Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 9

Aufgabe 33 Entscheiden Sie die Richtigkeit der folgenden Behauptung indem Sie entweder ein Gegenbeispiel angeben oder die nachfolgende Beweisidee zum Beweis ergänzen.
Behauptung: Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und u_0 eine instabile Ruhelage von $\dot{u} = f(u)$, so gibt es eine Lösung u mit $u_0 \in \alpha(\mathcal{O}_u^-)$.

Beweisidee: Ist die Aussage falsch, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\varepsilon > \delta > 0$ ein Startwert v_δ mit $|v_\delta| = \delta$ existiert, so dass ein (minimales) $t(v_\delta) > 0$ existiert mit $|u(t(v_\delta), v_\delta)| = \varepsilon$. Betrachte $\{u(t(\delta), v_\delta)\}_{\delta > 0}$. Diese Menge hat einen Häufungspunkt u^*. Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert impliziert $\alpha(u(\cdot, u^*)) \ni u_0$.

Aufgabe 34 Es sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung. Zeigen Sie:

(a) Ist u_0 eine Ruhelage und $f = -\nabla F$ ein Gradientensystem, so sind alle Eigenwerte von $Df(u_0)$ reell.

(b) Ist $f = J\nabla H$ oder $f = -\nabla F$, u eine Lösung der obigen Gleichung und und entweder $v \in \alpha(u)$ oder $v \in \omega(u)$, so gilt $\lim_{t\to\pm\infty} F(u(t)) = F(v)$ bzw. $H(v) = H(u)$.

Aufgabe 35 Es sei $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, $H \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $\dot{u} = J\nabla H(u)$ ein Hamiltonsystem.

(a) Ein Wert $y \in \mathbb{R}$ heißt regulärer Wert von H, wenn für alle x mit $H(x) = y$ gilt $\nabla H(x) \neq 0$. Zeigen Sie: Ist y ein regulärer Wert von H, so gibt es kein $u_0 \in H^{-1}(y)$ mit $\alpha(u_0)$ oder $\omega(u_0)$ enthält eine Ruhelage.

(b) Ist $n = 1$, y ein regulärer Wert von H und $H^{-1}(y)$ beschränkt, so besteht $H^{-1}(y)$ aus einer Vereinigung minimaler Mengen für die obige Differentialgleichung.

Aufgabe 36 Zeigen Sie: in einem ebenen Hamiltonsystem mit einer Hamiltonfunktion $H \in C^2(U, \mathbb{R}), U \subset \mathbb{R}^2$, die auf keiner Menge von positiven Maß konstant ist, sind fast alle Orbits (bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß 0) geschlossen oder unbeschränkt. (Verwenden Sie den Satz von Sard, d.h. das Maß der Menge der nichtregulären Werte ist 0).

Abgabe: 17.6.2005