

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 6

Aufgabe 21 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q(x, y)(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2$$

längs Lösungen mit Anfangswert $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ gegen 1 konvergiert. Veranschaulichen Sie sich das Lösungsverhalten anhand von numerischen Experimenten.

Aufgabe 22 Man führe in der Differentialgleichung aus Aufgabe 21 Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ ein und leite eine Differentialgleichung für (r, φ) ab. Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung?

Aufgabe 23 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.

- (a) Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt genau eine beschränkte Lösung.
- (b) Ist f periodisch mit Periode $T > 0$, so ist auch die in (a) gefundene Lösung T -periodisch.

Aufgabe 24 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \dots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.

- (a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so dass die Vektoren $u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \dots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.

- (b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A . Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \operatorname{tr}(A)w$.

Abgabe: 27.5.2005