Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 8

Aufgabe 29 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Matrix mit Spektralanteilen

$$\begin{aligned} \Sigma_s &= \Big\{\lambda \in \sigma(A) \;\Big|\; \operatorname{Re}\lambda < 0\Big\} \\ \Sigma_0 &= \Big\{\lambda \in \sigma(A) \;\Big|\; \operatorname{Re}\lambda = 0\Big\} \\ \Sigma_u &= \Big\{\lambda \in \sigma(A) \;\Big|\; \operatorname{Re}\lambda > 0\Big\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass es Unterräume U_s, U_0, U_u gibt, mit $\mathbb{R}^n = U_s \oplus U_0 \oplus U_u$, so dass

$$\sigma(A|_{U_j}) = \Sigma_j$$

ist.
(b) Zeigen Sie, dass es Konstanten $a > 0, b > 0, M > 0$ und ein Polynom p gibt, so dass für Anfangswerte $u_s^0 \in U_s$, $u_0^0 \in U_0$ und $u_u^0 \in U_u$

$$\begin{aligned} |E(A,t)u_s^0| &\leq Me^{-at}|u_s^0|, && \text{für } t > 0 \\ |E(A,t)u_0^0| &\leq p(t)|u_0^0|, && \text{für } t \in \mathbb{R} \\ |E(A,t)u_u^0| &\leq Me^{at}|u_u^0|, && \text{für } t < 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 30 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so dass $\operatorname{div}(f)$ ein konstantes Vorzeichen auf G hat, so gibt es keinen geschlossenen Orbit in G.

Aufgabe 31 Bestimmen Sie die Lösungen von

$$\dot{z} = z^2, z \in \mathbb{C}.$$

Diskutieren Sie das Verhalten aller Lösungen einschließlich der Bestimmung der Grenzmengen aller beschränkten Halborbits.

Aufgabe 32 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $f = \nabla f$. Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{u} = -f(u)$. Zeigen Sie, sind u_1, u_2 Ruhelagen, so gibt es keine verbindenden Orbits, die u_1 mit u_2 und u_2 mit u_1 verbinden.

Abgabe: 10.6.2005