

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 17 Wir bezeichnen mit A^T die Transponierte einer reellen Matrix A und mit $\text{tr}(A)$ die Spur von A . Man zeige:

(a) $\det E(A, t) = e^{\text{tr}(A)t}$

(b) $E(A^T, t) = (E(A, t))^T$

(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A + A^T = 0$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $E(A, t)$ ist orthogonal und $\det(E(A, t)) = 1$. (Eine Matrix B heißt orthogonal, wenn $B^T B = B B^T = \mathbb{1}$ ist.)

Aufgabe 18 Man bringe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

auf Jordansche Normalform und bestimme so die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

Aufgabe 19

Man finde $E(A, t)$ für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht $E(A, t)u_0$ für verschiedene $u_0 \neq 0$ aus.

Aufgabe 20 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld. Ferner sei $\Psi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Wie lautet die Differentialgleichung für $v = \Psi(u)$, wenn $u(t)$ eine Lösung von $\dot{u} = f(u, t)$ ist?

Abgabe: 13.5.2005