Der erste Schritt hat gezeigt, daß ein $L + h$ ein Homöomorphismus ist. Also ist die vorige Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} \mathbb{1} + u &= (L + g) \circ (\mathbb{1} + u) \circ (L + h)^{-1} \\ &= L\mathbb{1} \circ (L + h)^{-1} + Lu \circ (L + h)^{-1} + g \circ (\mathbb{1} + u)(L + h)^{-1}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{1} = (L + h) \circ (L + h)^{-1}$ wird diese Gleichung zu

$$u = Lu \circ (L + h)^{-1} + g \circ (\mathbb{1} + h)^{-1} - h \circ (L + h)^{-1}.$$

Wir schreiben dies als

$$u = Lu \circ (L + h)^{-1} + G(u) = K(u).$$

K bildet den Banachraum der stetigen, beschränkten Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in sich ab. Wir wollen zeigen, daß K einen Fixpunkt hat. Mit den Eigenprojektoren P^s bzw. P^u splitten wir diese Gleichung in ein Paar

$$\begin{aligned} P^s u &= L^s P^s u \circ (L + h)^{-1} + P^s G(u) = K^s(u) \\ P^u u &= L^u P^u u \circ (L + h)^{-1} + P^u G(u). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit $(L^u)^{-1}$ von links und mit $L + h$ von rechts und erhalten nach Umstellen

$$P^u u = (L^u)^{-1} P^u u \circ (L + h) - (L^u)^{-1} P^u G(u) \circ (L + h) = K^u(u).$$

Die Gleichung $u = K(u)$ ist nun äquivalent zu $u = K^s(u) + K^u(u)$. Wir schätzen nun K^s, bzw. K^u getrennt ab, um mit dem Banach'schen Fixpunktsatz einen Fixpunkt $u = K(u)$ zeigen zu können.
Im folgenden benutzen wir die Äquivalenz der Normen $\|u - v\|_\infty$ und $\max\{\sup |P^s(u - v)(x)|, \sup |P^u(u - v)(x)|\}$. Genauer gilt

$$|v(x)| \leq \|P^s(v(x))\| + \|P^u(v(x))\| \leq 2\|v\|_\infty.$$

Nun haben wir für u, v stetig und beschränkt und $y = (L + h)^{-1}(x)$ bzw. $z = (L + h)(x)$

$$\begin{aligned} \|K^s(u)(x) - K^s(u)(x)\| &\leq \alpha\|P^s u(x) - P^s v(x)\| + \|g(y + u(y)) - g(y + v(y))\| \\ &\leq \alpha\|(u - v)\|_\infty + 2\lambda\|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|K^u(u)(x) - K^u(u)(x)\| &\leq \alpha\|P^u u(x) - P^u v(x)\| + \|g(y + u(y)) - g(y + v(y))\| \\ &\leq \alpha\|u - v\|_\infty + 2\lambda\|u - v\|_\infty.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\|K^s(u) - K^s(v)\| \leq (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_\infty$$

und

$$\|K^u(u) - K^u(v)\| \leq (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_\infty.$$

Für K erhält man die Abschätzung

$$\|K(u) - K(v)\|_\infty \leq (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_\infty.$$

Da $\alpha + 2\lambda < 1$ ist, gibt es einen eindeutigen Fixpunkt. Dies vervollständigt dann den Beweis. □

7.3 Aufgaben

Aufgabe 7.3.1 Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Vektorfeld $\dot{z} = \bar{z}^2$ auf $\mathbb{C}$ (fassen Sie dies als Kurzschreibweise für ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ auf) strukturell stabil ist.